La Matematica nella Società e nella Cultura

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Bruno De Finetti

La probabilità: guardarsi dalle contraffazioni!

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **8** (2015), n.3 (*Bruno de Finetti e l'insegnamento della Matematica. «Dalla Realtà, nella Realtà, per la Realtà», a cura di Giuseppe Anichini, Livia Giacardi, Erika Luciano)*, p. 431–462.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2015_1_8_3_431_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI

http://www.bdim.eu/

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2015.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. VIII, Dicembre 2015, 431-462

La probabilità: guardarsi dalle contraffazioni! (*)

BRUNO DE FINETTI

I. – Introduzione

Vorrei riuscire, nella presente occasione, a chiarire nel modo più semplice, ma completo e radicale, la critica ai moltissimi modi in cui (a mio avviso) la probabilità viene fraintesa e contraffatta. Ma i problemi e gli aspetti sono molti, complessi, intricati; tuttavia, se un discorso non potesse bastare per illustrare sufficientemente una certa concezione e persuadere a adottarla, potrà almeno contribuire a chiarire dei dubbi sollevati contro di essa, e a suscitare dubbi nei riguardi delle concezioni opposte.

Sostanzialmente, non ho mai trovato nulla da modificare o da aggiungere (pur estendendola e approfondendola) alla concezione che mi sono andato formando tra il 1926 e il 1928: il triennio a cavallo della laurea (Univ. di Milano, 1927). Fu nel 1926 che un articolo divulgativo di Carlo Foà sulle leggi dell'ereditarietà mendeliana mi indusse a riflettere sulla probabilità e a leggere la *Wahrscheinlichkeitslehre* di Czuber prestatami da un conoscente, e fu nel 1928 che – in una memoria presentata ai Lincei (pubblicata ivi nel 1931) e riassunta in una comunicazione al Congresso Internazionale dei Matematici a Bologna – introdussi il concetto di 'scambiabilità'.

Il ruolo dirompente di tale concetto (ben oltre il significato suo proprio) è così descritto nella prefazione di Kyburg e Smokler alla raccolta *Studies in subjective probability* da essi curata (pp. 13-14). «*In certo senso, il concetto più importante della teoria soggettivistica è quello di 'eventi scambiabili'. Finché non venne introdotta tale nozione* (*da de Finetti* [1931]) *la teoria soggettivistica delle probabilità era ri-*

(*) Testo dell''ultima lezione' tenuta da de Finetti in occasione del collocamento 'fuori ruolo' all'Istituto Matematico G. Castelnuovo il 29 Novembre 1976, pubblicato in *Scientia*, 111, 1976, 255-281.

masta poco più che una curiosità filosofica. Nessuno di coloro per i quali la teoria delle probabilità era oggetto di conoscenza o di applicazione ci prestava gran che di attenzione. Ma, coll'introduzione del concetto di 'equivalenza' *o* 'simmetria' *o* 'scambiabilità', *quale ora è conosciuto, è stata scoperta una via per connettere la nozione di probabilità soggettiva con i classici problemi dell'inferenza statistica*».

Per la precisione, l'indovinato termine di 'scambiabilità' è stato suggerito più tardi, dal Fréchet (1939) parlando di *événéments échangeables*. Tale termine venne rapidamente adottato da molti autori, me compreso (e divenne *exchangeable* in inglese, *austauschbar* in tedesco). Nei miei primi lavori enunciavo la detta condizione senza introdurre una denominazione; fra il 1933 e il 1939 adottai quella di *equivalenti* proposta nel 1932 da Khinchin (e tuttora seguita in Urss); altre denominazioni (poco usate) sono quelle di *simmetrici* o *invarianti per mistura* (si tratta infatti di simmetria, o invarianza, rispetto alle permutazioni ([1])).

Un primo tentativo di esposizione sintetica ma globale del mio punto di vista ho dovuto farlo per l'invito dell'Institut Poincaré a tenervi un ciclo di conferenze (2-10 maggio 1935). Il testo francese è difficilmente reperibile, ma l'ottima traduzione inglese curata da Leonard Jimmie Savage si trova nel volumetto già menzionato di Kyburg e Smokler (Wiley, 1964), insieme a scritti di John Venn, Emile Borel, Frank Plumpton Ramsey, Bernard O. Koopman e dello stesso Savage.

E non posso non cogliere l'occasione per ricordare la sua figura così eccezionalmente ricca di spirito critico, di vaste conoscenze (in ogni campo), di straordinaria umanità. In particolar modo devo sottolineare che devo a lui se la mia non è più considerata come un'eresia blasfema ma innocua, bensì come un'eresia con cui la chiesa statistica ufficiale deve fare i conti, e sta perdendo. La cooperazione di Savage mi è stata di enorme ausilio, oltre che per le sue doti straordinarie e molteplici, anche perché i suoi dubbi sui dogmi della chiesa statistica ufficiale, 'oggettivistica', maturarono dopo esser stato allevato in essa, come penosa impressione di chi, di fronte ad assurdità e manchevolezze, sente vacillare la fede in cui è cresciuto. Io mi trovavo, naturalmente, in situazione opposta, come un profano o un barbaro che ha la sensazione che altri dica delle assurdità, ma quasi non sa da che parte cominciare perché a mala pena riesce a farsi un'idea del senso che altri intende dare ai nonsensi che impone come dogmi.

In tema di ringraziamenti, dovrei naturalmente aggiungere moltissimi altri nomi, anche se, per ovvie ragioni, mi limito a quelli di tre illustri

Colleghi che, pur non condividendo la mia posizione (ma appunto perciò ne faccio loro maggior merito) mi hanno aiutato e dato occasione di esporre le mie idee nelle sedi più qualificate: sono Guido Castelnuovo, Maurice Fréchet, Jerzy Neyman.

La presente esposizione vuole essere – dopo quella all'Institut Poincaré e parecchie altre di vario tipo – un nuovo ed ultimo tentativo di coordinare in una sintesi quanto meglio possibile organica (ma non specialistica, quasi 'senza formule teoremi et similia') le considerazioni di varia natura – logica, matematica, psicologica, economica, epistemologica o (se così si preferisse) filosofica – intese a chiarire quali formulazioni, impostazioni e conclusioni di natura concettuale e matematica siano o non siano ammissibili e ragionevoli – *e perché* – nell'ambito di una visione globale e coerente.

In gran parte dovrò ripetere, sostanzialmente, cose dette e ridette, ma molte delle osservazioni e argomentazioni (oltre al loro coordinamento) sono nuove o rinnovate.

II. – Peripatetici o Pragmatisti?

Il fatto è che, a mio avviso, nelle concezioni in voga la nozione di probabilità e le sue proprietà (quando non rimangono sterilizzate – ed è ancor peggio! – nel vuoto di costruzioni assiomatiche formalisticamente astratte e, come forse è inevitabile, sostanzialmente manchevoli) vengono legate alla realtà e alle applicazioni mediante asserzioni circolari o prive di senso.

Non vorrei apparire troppo cattivo, ma non posso non confessare che trovo una straordinaria analogia fra il tipo di contorcimenti che si sentono ripetere per difendere siffatte asserzioni e il modo di argomentare in cui eccelleva il mitico Simplicio, immortalato nei *Dialoghi* di Galileo. Ma, purtroppo, *cosi è* (se vi pare, ... e altrimenti 'invece pure').

Sono pronto a chiedere scusa della mia insistenza, ma essa mi pare non sia mai troppa (e neppure sufficiente): essa è dovuta infatti alla preoccupazione per il pericolo che mi sembra minacciare gli studi sulla probabilità e sue applicazioni, studi la cui caratteristica peculiare e coerentemente unitaria appare insidiata dalla proliferazione di idee confuse, di vedute settoriali, di tecniche artificiose. (Come, ad es., le regolette e i test per i quali Irving Good ha coniato l'indovinata denominazione di 'Adhockeries', che ho tradotto in italiano con 'Adhoccaggini', cioè *espedienti empirici* 'ad hoc').

Per fare ragionamenti validi occorre seguire una via diametralmente opposta: occorre seguire l'esempio efficacemente descritto in una frase che – fin da quando mi capitò di leggerla (ragazzo o poco più) – mi è sempre rimasta impressa come 'memento!', come norma da doversi seguire e da raccomandare a tutti di seguire. Eccola:

«*A lui premeva insegnare con quali cautele e quali accorgimenti si possa giungere a formulare delle proposizioni che abbiano un senso*».

Questa citazione è presa da Giovanni Papini (*Stroncature*, n. 14), e si riferisce a Mario Calderoni che – assieme a Giovanni Vailati – fu uno dei pochi coraggiosi assertori del pragmatismo nell'Italia di fine '800 inizio '900. Formulare *proposizioni 'che abbiano un senso'*, evitando di cadere nei 'cento modi di non dir niente' tanto cari ai retori e agli imbroglioni ([2]), è cosa particolarmente difficile – come ben sapeva Calderoni – ma è anche cosa *inusitata*, e soprattutto è cosa *irritante* per i sedicenti bempensanti che, nella loro smisurata faciloneria, pretendono abbia senso ogni loro sproloquio (e spesso accettano di ammettere, per reciprocità, che abbia senso anche qualche sproloquio altrui).

Concorre però, nel confondere le lingue e le idee, quella 'tirannia del linguaggio' che è stata denunciata da Harold Jeffreys con la sua acuta osservazione, che «*il linguaggio è stato creato da realisti, e per di più da realisti molto primitivi*» per cui «*noi abbiamo larghissime possibilità di descrivere le proprietà attribuite agli oggetti, ma scarsissime di descrivere quelle direttamente conosciute come sensazioni*» ([3]).

E sarebbe perciò che anche la nozione di probabilità, anziché venire considerata e studiata come tale cercando di perfezionarne la comprensione e l'impiego, viene spesso esteriorizzata, ritenendola concepibile solo se raffigurata – se non si può proprio come 'oggetto'! – per lo meno come un 'qualcosa' (chissacosa?!) di esistente fuori di noi, un qualcosa che 'agisce' sul mondo esterno secondo 'leggi' sue proprie, 'leggi' che governerebbero i fatti che non seguono 'leggi' (nel senso proprio, deterministico) con un surrogato di 'leggi' che non sono 'leggi'.

Da questi 'puzzle' deriva (ed è naturale!) la pressoché generale incomprensione del ragionamento probabilistico, invischiato come viene invischiato in un intrico di frasi fatte, di sofismi inveterati, di ambiguità deleterie che ne ostacolano lo smascheramento.

Del resto, che tale compito – di dissipare le oscurità e le nebbie metafisiche – sia particolarmente difficile nel campo delle probabilità, lo dimostra vividamente una frase ormai famosa – e per di più incontestabile – di Garrett Birkhoff (*Lattice Theory*):

«*Tutti parlano di probabilità, ma nessuno riesce a spiegare cosa intenda per probabilità in modo che riesca accettabile dagli altri*».

Gli è che esiste, purtroppo, qualcosa di peggio della *non-conoscenza* di un concetto, del significato di una parola in una data e necessaria terminologia: è la *pseudoconoscenza* di un qualche '*press'a-poco-significato*'.

Avviene purtroppo, infatti, che, sentendo ripetere una stessa parola (più o meno misteriosa o comunque per lui nuova) nel contesto di varie frasi di cui pensa di intuire grosso modo il senso, uno finisca per associarvi un qualche 'press'a-poco-significato' che però si sbriciola in mille controsensi se si tenta di precisarlo.

È a questo guaio – suppongo – che voleva alludere Goethe quando scrisse i due notissimi versi:

«*Gewohnlich glaubt der Mensch, wenn er nur Worte hört,*
es müsse sich dabei auch etwas denken lassen».

(In genere, l'uomo, mentre ascolta soltanto parole, ritiene vi sia sotto anche qualcosa da dover pensare.)

D'altronde, una parola, di per sé, non ha un 'senso': lo ha (od acquista) soltanto collocandola (come tessera in un mosaico) in un contesto che abbia senso, in una frase o asserzione di cui si sappia cosa concretamente significhi il dire che è *vera* oppure che è *falsa*.

Pensare alla Probabilità (con la P maiuscola) come ad una entità metafisica esistente in astratto equivarrebbe a ritener possibile (senza essere Alice nel Paese delle meraviglie) che 'il sorriso di un gatto' possa permanere e continuare ad esser visibile dopo che il gatto se ne è andato via. Contro ogni concezione della probabilità in questo senso assoluto, ho espresso drasticamente il mio diniego (nella prefazione all'edizione inglese del mio trattato) premettendo come motto: «PROBABILITY DOES NOT EXIST», intendendo dire che la probabilità non 'esiste' di per sé, al di fuori delle valutazioni che ne facciamo con la mente o d'istinto. Conseguentemente, non avrebbe senso chiederci 'cosa *sia* la probabilità', ma dovremmo meditare introspettivamente per chiarirci in quali casi e in quale senso la pensiamo, la valutiamo, ci ragioniamo sopra, e la troviamo strumento idoneo, guida preziosa, per *pensare* e per *agire* in *condizioni di incertezza* ([4]).

È pero necessario, evidentemente, illustrare le ragioni di questo diniego, tanto più che è in contrasto con vedute largamente ed anche autorevolmente accettate e sostenute.

III. – L'incertezza: di chi e su che cosa?

Per avviare tale discussione occorre risalire più 'a monte' della consueta controversia tra concezione oggettivista e soggettivista della probabilità, chiedendoci come vada inteso e delimitato il campo dei fatti (o delle situazioni o delle asserzioni o come altro si voglia dire), nel quale si possa o si debba (secondo i vari punti di vista) parlare di *incertezza* (e quindi di probabilità).

Un'*asserzione*, o *proposizione*, (od '*evento*', per entrare nel linguaggio probabilistico) è tale se esprime qualcosa di suscettibile solo di due alternative: o *vero* o *falso*, o SI o NO (di per sé: «tertium non datur»); non è detto però che si *sappia* (con certezza) la risposta, ed allora i casi sono (almeno provvisoriamente) tre: *certo*, *impossibile*, *incerto*, a seconda che sappiamo la risposta esatta (SI o NO) o altrimenti si rimanga nel NON-SO.

(Può anche avvenire, ovviamente, che per false informazioni o per errore della memoria o di ragionamento uno sia 'certo' del SI mentre è NO, o viceversa. Ciò va tenuto presente, ma esula dalla teoria delle probabilità o vi si può forse includere come caso marginale e degenere.)

Il caso intermedio, quello dell'*incertezza*, è il solo che richiede – o almeno consente – considerazioni di probabilità, e in senso *relativo* allo stato delle conoscenze. Al di fuori di esso non si ha che la logica del certo, ma anche in essa è tuttavia utile indicare con 1 e 0 i 'valori di verità' *vero* o *falso*. Come ho abbondantemente illustrato, ciò consente infatti di aritmetizzare – e, più specificatamente, di linearizzare – l'algebra di Boole; si tratta in fondo di rendere più esteso e sistematico l'uso di utili convenzioni largamente usate da Marshall Stone. Benché ciò giovi soprattutto nel calcolo delle probabilità (dato che la probabilità, e, più in generale, la '*previsione*' – o 'speranza matematica' – è additiva) ritengo che tale algoritmo (che non esclude, anzi si combina ottimamente, anche con quello booleano) meriterebbe di essere conosciuto e applicato anche dai cultori di logica e di automatica, dato che consente anche di operare congiuntamente su eventi e numeri aleatori (o 'incognite'). Si tratta di operare usando in modo congiunto le operazioni: $+$ (somma); $-$ (differenza); $\times$ (prodotto; spesso sottinteso o con $\cdot$); $\sim$ (tilde) (complemento ad 1, ossia negazione); $\wedge$ (inf.) e $\vee$ (sup.). [Cfr. TdP, pp. 46-50; qualche esempio:

$$\mathrm{E}_1 \vee \mathrm{E}_2 = \sim (\widetilde{E}_1 \wedge \widetilde{E}_2) \;= 1 - (1 - \mathrm{E}_1)(1 - \mathrm{E}_2) = \mathrm{E}_1 + \mathrm{E}_2 - \mathrm{E}_1\mathrm{E}_2$$

e anal. per 3 o più eventi;

$$\mathrm{P}\,(\sim \mathrm{E}) = \mathrm{P}\,(1 - \mathrm{E}) = 1 - \mathrm{P}\,(\mathrm{E}), \text{ ecc.}].$$

Riprendendo l'argomento dell'*incertezza*, occorre però porre attenzione alla diversità di interpretazioni in cui essa può essere intesa a seconda di preconcetti filosofici o di atteggiamenti più o meno indecifrabili ([5]).

Nel senso più stretto – *personalistico* – l'incertezza su di un evento cessa, per un dato individuo, soltanto quando egli ne riceve notizie sicure (salvo smentita ... e allora fino alla notizia buona); comunque, è *fino ad allora* che, in base alla residua incertezza, momento per momento, egli vi attribuirà una certa probabilità. Anzi, poiché la memoria non è indelebile, l'incertezza potrà riapparire appena la notizia *sarà dimenticata* o sarà divenuta confusa od incerta.

In un senso intermedio – *empiristico* – si potrebbe dire invece che l'incertezza cessa ('oggettivamente') al momento in cui il *fatto* in questione si avvera nel modo asserito oppure altrimenti; ed è sino ad allora, secondo tale punto di vista, che chiunque potrà attribuirgli la probabilità corrispondente al proprio giudizio.

In senso meno stretto ancora – *deterministico* – l'incertezza non esisterebbe mai o comunque cesserebbe già dal momento in cui l'evento risulti 'determinato' nel senso che il fenomeno da cui esso dipende si svolge secondo supposte leggi strettamente deterministiche senza possibilità di influssi perturbatori di altro tipo (ad es., umano).

IV. – Superamento degli equivoci

Per il superamento di tali equivoci e dei dubbi che essi non cessano dall'ingenerare, basterebbe citare la seguente osservazione di Borel: «*Si può scommettere, a testa o croce, mentre la moneta, già lanciata, è in aria, e il suo movimento è perfettamente determinato, e si può anche scommettere dopo che è caduta, sotto la sola condizione di non vedere su quale faccia riposi*».

L'esempio, di per sé, è banale, ma le conclusioni che vi sono implicite hanno una portata chiarificatrice decisiva.

Il poter parlare di probabilità riguardo a un certo evento non dipende dall'esistenza di una (comunque concepita) 'incertezza oggettiva' (o 'incertezza in sé, come forse avrebbe potuto dire Kant ([6])) riguardo al suo verificarsi (o 'essersi verificato') – dall'idea che il suo verificarsi sia legato all'intervento della Dea Fortuna, o di un mitizzato Caso (magari 'Dio Caso' ([7])) – o (con una locuzione non meno infelice, benché di moda) di una quasi personificata Natura, magari da una volontà 'divina' oppure 'diabolica', o infine da una qualche specie di 'Determinismo Scientifico' di stampo ottocentesco, od altro.

Ma, cosa comporta l'eventuale accettazione di questa o quella veduta (o 'frase') per chi abbia a valutare la probabilità di un fatto che gli interessa (che, ad esempio, influisca sul risultato di sue eventuali decisioni)? A prescindere da possibili atteggiamenti superstiziosi e conseguenti consultazioni di maghi o fattucchiere, tutto ciò non potrà influire sulla sua valutazione delle probabilità altro che soggettivamente (così come ogni altro elemento ed aspetto della personalità di ciascuno), a seconda che sia più o meno consapevole (o invece addirittura contesti) che la sua scelta, comunque venga fatta (con criteri di apparenza oggettiva oppure no), sia soggettiva. Ma tutto ciò non altera minimamente il fatto che tale essa *è*. Si potrebbe perfino ammettere (se c'è qualcuno cui ciò non appare stravagante e futile) che il 'determinismo' attribuito da Borel alla moneta che è in aria cominci ben prima «*pur di misurare esattamente lo stato dei muscoli di Caio mentre si accinge a lanciarla*». Così dice infatti Hans Reichenbach ([8]) pur aggiungendo che «*noi non potremmo farlo: lo potrebbe solo il superuomo di Laplace*». Comunque, egli avrebbe potuto dire, con la stessa certezza dell'impossibilità di smentita, che il superuomo di Laplace (*se* 'esistesse') potrebbe conoscere esattamente tutto il futuro («*non cadrà foglia che lui non sappia fin da sempre*»). Fortunatamente, il ragionamento probabilistico serve in casi molto più banali e perciò seri.

La precedente osservazione di Borel contiene già di per sé una conclusione molto più generale e radicale. Non solo risulta irrilevante il carattere suppostamente deterministico o suppostamente indeterministico del fatto che si considera – del fatto su cui (per esempio) accettiamo di scommettere – ma anche (a tale riguardo) la stessa distinzione tra passato e futuro, tra cose tuttora 'incerte' (nel senso 'fattuale', di 'non ancora avvenute') o 'certe' (purché non ne sia conosciuto l'esito). Come disse (se non confondo) Poincaré, «*la probabilità dipende in parte dalla nostra conoscenza e in parte dalla nostra ignoranza: da ciò che sappiamo e da ciò che non sappiamo*». Non solo si può scommettere, pur di ignorarne l'esito (e purché neppure il competitore lo conosca) sull'esito di testa e croce in un lancio già effettuato (o su un'estrazione del Lotto di 20 anni fa, o sul risultato di Roma-Lazio nel campionato 1929-30), ma, sotto la stessa condizione, su qualunque altra cosa 'certa'. Ad es., sul valore della 50.000-esima cifra decimale di π (già calcolata e pubblicata: vedi le tabelle di Shanks e Wrench che vanno fino alla 100.000-esima, in *Mathematics of Computation*, 1962), o su quello della milionesima (non conosciuta, e forse dagli uomini mai, ma determinata dal punto di vista matematico). Si obbietterà che praticamente è certo che la scommessa rimarrebbe indecisa, ma ciò può avvenire sempre, non fosse che per incidenti fortuiti, qualunque ne sia l'oggetto.

V. – La probabilità: chi è costei? E di che cosa?

Era inevitabile che il termine *probabilità* fosse usato anche nelle considerazioni finora premesse, benché preliminari alle argomentazioni intese a precisarne il significato e con ciò a darle diritto di esistenza in un linguaggio non ambiguo.

Non potevamo, né tuttavia possiamo, chiederci ex abrupto «che cosa *sia* la probabilità», impelagandoci in metafisicherie, ma dobbiamo invece far emergere il significato di 'probabilità' esaminando e discutendo in quale senso ne parliamo (e la valutiamo) nei contesti appropriati e per noi significativi.

Anziché chiederci «cosa sia la probabilità» dovremo esaminare il significato implicito nell'uso che s'intende farne, e porci, a tale scopo, le tre seguenti domande:

– «probabilità di che cosa?», e qui tutti risponderanno «di un *evento*»; e poi
– «sotto quali circostanze?», ed è naturale rispondere «tenendo conto di tutte le circostanze rilevanti note al momento»; ed infine
– «valutate da chi?», e non si può che rispondere «dal soggetto che le considera»; eventualmente, ciascuno potrà rispondere «da me».

Queste tre risposte sono quelle che darebbe un soggettivista, quale io sono, ma appunto perciò non pretendo, né minimamente desidero, di chiudere la questione con risposte apodittiche di tale genere. Esse servono solo per prefigurare l'iter della discussione in cui le varie possibili posizioni andranno messe a confronto.

L'unanimità nel rispondere che la probabilità si riferisce agli '*eventi*' giova ben poco, anzi nulla, perché è proprio dalle difformità di consuetudini e di interpretazioni nel concepire e nell'usare il termine 'evento' che scaturiscono e si perpetuano, inevitabilmente, insanabili oscurità e confusioni riguardo al concetto di probabilità.

Prescindendo da sfumature più o meno secondarie, le interpretazioni da distinguere sono sostanzialmente due, a seconda che il termine 'evento' venga rispettivamente inteso in senso *specifico* o in senso *generico*.

Nel primo caso, dicendo ‘evento’ s’intende alludere a un certo risultato in un caso singolo ben determinato: un *evento* è, cioè, un’asserzione tale che, stipulando su di essa una scommessa, risulti poi in modo incontestabile se l’evento è *vero* o *falso* (*si è* verificato o *non si è* verificato), e quindi *se la scommessa è vinta o persa*.

Ad esempio, *sono eventi* le proposizioni seguenti:

«Pareggio tra Juventus e Torino domenica prossima (5-12-1976)»,
«Uscita del 13 alla ruota di Roma sabato prossimo (4-12-1976)»,
«Morte entro il 1977 dell’assicurato 49-enne sig. X.Y.», ecc.

E in tal modo tutto è ben chiaro, privo di ambiguità.

Nel secondo caso tutto invece è ambiguo e confuso. Infatti, il termine ‘evento’ viene allora usato in senso ‘collettivo’ per indicare indiscriminatamente uno qualunque tra molti o infiniti possibili ‘*eventi nel primo senso*’ più o meno ‘analoghi’, che vengono chiamati ‘*prove*’ di un certo ‘*evento nel secondo senso*’ (cioè ‘evento’ nel senso *generico*). Ad esempio: «Pareggio in una (non specificata) partita del campionato italiano di calcio 1976-77, Serie A»; «Uscita del 13 in una generica estrazione e in una qualunque data ruota»; «Morte entro il 1977 di un 49-enne» ([9]).

VI. – Bandire terminologie ambigue

È perfettamente innocuo, e può anche spesso esser utile, introdurre una designazione collettiva per indicare genericamente degli eventi che hanno in comune certe caratteristiche descrittive (come negli esempi ora indicati), ma a condizione di porre tutta la cura necessaria per evitare quei fraintendimenti nominalistici che imponessero o suggerissero, per il solo fatto del raggruppamento sotto uno stesso nome, di attribuire loro qualche altra cosa di comune in più: in particolare, per quanto riguarda il nostro tema, uguali probabilità od altre circostanze (ad es. ‘indipendenza (stocastica)’, cfr. n. 8) ad essa collegate, proprietà che andranno invece *espressamente specificate* caso per caso.

Per tale motivo, dovendo o volendo esprimere queste stesse circostanze con termini *innocui* (non forvianti, non implicanti il rischio di ingenerare confusioni del genere) si potrà dire ad esempio (come ho proposto e faccio) che certi *eventi* (sempre nel senso di ‘eventi singoli’!) sono ‘*prove di un medesimo fenomeno*’.

La distinzione può forse, a prima vista, sembrare si riduca a una questione di parole (‘di lana caprina’), ma così non è. Non lo è perché la differenza tra le due locuzioni sta nelle implicazioni, palesi od occulte, che nelle due frasi *ci sono* o *non ci sono*.

Giova forse premettere un'analogia: dicendo «animali di una stessa *specie*» devo intendere 'specie' nel senso dei naturalisti; dicendoli «di uno stesso *insieme*» posso riferirmi all'insieme di quelli che vivono oggi nello Zoo di Amburgo, o di quelli di colore grigio, o quel che altro sia, volta per volta. Le implicazioni che *ci sono* o *non ci sono*, nel nostro caso, a seconda della locuzione usata, sono di tipo analogo. 'Ci sono' quando uno dice «prove di un medesimo evento», perché, secondo l'uso corrente, dicendo così si sottintende in generale che tali 'prove' si debbano automaticamente e acriticamente considerare come *ugualmente probabili*, e spesso (peggio ancora) anche *indipendenti*, o, per dir meglio, *stocasticamente indipendenti* ([10]) col rischio di giungere – quasi, o anche senza quasi – a confondere o perfino identificare (!) la probabilità con la frequenza. Ed è fatale lo smarrirsi irrimediabilmente nel labirinto in cui ci si va a cacciare quando si giunge a travisare e banalizzare in tal modo la ricca rete di significative ma delicate relazioni che sussistono in entrambi i sensi tra probabilità e frequenza: da un lato, tra probabilità valutate e previsioni circa le frequenze future, e, nel verso opposto, tra osservazione di frequenze ed eventuale conseguente adeguamento delle valutazioni di probabilità per prove future. Chi dice «prove di un medesimo fenomeno » sa invece di alludere a qualche mera circostanza esteriore, magari alla semplice comunanza di denominazione, che può rendere più o meno espressiva o comoda la formulazione di esempi, più o meno specifici i riferimenti ad applicazioni pratiche, ma che è del tutto irrilevante riguardo alla trattazione probabilistica. Cosicché, allora, di implicazioni occulte *non ce ne sono*.

La tabellina che segue schematizza ed evidenzia il raffronto, chiarendo le sostanziali differenze fra le due terminologie.

Terminologia	*Oggettivista*	*Soggettivista*
nome per caso singolo	prova di un evento	evento (prova di un fenomeno)
id. in senso collettivo	evento	fenomeno
AMBIGUITÀ?	SI	NO

Ma basta, a questo punto, introdurre la nozione di 'scambiabilità' (menzionata fin dai cenni all'inizio) per ritrovare *in versione corretta*, ineccepibile, quelle conclusioni che l'uso di locuzioni inappropriate impediva non solo di raggiungere ma financo di esprimere. Infatti, nel gergo oggettivista, 'eventi *scambiabili*' si tradurrebbe in 'eventi ugualmente probabili e indipendenti ... con *probabilità incognita*' (dove, grazie all'ultima precisazione, risulta in definitiva che *la probabilità varia* e *non c'è indipendenza*!).

Prima di proseguire in tale lavoro di ricostruzione, dobbiamo però rispondere (non dimentichiamolo) alle due domande residue.

VII. – Probabilità: suo carattere 'relativo'

Eliminata la principale causa di confusione, derivante dal pensare di dover attribuire una data probabilità non ad ogni singolo evento ma a collezioni di eventi – collezioni finite, o spesso addirittura infinite, o peggio ancora, infilzate in una immaginaria successione numerabile ('Kollektiv' di von Mises) ([11]) – passiamo ad esaminare le altre domande, seconda e terza. La domanda «sotto quali circostanze», e la risposta (inoppugnabile) «tutte le circostanze rilevanti note al momento», mostra che la valutazione di probabilità non solo si deve riferire ad *un* evento (in senso *specifico*), ma dipende anche dall'insieme variabile di circostanze ritenute rilevanti rispetto al suo verificarsi, note al momento (ed, in genere, varianti di momento in momento).

In altri termini, e più precisamente, essa varia col nostro *stato d'informazione*, continuamente suscettibile di arricchirsi col flusso di nuove informazioni, e fornito – tra l'altro – dai risultati via via appresi od osservati riguardo a casi e situazioni più o meno simili.

In particolare, nel caso di osservazioni di 'casi simili', si suole dire, nei linguaggi criticati, che la probabilità *è* la frequenza osservata (o che questa è «quasi certamente prossima alla ... », o «è una buona stima della ... », ecc.). Qualcosa di valido c'è, se non in tali frasi, nell'idea sottostante, anche se le frasi sono inficiate dai controsensi connaturati ad ogni contraffazione oggettivista di affermazioni probabilistiche. Le stesse conclusioni, tradotte in forma soggettiva e basate sulla scambiabilità, che è la traduzione in forma soggettiva della fasulla 'indipendenza ed equi-probabilità', danno la naturale soluzione della 'vexata quaestio'.

Il ragionamento completo e fondato si basa (prescindendo dalle particolarità dello specifico caso od esempio) sul *teorema di Bayes*, fondamento dell'*induzione bayesiana* (o addirittura, come spesso si dice, della *statistica bayesiana*). E preferisco anticipare fin d'ora il perché della mia avversione a questo termine: non per insufficiente adesione alla posizione di Bayes, bensì perché è l'unica *corretta*. Chi usa dire «INDUZIONE BAYESIANA» dovrebbe dire, secondo me, per coerenza, «ARITMETICA PITAGORICA» quella che accetta, per eseguire un prodotto, di rispettare la tradizionale TAVOLA PITAGORICA ammettendo che 6 per 8 faccia 48, che 3 per 9 faccia 27, ecc. (mentre altri, secondo qualche nuova moda, potrebbero preferire che 6 per 8 faccia 90 e 3 per 9 faccia 77).

Per limitarci, in un primo momento, a chiarire in che modo ogni nuova informazione modifica le nostre valutazioni di probabilità, riferiamoci alle famose 'patate' di Eulero-Venn (assai utili, pur di non abusarne come vorrebbero certe 'mode') ([12]).

Pensiamo, per rendere la spiegazione più concretamente intuitiva, a un tabellone contro cui viene scoccata una freccia, e il '*successo*' consista nel colpire un punto entro la zona E (patata tratteggiata). Per comodità supponiamo uniforme la densità di probabilità, nel senso che aree uguali abbiano probabilità uguali. (Ciò non toglie nulla alla generalità delle conclusioni, ma è più concreto dire *area*, beninteso, prendendo come unità l'area del tabellone.) $P(E)$ è dunque l'area della zona E tratteggiata. Però, abbiamo anche delimitato altre regioni ('patate') indicate con H_1, H_2, ecc.; se veniamo informati che la freccia ha colpito un punto della regione H_1 (p. es.), non attribuiremo più al 'successo' la probabilità $P(E)$ bensì la probabilità $P(E|H_1)=P(EH_1)/P(H_1)$: rapporto tra l'area di H_1 contenuta in E e l'area totale di H_1. Se poi sapessimo che la freccia ha *anche* colpito, p. es., la regione H_3 (e pertanto la zona intersezione H_1H_3) la probabilità diverrebbe

$$P(E|H_1H_3) = P(EH_1H_3) / P(H_1H_3), \text{ ecc.}$$

È questo il senso (o la traduzione formale del senso già detto a suo tempo) in cui la probabilità è *relativa*: relativa allo stato d'informazione *attuale* (momento per momento), che costituisce un evento H.

Parlando della 'probabilità di E' (senza altre specificazioni), e indicandola (tout-court) con $P(E)$, va sottinteso (si badi bene!) che ci riferiamo, nel valutarla, al nostro attuale stato di *conoscenze*. Per essere espliciti, dovremmo indicarlo ad es. con H_0 e scrivere $P(E|H_0)$, così come, in generale, si indicherebbe con $P(E|H)$ la probabilità *subordinata*, o *condizionale*, all'evento (o condizione, o 'ipotesi') H.

Anche qui, con H si indica in genere (esplicitamente) solo l'eventuale ipotesi aggiuntiva (rispetto all'H_0 già supposto) scrivendo $\mathrm{P}(E|H)$ anziché $P(E|H \cdot H_0)$. (Ma, si badi, H_0 è *sottinteso*, non soppresso!)

Riferendoci alle 'patate', ciò significa che l'intero 'tabellone' era già la 'patata' che raccoglie soltanto i casi possibili al momento in cui ci si pone: in un istante anteriore sarebbe stato esso stesso una patata di un tabellone più grande (inclusi cioè i casi già nel frattempo esclusi per informazioni sopraggiunte).

In termini di scommesse (*i soli realmente e realisticamente significativi*) la probabilità P $(E\,|\,H)$ è il *prezzo* p da pagare per una scommessa che viene

$$\textit{annullata}\quad \left\{\begin{array}{l}\text{viene pagato } p\\ \text{(restituzione)}\end{array}\right. \quad \left(\begin{array}{c}\text{guadagno}\\ =0\end{array}\right) \quad \begin{array}{l}\text{se } H \text{ non si}\\ \text{verifica}\end{array} \qquad \begin{array}{l}\text{(di } E \text{ non}\\ \text{importa)}\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{lll}\textit{vinta} & \text{viene pagato 1} & (=1-p)\\ \textit{persa} & \text{viene pagato 0} & (=\ \ -p)\end{array}\right\} \quad \begin{array}{l}\text{se } H \text{ si}\\ \text{verifica}\end{array} \quad \text{ed } E \left\{\begin{array}{l}\text{si verifica}\\ \text{non si verifica}\end{array}\right.$$

È questa la base e la giustificazione del ragionamento induttivo: al variare dell'informazione: $H_0, H_1, H_2, \ldots, H_n, \ldots$ sempre più restrittive (quelle che, nei commenti alle patate, avevamo indicato H_1, H_1H_2, $H_1H_2H_3$, ecc., perché visualizzate come successive intersezioni, ma ciò è inessenziale) la probabilità diventa via via

$$P\,(E\,|\,H_k) = P\,(E\,H_k)\,/\,P\,(H_k) \text{ con } k = 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots \text{ ecc.}$$

Il caso più classico e semplice è quello di Bayes-Laplace, che corrisponde ad una mistura uniforme per le probabilità tra 0 ed 1; in versione approssimata, estrazioni con reimbussolamento da un'urna contenente un grande numero N di palline bianche e nere con uguali probabilità, $1\,/\,(N+1)$, per le $N+1$ 'ipotesi' che le nere siano $0, 1, 2, 3, \ldots, N-1, N$. Dopo n estrazioni di cui h di pallina nera, la probabilità di pallina nera, per una qualunque 'prova' successiva (a quel momento, con quella informazione) è $p = (h+1)\,/\,(n+2)$ ('regola di successione' di Laplace): quella ridicolizzata da avversari applicandola alla 'probabilità che il sole sorga domani'.

Più interessante è notare l'identità di valutazioni tra questo caso ed un altro che, *oggettivamente*, appare del tutto diverso: quello dello 'schema di Pólya'. Si comincia con nell'urna due palline, una bianca e una nera, e si fanno successive estrazioni reimbussolando ogni volta la pallina estratta *ed un'altra dello stesso colore*. È chiaro che, dopo n estrazioni di cui h di palline nere, nell'urna ci sono $n+2$ palline di cui $h+1$ nere, e la probabilità della successiva estrazione è di nuovo

$$(h+1)\,/\,(n+2).$$

Aritmeticamente, la conclusione è identica. Ma con la differenza che qui corrisponde alla effettiva composizione attuale, mentre nell'altro caso non varia la composizione bensì la valutazione di essa basata probabilisticamente sul risultato osservato.

VIII. – Indipendenza – Scambiabilità

Ora, prima di passare al terzo ed ultimo punto (sulla soggettività), conviene fare una digressione con alcune osservazioni.

Va notato anzitutto che il carattere *relativo* delle probabilità non viene in genere sottolineato come fatto generale: forse talvolta è sottinteso, ma in genere sembra non venga neppure rilevato e comunque non sembrano adeguatamente curate le conseguenti necessarie raccomandazioni (fosse pure col segnale stradale di 'PERICOLO' messo in margine alla pagina, 'alla Bourbaki').

Basta anche un solo esempio semplice e significativo per far vedere come l'incertezza possa esistere per gli interessati anche solo per l'incompletezza dell'informazione disponibile per ciascuno di essi, mentre l'evento (nella fattispecie, la vittoria di uno di essi) è certo, e tale risulterebbe se solo si scambiassero le informazioni in possesso di ciascuno.

Si pensi al sorteggio di un premio fra tre individui, effettuato facendo estrarre da ciascuno un numero della tombola (senza reimbussolamento) e stabilendo che vinca chi estrae il numero più alto.

Finché ciascuno conosce solo il proprio numero, sia m, valuterà a $p_m = K(m-1)\ (m-2)\ (K = 2/(88.89))$ la propria probabilità di essere il vincitore ed a $(1-p_m)\ /\ 2$ quella di ciascuno degli altri due (solo per $m = 90$ o 1 o 2 egli è certo di aver vinto o non aver vinto). Si tratta anzi di una di quelle probabilità di tipo classico che gli oggettivisti direbbero addirittura 'oggettiva'.

Se due si scambiano l'informazione, colui che ha il numero più basso sa di aver perso e per l'altro la probabilità sale ad $(m-2)/88$; se si scambiano l'informazione tutti e tre il vincitore è individuato. Risulta in tal modo evidente l'infondatezza dell'idea che fa dipendere (o almeno induce a far credere che si possa far dipendere) la probabilità da una (per così dire) 'incertezza in sé' del fatto che si considera (o, non c'è differenza, di 'incertezza della Natura' riguardo ad esso). Né basterebbe, per sanare paradossi di tale specie, ammettere che tali valutazioni venissero modificate soggettivamente (anzi, se per caso esse sanassero l'apparente paradosso, sarebbero più assurde che mai, perché valutazioni basate su informazioni diverse non possono comportarsi nel modo che sarebbe esatto se si basassero su informazioni identiche).

Spesso, per tale equivoco – e specialmente nelle temerarie impostazioni *assiomatich*e – si dà l'impressione che con la $P(E)$ si possa sistemare tutto, e $P(E|H)$ sia qualcosa di accessorio, definibile come

$P(EH)/P(H)$. Peggio ancora, l'impiego esclusivo della $P(E)$ può far cadere nell'abbaglio oggettivistico nella forma più piatta, e cioè far considerare la probabilità $P(E)$ dell'evento E come una grandezza oggettiva che rimanga indissolubilmente attaccata all'evento E (anziché variare al variare del sottinteso – ma giammai ignorabile o sopprimibile – stato d'informazione espresso dalla 'ipotesi' H).

Più gravi sono, comunque, i riflessi di ciò sulla comprensione della nozione di indipendenza (stocastica). Scrivendola

$$P(E_1E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2)$$

(sottintendendo, come è lecito ma pericoloso, l'H_0) può nascere la convinzione (o magari apparire cosa ovvia) che la nozione di indipendenza abbia un significato assoluto anziché *relativo* a questo o quello stato d'informazione H, e che pertanto la relazione precedente implichi anche

$$P(E_1E_2|H) = P(E_1|H) \cdot P(E_2|H) \text{ qualunque sia } H.$$

O almeno potrebbe sembrare 'corretto' (come, grammaticalmente, purtroppo sembrerebbe) che se due eventi E_1 e E_2 sono indipendenti sotto ciascuna delle ipotesi disgiunte e esaustive (cioè: formanti una partizione) $H_1, H_2, ..., H_n$, sono anche 'indipendenti' tout-court.

Così però non è, e bastano facili esempi per dimostrarlo.

Estrazioni con reimbussolamento da un'urna di composizione nota (p. es. 7 palline bianche e 3 nere) sono stocasticamente indipendenti; ma se invece la composizione non è nota (se sappiamo ad es. che sono 7 di un colore e 3 dell'altro, e diamo la stessa probabilità, ½, alle due ipotesi che siano 7 le bianche o le nere), è chiaro che ogni informazione sul risultato di una nuova estrazione ci fa accrescere la probabilità attribuita alla composizione del colore di quella estratta (e, man mano, si avvantaggerà il colore estratto con maggiore frequenza). E quindi l'*indipendenza non sussiste*: la traduzione corretta del nonsenso 'probabilità costante ma incognita' è data dalla nozione di *scambiabilità*. In tali casi le successive estrazioni sono (non indipendenti, ma) *scambiabili*, nel senso che la probabilità non varia per permutazioni. Ad es., ogni successione di 9 estrazioni (ad es. di 5 bianche e 4 nere) ha la stessa probabilità (invarianza rispetto alle permutazioni). Ad es.:

$$P(N\text{-}B\text{-}N\text{-}B\text{-}B\text{-}B\text{-}N\text{-}N\text{-}B) = P(B\text{-}B\text{-}B\text{-}N\text{-}B\text{-}N\text{-}N\text{-}B\text{-}N) = \text{ecc.}$$

$$\text{(per ognuna delle } (4)_9 = 126 \text{ permutazioni).}$$

Ed è appunto tale *non-indipendenza* che consente quella valutazione della probabilità per casi futuri che si basa sulla frequenza nei casi osservati, in condizioni dette usualmente, ma impropriamente, di 'equiprobabilità e indipendenza' (il che rende manifestamente contraddittoria la conclusione). La condizione che traduce in forma sensata il predetto nonsenso è appunto quella di 'scambiabilità': una proprietà che si conserva per *misture* (cioè per combinazioni lineari a coefficienti positivi), valida per eventi indipendenti ugualmente probabili, e quindi per loro misture; risulta anzi che la scambiabilità vale per tutte e sole le misture del tipo detto. Si tratta pertanto del modo corretto di esprimere ciò che assurdamente si diceva 'prove indipendenti ugualmente probabili'.

Senza entrare nella parte tecnica – fuori luogo in questa sede – indichiamo solo il risultato: ogni mistura di 'prove ripetute' con 'probabilità costante ma incognita' (come si direbbe in modo improprio ma tradizionale e perciò 'comprensibile') dà luogo a un processo scambiabile; ed anche *viceversa*: un processo scambiabile è sempre interpretabile come una tale *mistura*.

È questa chiarificazione concettuale, illustrata qui sull'esempio più banale ma estensibile ed estesa a casi molteplici e complessi, la cosa cui tengo (modestia a parte) perché contribuisce a dissipare i concetti (o almeno le terminologie) di sapore superstizioso, di pretesa metafisica, di espressione contraddittoria. Anche se, per coloro che sono più accentuatamente dei 'matematici' (per cui la matematica è *scopo*, non *strumento*) conta più il risultato analitico che hanno battezzato «*de Finetti's representation theorem*».

IX. – Probabilità: suo carattere 'soggettivo'

Come ultimo passo, come ultimo anello della catena di osservazioni che hanno via via escluso interpretazioni mistificatorie della nozione di probabilità, dovremmo aggiungere altre osservazioni per dimostrare il carattere fondamentalmente e necessariamente *soggettivo* della probabilità. Ma si tratta ormai quasi solo di sfondare una porta aperta, perché una probabilità riguardante *eventi* nel senso di 'eventi singoli' e dipendente dallo stato d'informazione del soggetto che la valuta, è già sostanzialmente 'personalizzata'. Resta solo da osservare, in aggiunta, che una componente 'personale' sarà certo presente per differenziare più o meno valutazioni – anche fatte in base ad uno stato d'informazione supposto identico – da individui differenti che porranno maggiore attenzione o attribuiranno maggior peso a certe o certe altre circostanze. Ciò anche prescindendo da fattori di distorsione come la tendenza a valutazioni ottimistiche o pessimistiche (‘*wishful thinking*’ o ‘*painful thinking*’), a reazioni emotive riguardo a dettagli di vario tipo, e via dicendo.

Comunque, sono troppo soggettivista (e pragmatista) per ritenere che valga la pena di farne diatribe metafisico-verbalistiche. Ogni individuo che faccia una valutazione di probabilità *coerente* (nel senso che rammenterò), e voglia dire che essa è ‘oggettivamente esatta’, non fa danno a nessuno: tutti saranno d’accordo che quella è la sua valutazione soggettiva, e la sua affermazione ‘oggettivistica’ sarà un’innocua vanteria a giudizio dei soggettivisti, mentre sarà giudicata vera o falsa dagli oggettivisti che la condividessero o che ne avessero invece una diversa. Questo è un fatto generale, ovvio ma irrilevante: «*Ciascuno a suo modo*».

Rimane però da dire esplicitamente *come* tali probabilità soggettive vengano *definite*, e cioè, volendo dare una definizione *operativa* (non, cioè, una definizione verbalistica e vacua), occorre indicare un procedimento (sia pure idealizzato, ma non svisato) un esperimento (effettivo o concettuale) per la sua *misurazione*.

Non c’è nulla da inventare: basta invertire un asserto che gli oggettivisti esprimono *definendo* scommessa *equa* quella che, per ricevere un importo (positivo o negativo) S se l’evento E di probabilità p risulta vero, richiede il pagamento pS. In questa versione, si pensa definita *prima* la *probabilità*, e si deduce quali scommesse sono *eque*.

Ma è palese che in questo modo si mette ‘il carro avanti ai buoi’: dobbiamo pensare a un individuo che si trovi nella condizione di potere, o meglio *dovere*, stipulare una scommessa sul verificarsi di un certo evento E, e vedere quali scommesse su di E riterrebbe *eque* (cioè: accettabili, a suo giudizio, indifferentemente in entrambi i sensi). Se egli ritiene equo – per S qualunque, positivo o negativo – uno scambio tra un importo certo pS e il diritto ad un importo S subordinatamente al verificarsi dell’evento E, tale coefficiente p si dice probabilità di E (per tale individuo) e si indica $p = P\ (E)$.

Più alla buona, p è il *prezzo* che tale individuo attribuisce ad una Lira condizionata al verificarsi di E; pensando a prezzi, tutto diviene chiaro (addirittura banale).

Il fatto importante da sottolineare è che ciò risponde al fondamentale requisito di una definizione valida di una grandezza avente senso (dal punto di vista metodologico, pragmatista, rigoroso) anziché rimasta al livello di conato verbalistico: non va costruita su più o meno vani o lambiccati giri di parole, ma deve essere *operativa*, cioè basata sull'indicazione degli esperimenti – sia pure esperimenti concettuali – da eseguire per ottenerne la misura.

Ciò si ricollega al cenno su Calderoni e Vailati, nonché alle posizioni al riguardo di Mach, Einstein, Bridgman, ecc. E tutto diventa chiaro: tutte le usuali regole della teoria della probabilità scendono come semplici corollari dalla necessaria additività dei *prezzi*. Per 'biglietti di lotteria' (in senso lato: puntate su fatti qualunque e per importi qualunque) il prezzo si determina come per qualsiasi merce o paniere di merci: $\Sigma_h\, p_h S_h$ è il prezzo per ricevere $\Sigma'_h S_h$ (indicando con Σ' la somma limitata agli eventi *veri*). Più appropriatamente tale somma si potrebbe indicare con $\Sigma_h E_h S_h$, che indica in modo più significativo la stessa cosa, in quanto, come si è convenuto, è $E_h = 1$ oppure $E_h = 0$ a seconda che E_h è *vero* o *falso*. (Incidentalmente, questo è un esempio dell'uso di indicare vero e falso con 1 e 0, e dell'utilità di tale convenzione).

Si mette così in luce il vero e semplice significato di tutte le 'leggi' o 'regole' della teoria delle probabilità: si riducono alla *coerenza* (come *additività*) che è necessaria per i prezzi di oggetti e merci qualsivoglia (biglietti di 'lotteria' compresi). In inglese, una combinazione di scommesse congegnata in modo che qualcuno – approfittando di una qualche incoerenza nelle quote fissate dal Bookmaker – riesca a garantirsi un guadagno *qualunque cosa avvenga*, si chiama 'Dutch Book' (ignoro il perché). Comunque, volendo, si può far uso di questo termine per esprimere la condizione di coerenza che è la sola base di tutta la teoria della probabilità: basta dire che consiste nel *non lasciar adito alla possibilità di un Dutch Book*.

X. – Come 'esplorare' la probabilità

Siamo ora in condizione di rispondere a una questione che si dovrebbe, a rigore, considerare *pregiudiziale*: come si può *conoscere* la probabilità $P_A(E)$ che un certo individuo A (sottinteso: in un dato istante, nel suo attuale stato d'informazione) attribuisce all'evento E?

In generale, egli non saprebbe dirlo (pur se lo volesse, a meno che non si sia impratichito). E neppure, se lo dicesse, saremmo certi della sua sincerità (potrebbe volerci ingannare, o risponderci a vanvera come a scocciatori che gli fanno domande che reputa insulse o indiscrete, ecc.). E neppure avendo notizie di sue sporadiche scommesse si potrebbe ricavarne gran che: potrebbe farle per capriccio, per 'tentare la sorte', senza riflessioni rivelatrici.

Sono, invece, riflessioni rivelatrici (se il soggetto 'sta' al gioco, interessandovisi o sentendosi desideroso di collaborare) delle 'miniscommesse' congegnate in modo appropriato. Lo si invita a indicare la quota p in base alla quale egli sarebbe disposto ad accettare una 'miniscommessa' congegnata nel modo che rende ottima, cioè quanto più possibile vantaggiosa, nel suo giudizio, la risposta sincera, conforme alla sua effettiva valutazione, $p = P\,(E)$.

Precisamente, in base a tale valore p, da lui stesso indicato, egli verrà *penalizzato* di $(1-p)^2\,S$ se si verifica E e di p^2S se si verifica 'non-E'.

In pratica, per non abusare della sua volonterosa collaborazione infliggendogli delle penalizzazioni (in pura perdita), l'importo S potrà venirgli offerto, in modo che perderà solo una parte di esso (cioè: guadagnerà, nei due casi, $[1-(1-p)^2]\,S$ o $[1-p^2]$ S; perderà 'tutto' solo nei casi limite: probabilità (profferita) 0 e l'evento si verifica, o probabilità (profferita) 1 e l'evento non si verifica). Tutta la teoria delle probabilità discende da quest'unica premessa (che *non è un assioma*, non è nulla di artificiale o cervellotico o sublime, bensì una condizione di ovvio buon senso). Questa è, per me, la circostanza più importante e significativa, e tengo a spiegarlo nel modo più esplicito. Chiarire una cosa fino a mostrare che è ovvia può forse sembrare azione dissacrante per chi ama la pompa e la retorica o l'arcano, ma appare invece ai miei occhi come il definitivo raggiungimento di una conclusione nella sua forma ottima. Così e soltanto così si ha una *vera* definizione, non chiacchieroide o metafisicheggiante o astrazionesca, bensì *operativa*, *behaviorista*, *pragmatista*, basata non su pretenziose parole ma su scelte concettualmente (ed effettivamente) sperimentabili.

Quella cui abbiamo accennato è soltanto una (la più semplice e significativa) tra le regole di penalizzazione 'appropriate' nel senso ora detto (chiamato *proper scoring rules*). Conviene però accennare alla dimostrazione ed aggiungere ulteriori considerazioni e notizie.

Si vede subito che, come detto, per l'individuo che fa la valutazione, la cosa migliore sta nell'esprimere sinceramente ed esattamente la propria opinione, perché è così e solo così che *si rende minima* la previsione di penalizzazione (secondo l'apprezzamento di chi condivide quella valutazione, e quindi secondo lui stesso).

Se infatti uno dice di aver scelto la probabilità p, ma in realtà attribuisce alla probabilità un valore diverso, $\bar{p}$, la previsione di penalizzazione è, secondo la sua stessa opinione:

$$\bar{p}(1-p)^2 + (1-\bar{p})p^2 = (p-\bar{p})^2 + \bar{p}\,(1-p) = (p-\bar{p})^2 + \text{cost. (risp. a } p),$$

e diviene minima se e soltanto se $p = \bar{p}$ (cioè se si dà la risposta sincera).

Questa regola (di Brier) è stata ed è applicata negli Usa per l'indicazione delle probabilità di pioggia ecc. – secondo le valutazioni dei meteorologi – nei bollettini pubblicati e diffusi per radio e Tv, nonché (anche da noi, in questa Università, senza sapere di quel precedente) per previsioni probabilistiche sui risultati di calcio (dal 1959).

I primi a proporre tali metodi (precursori per qualche tempo sconosciuti) pare siano stati l'americano McCharty e il giapponese Masanao Toda, negli anni '50. Un pregio peculiare sta nel fatto che le penalizzazioni quadratiche, sommandole, danno sempre una distanza (al quadrato) da minimizzare nello spazio a numero di dimensioni pari al numero dei 'gradi di libertà' (ossia delle valutazioni linearmente indipendenti: qui, due dimensioni per ogni pronostico su una partita). In particolare, ciò risponde anche al significato meccanico del centro di gravità come punto per cui è minimo il momento d'inerzia; ma su ciò non mi dilungo.

Piuttosto mi preme sottolineare l'importanza pratica dell'impiego di tali metodi, in quanto danno il modo di esprimere in forma precisa apprezzamenti che, a parole, sono estremamente ambigui e quindi poco seri e poco utili. Ad es., nelle ricerche petrolifere (come ampiamente esposto in un volume di C. J. Grayson al riguardo) la risposta di un esperto espressa in valutazione di probabilità di esistenza di petrolio in una data località (e nella previsione della quantità eventualmente esistente) riesce assai più utile e seria delle vaghe parole o frasi, qualitative ed elusive, spesso tra il dire e il disdire, di dubbia decifrazione talvolta quasi come gli oracoli della Sibilla. Le risposte in termini di probabilità e previsione possono invece venir prese a base di calcoli preventivi (tenendo anche conto del margine di approssimazione e indeterminatezza che esse comunque non possono non contenere), e rendono più fiduciosa la collaborazione fra imprenditori ed esperti.

A parte l'utilità per tali applicazioni pratiche, l'impiego di tali metodi è però prezioso anche in sé, come fattore dell'affinamento psicologico necessario a tutti – come effettivi o potenziali autori od utenti di valutazioni del genere – per creare l'abitudine *a vedere* la corrispondenza fra grado d'incertezza ed espressione numerica di esso come probabilità.

Un tale allenamento sarebbe, a mio avviso, quanto mai utile in tutte le scuole: sia per tale campo (probabilistico), quanto per affinare le capacità di apprezzamento numerico di grandezze di ogni altro genere, come numerosità di una folla, distanze, aree, durate di tempo, pesi, temperature, velocità, ecc.

Purtroppo, non mi consta che tale fattore educativo venga abbastanza curato e apprezzato. Al riguardo non ricordo infatti (e spero sia per la mia poca memoria) se non due esempi: alcune stime di lunghezze e distanze (con una discussione empirica ma istruttiva sulla distribuzione degli errori) per valutazioni ad occhio di una stessa lunghezza fatte da diversi scolari nella scuola di Mario Lodi (cfr. *Il paese sbagliato*, Einaudi, Torino, 1970; cit. in Periodico di Matematiche (PdM), 1973, n. 4), e un vero addestramento del ragazzo indiano Kim (nell'omonimo romanzo di Rudyard Kipling) perché potesse collaborare efficacemente come informatore durante il dominio inglese nell'India.

XI. – Concetti standard emendati

La traccia essenziale della mia esposizione potrebbe ora dirsi conclusa, ma sarebbe un po' troppo scheletrica e poco assimilabile tralasciando dei cenni di raccordo o confronto con idee e locuzioni abituali.

Si tratterà di tre gruppi di osservazioni, e vorrei premettere che «sarò breve», se tale frase – ricordandola in bocca al padre di Ofelia nell'Amleto e in quelle di vari Colleghi negli asfissianti e molteplici consigli accademici – non mi facesse temere che suonerebbe allarmante alle orecchie dei presenti.

Prima di tutto, vorrei mettere in guardia contro un consiglio di D'Alembert, che sarebbe disastroso nel campo della probabilità (come anche, probabilmente, in quello dell'Analisi cui egli si riferiva): «*Allez de l'avant: la foi vous viendra*». Se uno va avanti senza liberarsi, chiarendoli, dei primi naturali fraintendimenti o remore, sarà pur vero, purtroppo, che la fede gli viene, ma non nel senso giusto del «credo perché *è chiaro*», bensì in quello aberrante del «*credo quia absurdum*».

Si tratta dell'accettazione della nozione di Probabilità come di un *deus ex machina* scaturito da ragionamenti astratti che evitano con cura di spiegare che il senso della probabilità è quello di cui noi tutti (uomini ed altri animali) ci valiamo per valutare pericoli e rischi e prospettive più o meno felici e lusinghiere.

La probabilità, infatti, è la nostra *guida* nel *pensare* e nell'*agire* in condizioni di *incertezza*, e l'incertezza è *dovunque*.

La teoria delle probabilità è la logica (più o meno istintiva, e perfezionata come istinto e come facoltà razionale, inconscia oppure più o meno scientificamente organizzata e connaturata), con la quale ci studiamo di fare le nostre scelte col proposito di ottimizzare le nostre prospettive.

Il calcolo delle probabilità permette di tradurre tali ragionamenti inconsci e istintivi in uno schema di valutazione attenta del pro e del contro, che difficilmente potrebbe (e, penso, neppure dovrebbe) sostituire la spontaneità delle decisioni istintive con una fredda contabilità di profitti e perdite, ma gioverebbe comunque a perfezionare e controllare tale dote spontanea o a corroborarla con un'apprezzabile indicazione orientativa. Possono servire, e fin dove, a tale scopo, le tradizionali definizioni di probabilità?

Secondo la prima, essa è il rapporto m / n fra numero dei casi favorevoli e possibili '*se ugualmente probabili*'. Per noi, avendo definito la probabilità come prezzo per una scommessa, e visto che pertanto dev'essere additiva, questo è *vero ed ovvio*, non come definizione ma come *corollario*. Se p è la probabilità che, per ammissione, qualcuno giudica *uguale*, di ciascuno degli n casi (incompatibili ed esaustivi), l'evento certo (loro somma) ha probabilità $np = 1$: quindi $p = 1 / n$ e per una somma di m di tali eventi la probabilità è m / n.

Qualcuno vorrebbe forse insistere che – dunque – tale probabilità *è* oggettiva, ma non è così: è soggettivo infatti lo stesso giudizio di uguale probabilità. Si insisterà forse ancora sostenendo che se *tutti* (o tutte le persone *ragionevoli*) condividono tale valutazione vuol dire che è oggettivamente giusta. Ma, a prescindere dal circolo vizioso di far discendere la ragionevolezza di un asserto postulando la ragionevolezza di chi lo accetta, una somma di tante opinioni soggettive non può dare una conclusione oggettiva: sarebbe come pensare che accrescendo un cumulo di sassi esso finirà per diventare un animale.

Se il contraddittore ripiegherà sul dire che, comunque, un'opinione condivisa da molti è *ragionevole*, o *naturale*, mi dico pienamente d'accordo ad accettare in linea di massima questo concetto, che, tuttavia, allude semplicemente ad una verosimile e probabile accettazione di ciò che anche molti altri soggettivamente accettano, in base a motivazioni più o meno analoghe, ma si tratterà nondimeno e sempre di un'opinione *soggettiva* (sia pure 'multisoggettiva' o 'intersoggettiva').

Posso anch'io usare e consigliare di usare termini come 'ragionevole' e 'naturale' in detto senso, non senza sottolineare però che il senso non è affatto oggettivo, bensì *soggettivo al quadrato*: $(\text{soggettivo})^2$, trattandosi di un'opinione soggettiva su opinioni soggettive altrui.

Le contraddizioni intrinseche delle pretese definizioni o spiegazioni 'oggettive' si possono sempre, in qualche modo, spostare, ma mai eliminare: di esse si può dire (con la felice immagine usata da Bernard O. Koopman ([13])) che «*al contrario della Guardia di Napoleone, indietreggiano sempre ma non muoiono mai*».

Ciò vale anche (e ancor più) per l'analoga situazione riguardo alle valutazioni di probabilità basate su frequenze osservate (concezione frequentista, o 'statistica', della probabilità).

Ricondurre la probabilità alla frequenza non ha alcun senso se il senso e le condizioni non si precisano. (E lo faremo tra poco, arrivando a presentare quella nozione di *scambiabilità* menzionata fin dall'inizio). Anticipiamo qui subito (per non dover interrompere il discorso in seguito) una sola osservazione immediata: quanto già detto (nel cap. VI) per denunciare le equivoche implicazioni della locuzione 'prove di un medesimo evento' contiene già quanto basta per estendere al nuovo conato – e in misura più drastica – il rifiuto della pretesa di poter trasformare, anche per quest'altra via, la probabilità in qualcosa di 'oggettivo'.

Un tentativo di far convivere nozioni di probabilità diverse, distinguendole a seconda delle considerazioni da cui si parte per valutarle, era stato fatto dal Cantelli distinguendo tre diversi 'schemi': lo schema dell'*urna* (quello dei 'casi ugualmente probabili'), lo schema dell'*assicurazione* (basata sulle frequenze date dalle statistiche ([14])) e lo schema del *cavallo* (alludendo alle scommesse sulle corse ippiche). Direi che distinzioni del genere (queste od altre) si possono fare, ma riguardano aspetti più o meno esteriori del tipo d'informazione, e non infirmano la natura unitaria della probabilità in ogni campo. La differenza, per esprimerla mediante un'analogia, è quella stessa che passa tra lunghezze misurate con una fettuccia, o con strumenti geodetici, o con segnali radar, o in qualsiasi altro modo: i metodi sono molti, ma la grandezza è sempre una distanza (magari misurata più o meno accuratamente, ma sempre e soltanto distanza).

XII. – La Torre di Babele

La confusione (o semiconfusione) tra probabilità e frequenza, ed altre accennate o che rimangono da accennare o che tralasceremo dall'accennare, indurrebbero spesso a far ritenere che la Torre di Babele sia realmente esistita, e che questo ne sia il retaggio maledetto.

Riprendiamo e concludiamo qui, anzitutto, le critiche ai discorsi e ai dubbi oggettivistici sulla frequenza (che sono già risolti, cap. VIII), per indicare in quale misura equivoci tenaci sono talora frutti inevitabili di locuzioni infelici e forvianti. La locuzione è quella di eventi detti 'prove di un medesimo evento', che sarebbero 'indipendenti' e 'ugualmente probabili', ma '*con probabilità incognita*'. Leggendo tra le righe, con benevolenza, si può intuire che questa è la definizione di scambiabilità, e difatti è a ciò che allude ma in modo insanabilmente contradditorio (dato che la probabilità varia in dipendenza dei risultati via via osservati). Occorre la definizione di scambiabilità per far dissolvere ambiguità e contraddizioni insieme ai termini che li generano.

Una confusione fondamentale deriva dall'asserire che probabilità UNO e probabilità ZERO si identifichino rispettivamente con CERTEZZA e con IMPOSSIBILITÀ *nel senso logico*: sarebbe come asserire che un insieme di punti di misura nulla (intendendosi la misura vuoi nel senso di Jordan-Peano o di Borel-Lebesgue) non può essere che l'insieme vuoto!

Semmai si potrebbe parlare di QUASICERTEZZA e QUASIIMPOSSIBILITÀ (col 'quasi' inteso in senso analogo all'uso in Analisi, ad es. nel dire 'quasiovunque').

Conviene però pensare all'esempio più semplice e decisivo: una distribuzione di probabilità uniforme su un intervallo, per es. sull'intervallo (0, 1). È chiaro che ogni punto ha probabilità nulla, benché l'insieme dei punti *possibili* sia necessariamente *infinito*, in quanto dev'essere ovunque denso (magari soltanto numerabile, come ad es. l'insieme dei razionali, o con potenza del continuo come l'intero intervallo o il sotto-insieme degli irrazionali).

L'esempio dei razionali conduce però ad una conclusione ben più importante, e cioè che *l'additività completa* (o σ additività) è una proprietà di cui la probabilità non gode necessariamente. (Del resto anche nella teoria della misura tale proprietà è valida solo limitandosi – per esempio – agli insiemi misurabili secondo Lebesgue). Ed è conseguenza della consuetudine a tale campo addomesticato il far ritenere (infondatamente) assurdo ciò che avviene al di là dell'artificioso recinto.

Ma la stessa confusione tra 'certo' e 'quasicerto' si rivela in molte altre situazioni come fonte inesauribile di aberrazioni. Si suole troppo spesso dire erroneamente 'certo' e 'impossibile' non solo quando si hanno probabilità '1' o '0' ma anche quando si tratta solo di probabilità prossime all''1' o allo '0'. È questo inconcepibile e imperdonabile malvezzo che porta ad assurdi come quello di 'definire' la probabilità come 'frequenza', la 'irregolarità' (*randomness*) come caratteristica *necessaria* delle successioni ottenute *a caso* tanto da assumerla a volte come ‘*definizione*’ (sic!!!), e molti altri più o meno analoghi. Qualcuno sembra a volte ritenga addirittura necessario pensare e far pensare che esista una magia che produce ciò (oppure il contrario), nascondendo il fatto banalissimo che spiega tutto sgonfiando i gonfiamenti: il Caso di cui si parla non ha affatto predilezioni per le successioni con frequenze pari o prossime alle percentuali di palline bianche e nere (se si tratta di estrazioni, e lo stesso vale per ‘prove ripetute’ di tipo qualunque, nelle stesse ipotesi). Il Caso (con la C maiuscola) non sceglie certe successioni perché sono quelle che egli predilige, ma si affida al ‘caso’ (con la *c* minuscola) che sceglie alla cieca, senza predilezioni, e in genere vengono più spesso successioni del tipo di cui ce n’è di più. Eppure, tra l’altro, molti trovano strano che si abbiano delle sequenze lunghe (molte estrazioni consecutive di palla nera, o – per accennare al caso più pietoso – di estrazioni al lotto senza che esca un numero ‘ritardato’!). Ma non si può troppo deridere i poveretti che credono in tale superstizione fino magari a rovinarsi, perché sembra che, inconsciamente, siamo tutti più o meno affetti da ‘riluttanza contro l’inconsueto’. Ciò risulta, secondo Komlós e Tusnády («On sequences of pure heads», *Ann. Prob.*, 1975), dall’osservazione che, richiedendo a qualcuno di scrivere una lunga successione di T e C per esemplificare (o ‘simulare mentalmente’) un processo di testa e croce, si trova che tutti in genere si cade sistematicamente nell’errore di non indicare mai, o assai più raramente di come la teoria indica e in pratica avviene, successioni ‘lunghe’ di sole T o sole C. (Secondo Rényi [1970], la lunghezza della più lunga successione ‘pura’ su n colpi [al divergere di n] dovrebbe avere come ordine di grandezza *loglog* n). Chi finge di impersonare il Caso sembra preoccuparsi di imitarlo *troppo bene* e proprio per ciò non riesce: egli non imita il Caso perché il Caso non ha memoria, e riesce a fare successioni ‘casuali’ proprio perché non si propone e neppure sa di farle.

XIII. – Determinismo e Indeterminismo

Dubbi di origine più profonda concernono l’alternativa: ‘Determinismo o Indeterminismo’. Ritengo che tale alternativa sia indecidibile e (vorrei dire) illusoria. Si tratta di diatribe metafisiche sulle ‘cose in sé’ ; la scienza riguarda ciò che ‘ci appare’, e non è strano che per studiare gli stessi fenomeni possa apparire più utile volta a volta immaginarli da questo o quel punto di vista, mediante teorie deterministiche (e ammettendo ‘errori accidentali’ o di ‘imprecisione di misura’) oppure indeterministiche (e la spiegazione si trova sostanzialmente anticipata nel trattato di Castelnuovo). È infatti indiscernibile un processo di diffusione idealizzato deterministicamente come risultante da urti elastici di sferette, o tradotto in un processo di (per così dire) 'diffusione di una probabilità', tipo processo di Wiener-Lévy. Per inciso: io mi guarderei bene dal dire che sia una 'densità di probabilità' a diffondersi o a rimbalzare o farsi assorbire da barriere riflettenti o assorbenti, ecc.; semmai avrei cura di dirlo 'tra virgolette', o precisando che 'tutto avviene *come se* ... (ecc.)', nello spirito dell''*als ob*' ('come se') di Veihinger.

Ancor peggiore, perché del tutto superfluo e futile, è il contorcimento usato in genere tuttora per fare sembrare più 'oggettiva' l'affermazione che «possiamo attenderci con grandissima probabilità che ...» ecc., dicendo che in una grandissima collezione (detta, in termodinamica, '*ensemble*', secondo Gibbs) «nella stragrande maggioranza di casi» avviene che ecc. (nella speranza, sembra, che questa frase vuotamente ipotetica appaia più 'oggettiva' dell'affermazione pura e semplice che «possiamo attenderci con grandissima probabilità che ... ecc.») ([15]).

Un esempio si può prendere anche dalla matematica. Il valore di π è certo ben determinato (lo sono, cioè, tutte le infinite cifre decimali: 3,141592 ... calcolate o non ancora oppure mai dall'uomo). Eppure, non apparendo ragionevoli ipotesi speciali in contrario, anormali rispetto alla 'scelta a caso' (prob. $^1/_{10}$ per ogni cifra, indipendentemente dalle precedenti), Borel ha concluso (e, mi pare, a ragione) che, per noi mortali, sia ragionevole attribuire una probabilità $= 1$ (pur non trattandosi di *certezza*, ma 'quasicertezza') all'ipotesi che π sia un numero 'normale' per la scrittura decimale (ed anzi 'assolutamente normale', cioè tale rispetto ad ogni sistema di numerazione, non solo per base 10), dato che i numeri non 'assolutamente normali' sono 'pochissimi' (appartengono a un insieme di misura nulla).

Non voglio aggiungere altre esemplificazioni ed osservazioni, ma solo notare la cura occorrente per sceverare ciò che *ha senso* o *non ha senso* (secondo la raccomandazione di Calderoni e Vailati), ossia – per ribadirla richiamando una massima del Vangelo – la necessità di separare accuratamente «*il grano dal loglio*».

Separare il grano dal loglio significa, nel nostro caso, riflettere sul diverso modo in cui frasi enunciazioni conclusioni relative a un medesimo problema vengono formulate e collegate alla realtà, a seconda che si adotti, rispettivamente, la visione soggettivista della probabilità oppure quella oggettivista.

XIV. – Probabilità, Matematica, Didattica

Per concludere costruttivamente, è necessario affrontare ancora una questione sulla quale vorrei invitare tutti a riflettere seriamente. Trovo molto pericolosa, dannosa, deplorevole, la tendenza che affiora, sia nel campo scientifico che in quello didattico, verso visioni unilaterali, settoriali, riduttive, spesso addirittura artificiose, riguardo a ciò che la Probabilità *è* ed a ciò cui *può* e *deve servire*.

Le considerazioni che intendo prospettare si riferiscono (quale più e quale meno) sia alla ricerca che all'insegnamento della Probabilità a tutti i livelli: da quelli prescolare, elementare, medio, superiore e universitario fino a quello specialistico e alle pubblicazioni, troppo spesso incentivate dal patologico stimolo del '*publish or perish*'.

Grosso modo, può dirsi si tratti sempre di un malvezzo *generico*, comune cioè a tutto l'insegnamento della matematica, ma, per il nostro campo, se ne aggiungono altri specifici della teoria delle probabilità e dei campi in cui si applica (statistica, ricerca operativa, ecc.).

Il malvezzo generico che affligge l'insegnamento della matematica è quello di mettere 'il carro avanti ai buoi' (come disse e illustrò ottimamente Gemma Harasim, la madre di Lucio Lombardo-Radice, in un articolo del 1915, riprodotto, sia pure parzialmente, nel PdM, 1975, n. 1-2). Fuori di metafora, l'errore è di 'INSEGNARE' il formalismo matematico prima di averne fatto sentire il bisogno e senza farne capire il senso: cosa per cui è essenziale spiegare 'a cosa serve' (non solo, ovviamente, nel significato banale del 'far di conto', e ciò si può ben fare intravvedere vividamente anche a bambini ed ignoranti).

Riguardo ai malvezzi *specifici*, ritengo se ne possano elencare cinque; poi indicherò come evitarli (dando modo, a chi dissente, di dire che quello è 'il malvezzo mio').

Primo. Se si comincia da casi e cose banali, dove la valutazione di una probabilità è (o almeno appare) ovvia, meccanica, e magari l'indipendenza invece pure, ecc., il rischio consiste nel pensare che tutto o quasi si riduca a calcolo combinatorio. Sarebbe come introdurre (o, magari, 'definire'), l'*area* solo per rettangoli e triangoli, lasciando che si formi la stortura di pensare che la nozione non abbia senso per altre figure. Il calcolo combinatorio è certamente uno degli strumenti che servono spesso in molti problemi di calcolo delle probabilità, ma non è il Calcolo delle probabilità.

Secondo. Se si segue un certo tipo di formalizzazioni 'logiche' (dove la 'logica' non è più che un simbolismo formalistico) si rimane più o meno allo stesso livello, ma ulteriormente oscurato e vanificato da arbitrarie convenzioni pseudologiche, e dall'intendimento di considerare 'probabilità' non di *fatti* ma di 'proposizioni', e pertanto di sapore non concreto ma metafisicheggiante. Unico risultato possibile sarebbe di convincere che ogni convenzione è buona se e soltanto se è gabellata come 'assioma'.

Terzo. Delle impostazioni 'assiomatiche', ove si postulano con un certo responsabile tentativo di ragionevolezza cose interpretabili con riferimenti al pur innominato 'concreto', come proprietà della funzione $P(E)$, ho già accennato implicitamente qualche manchevolezza (cap. VII), facilmente eliminabile (ma sintomatica di carenze di consapevolezza). Ma il guaio maggiore è un altro: che si rimane al livello astratto, di mera *teoria della misura*, finché ai simboli e alle operazioni non si associa un significato reale, e non si fa risultare quale interpretazione e quale valore debba darsi alle conclusioni: – soggettivo? – o pretesamente oggettivo? e allora – di grazia – in che senso?

Quarto. Altri approcci conducono subito a considerare problemi particolarmente interessanti con processi aleatori (o 'stocastici') – tipo 'catene di Markov', per accennare solo all'esempio più elementare – e finiscono per studiare in sostanza un processo di diffusione o simile sotto varie ipotesi, dicendo che ciò che si propaga è una *probabilità*, ma non cosa s'intenda per Probabilità, e non, quindi, che cosa mai in pratica se ne concluda. Oppure ciò appare, confusamente, in un senso 'intuitivo' che a quel momento è confuso e misterioso, perché appare come *deus ex machina* anziché come premessa chiarificatrice fatta fin dall'inizio. E in questo caso si può fare un bel corso di esercizi di Analisi (equazioni alle differenze finite, o differenziali, o alle derivate parziali, o integrali, o integrodifferenziali, oppure trasformate di Fourier ecc.), quasi come fine a se stesse.

Quinto. Di insegnamenti o introduzioni che si ispirino alla Statistica (o a rami specifici, come Ricerca operativa, Teoria dell'informazione, applicazioni demografiche, attuariali, ecc.) ce n'è di diversissimi. Spesso si fa quasi confusione tra probabilità e frequenza, ma il difetto più specifico da segnalare è, a mio avviso, l'eccessiva proclività di parecchi statistici (non voglio, naturalmente, generalizzare coinvolgendo nella critica gli immuni da tale menda) all'uso di metodi empirici, grossolani, del tipo di quelli che (come ho già accennato) Irving Good ha battezzato '*Adhockeries*' (cioè espedienti *ad hoc*, Adhoccaggini), mentre altri parlano, più grossolanamente, di '*Statistical Cook-Books*', cioè ricettari di cucina statistici.

Ho l'impressione che ne siano più immuni coloro che devono affrontare problemi concreti, come nella Ricerca operativa, la teoria dell'affidabilità ('*Reliability*'), ecc., e mi auguro che gli esempi buoni siano (una volta tanto, contro l'apologo delle mele buone e no) più *contagiosi* di quelli cattivi.

In tutti questi cinque casi enumerati, benché per motivi e sotto aspetti diversissimi, la Teoria delle probabilità si fa apparire – talvolta di proposito e comunque sempre di fatto – come una dottrina in cui si sa tutto della Probabilità e delle sue proprietà formali, ma però, conformemente al detto di Birkhoff già citato, nessuno sa cosa sia, né si cura di saperlo, o forse vuole tenerlo nascosto.

Sembra proprio di dover pensare, come spiritosamente ha scritto Hans Freudenthal ([16]), che tutti si preoccupino col massimo impegno di non lasciar vedere la Probabilità «*come Dio l'ha fatta*» («*as God created it*»), munendola di una foglia di fico o di tante da oscurarla completamente, ... forse temendo l'incriminazione per oltraggio al 'comune senso del pudore' da parte di qualche immancabile zelante Procuratore della Repubblica.

Ho terminato, ma tengo a ribadire ancora una volta che è l'imperversare di queste diverse deviazioni – deviazioni che si riscontrano più o meno a tutti i livelli, sia nella didattica che nella ricerca – il fatto che maggiormente mi preoccupa, il pericolo su cui ho voluto, in questa occasione più che mai, richiamare la vostra attenzione.

Dell'attenzione prestatami, vi ringrazio sentitamente, e prego di scusarmi se – dato l'assillo di dire sia pur succintamente tutto o quasi tutto ciò che mi appariva essenziale – di tale attenzione ho certamente abusato.

B.d.F.

BIBLIOGRAFIA e NOTE

([1]) Il lavoro in cui RENÉ MAURICE FRÉCHET ha introdotto il termine *échangeable* è *Les probabilités associées à un système d'événements compatibles et dépendants*, Hermann ed., Paris, 1939. Per quanto mi consta, i primi ad usarlo in inglese furono CHERNOFF e TEICHER (1957), in tedesco BUEHLMANN (1960).

Quanto alle altre denominazioni, *equivalenti* è stato introdotto da A. KHINCHIN in *Sur les classes d'événements équivalents*, Mat. Sbornik (1932) e seguito da MILICER-GRUZEWSKA

(1950), Dynkin (1953), Ryll-Nardzewski (1957), e tuttora (pare) in Urss; quella di *simmetrici* è stata usata da E. S. Andersen in *On sums of symmetrically dependent random variables*, Skandin. Aktuarietidskrift (1953) e (seguito) (1954), e da Hewitt e Savage (1955); quella (più esplicita ma un po' lunga) di *invariant under mixing* (invarianti rispetto a permutazioni) da D. Freedman (1962).

([2]) *Il Pragmatismo e i cento modi di non dir niente* è il titolo di uno degli scritti di Vailati e Calderoni che avrebbero dovuto far parte di un'opera sul Pragmatismo, interrotta per la morte di Vailati (cfr. G. Vailati, *Scritti*, ed. Seeber, Firenze, 1911).

([3]) H. Jeffreys, *Theory of Probability*, Oxford, 1939 (p. 394).

([4]) *La probabilità: guida nel pensare e nell'agire* è il titolo di un ciclo di conferenze all'Univ. di Trento (1965), pubbl. come *Quaderno n.* 11, ivi (1966).

([5]) Su tali convenzioni e notazioni cfr. spec. i paragrafi I, 10.3 e II, 11.1-4 in TdP (così abbreviato, qui e in seguito, per *Teoria delle probabilità* di BdF, ed. Einaudi, Torino, 1970: BdF = Bruno de Finetti).

([6]) Questa allusione scherzosa a fumosi concetti metafisici mi venne suggerita da un aneddoto raccontatomi dal collega Gaetano Fichera. In una commissione di maturità liceale il collega di Filosofia chiedeva spesso cosa fosse il *noumeno*, ed era felice che tutti sapevano dare la risposta esatta: «è la *cosa in sè*». Fichera finì per chiedergli se riteneva che sapessero cosa sia la «*cosa in sé*»; egli fece la domanda, l'interrogato rispose: «*è il noumeno*», e il filosofo si rivolse trionfante a Fichera: «*Vede che lo sanno*!».

([7]) Una spiritosa poesia intitolata *O Dio Caso*! mi è stata inviata tempo fa da un simpatico e vivace letterato romagnolo, e la pubblicai nel Periodico di Matematiche (1974, n. 3). Tutto pareva azzeccato e ragionevole ... ma successivamente mi accorsi che, come molti, riteneva che il Caso avesse la funzione di *impedire* cose poco probabili (come lunghi ritardi nel lotto, lunghe sequenze di *testa* o di *doppio sei* con una moneta o due dadi, ecc.), e, evidentemente indignato per la mia insistenza nell'*errare*, interruppe la corrispondenza.

([8]) Cfr. H. Reichenbach, *I fondamenti filosofici della meccanica quantistica* (1942; trad. it. Einaudi, Torino, 1954, p. 704).

([9]) Per la cronaca: i primi due eventi (effettivamente reali), risultarono entrambi *falsi* (risultato di Juventus-Torino, 0-2); il 13 non è uscito a Roma (è uscito a Venezia); il terzo è fittiziamente specifico perché non è precisato chi sia il sig. X. Y. Comunque, la scelta di *esempi* non significa in nessun caso di intenderli come predizioni, o viceversa.

([10]) Sarebbe raccomandabile di dire sempre *stocasticamente indipendenti* (e *indipendenza stocastica*, ecc.) salvo dove e quando si possa esser certi che il sottintendere *stocastico* non dia luogo a malintesi (con indipendenza *logica*, o *lineare*, o *stocastica condizionata* che spesso significherebbe scambiabilità; v. cap. VIII). Inoltre, non si pensi che l'indipendenza riguardi gli *eventi* di per sé: si tratta solo della nostra valutazione di probabilità, cioè dal valutare $P(AB) = P(A)\,P(B)$ ecc.

([11]) Per R. von Mises si potrebbe parlare della probabilità solo per un'infinità di eventi ordinati in successione; essa verrebbe ivi *definita* come il limite della *frequenza* (o percentuale di *successi*) nei primi n casi quando n si faccia tendere ad infinito. Poiché è assurdo poter fare infinite *prove*, tale precauzione è una sottigliezza illusoria per far accettare la grossolana identificazione con la frequenza su un numero finito di prove.

([12]) La denominazione familiare di *patate* ha il vantaggio di far capire automaticamente il valore puramente indicativo di tale rappresentazione visiva. Dicendo (come, purtroppo, è consuetudine) che le patate sono *insiemi di punti* (i quali sarebbero ... *casi elementari possibili*!), tutto viene falsato e reso assurdo. (Qualcuno sembra si senta in imbarazzo fra dire o non dire a quale regione appartengono i punti delle linee divisorie, di confine! Neppure all'epoca delle epiche guerre per secchie rapite ci sono state contese per la sovranità dei *punti* della *linea* di confine!).

([13]) Basti citare, come esempio, una frase (traducendola da *The Bases of Probability*, in KYBURG and SMOKLER, *Studies in subjective probability*, pp. 161-172). «*Al fine di concludere che* A *è irrilevante per il verificarsi di* E *in una data occasione, in base al risultato di esperimenti fatti in un'occasione diversa, si deve assumere che certe altre inevitabili differenze tra le due occasioni sono esse stesse irrilevanti per riguardo alla situazione considerata. La difficoltà, esattamente al contrario della Guardia di Napoleone, indietreggia sempre ma non muore mai*» (p. 172).

([14]) A proposito di tale esempio, per evitare interpretazioni *superstiziose*, occorre notare che le tavole di mortalità servono solo come base standard, come primo riferimento, per individui di data età. Ma l'assicuratore si accerta di tutte le circostanze specifiche che, per ogni individuo, possono influire, specie negativamente, sulla probabilità di morte, al fine di fare una valutazione *personalizzata*. Se tuttavia, nella pratica, si ricorre non frequentemente a richiedere premi maggiorati è perché, finché il margine di utile lo consente, è preferibile acquisire un cliente piuttosto che rischiare di perderlo.

La frequenza può essere un dato orientativo per la valutazione di certe probabilità, ma nulla più: infatti sempre o quasi sempre ci sono circostanze specifiche caso per caso di cui sarebbe assurdo non tener conto.

([15]) È strano come taluno, dicendo che *intende la probabilità in senso oggettivo* (senza spiegare l'inesistente senso di tale affermazione), pretenda e riesca a far accettare l'asserto come qualcosa di significativo da altre persone. A meno che non si tratti di altra cosa, cioè di *obiettività,* di sincerità nel valutare spassionatamente tutte le circostanze (sempre, ovviamente, in senso soggettivo), senza ingannare né se stesso (per tendenze a pessimismo o ottimismo), né altri (per ingannarli, o per secondare o contrastare loro preferenze, ecc.).

([16]) Questa immagine è presa da un articolo di HANS FREUDENTHAL (*The crux of Course Design in Probability*, in Educational Studies in Probability, Reidel ed., Amsterdam, 1974, n. 5; pp. 261-277), da me riassunto e commentato (con aggiunta di ulteriori considerazioni) in *Il buon senso e le foglie di fico*: *Hans Freudenthal sull'insegnamento della Probabilità*, Boll. Un. Matem. Ital., 1975, Suppl. fasc. 3 (in onore di ENRICO BOMPIANI, cui avevo sottoposto il ms. per conferma che non ne disdegnasse il tono scherzoso benché ne fossi certo conoscendo e ammirando la sua intelligente spregiudicatezza).