La Matematica nella Società e nella Cultura

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Maria Alessandra Mariotti

Saper vedere in matematica alla luce della ricerca in didattica. Visualizzare in geometria come problema didattico

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **8** (2015), n.3 (*Bruno de Finetti e l'insegnamento della Matematica. «Dalla Realtà, nella Realtà, per la Realtà», a cura di Giuseppe Anichini, Livia Giacardi, Erika Luciano)*, p. 109–142.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2015_1_8_3_109_0>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2015.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. VIII, Dicembre 2015, 109-142

Saper vedere in matematica alla luce della ricerca in didattica. Visualizzare in geometria come problema didattico

MARIA ALESSANDRA MARIOTTI

Ho bisogno di un'immagine al fine di avere una visione simultanea di tutti gli elementi ... tenerli insieme, farne un tutto, raggiungere la sintesi ... e dare al concetto la sua fisionomia.

Hadamard 1949, p. 77

La geometria che qui si studia non è tanto la geometria propriamente detta, la geometria dello spazio fisico [...]; *la nostra geometria si serve dell'intuizione spaziale, ma più che altro come di un potere magico per dare corpo e rappresentazione a concetti, situazioni, problemi* [...].

de Finetti L (1944) 1959, p. 258

1. – Introduzione

Leggere, o magari rileggere il libro *Il "saper vedere" in Matematica* che Bruno de Finetti scriveva nel 1967, suscita sempre grande piacere, anche perché ci riporta ad un momento molto vivace del dibattito sul tema del curriculum, ed in particolare sui contenuti e le metodologie dell'insegnamento della matematica. L'autore parte dalla discussione di problemi matematici decisamente non comuni per l'esperienza scolastica di allora, e certamente ancora attuali, e propone alcune riflessioni generali sul pensiero matematico, accompagnate da suggerimenti didattici.

La metafora del vedere, che appare nel titolo e corre lungo tutto il libro, è assai comune, soprattutto quando si vuol richiamare il ruolo dell'intuizione, ed in particolare il processo euristico che accompagna la soluzione di un problema. Per dirla con le parole di de Finetti:

> *È la tendenza* [euristica] *che intende rendere* viva *la matematica e il modo di insegnarla e di apprenderla: di* vederla *e farla* vedere *con l'intuizione e con riferimento a svariate e interessanti applicazioni pratiche; di cogliere i fatti essenziali e le relazioni tra essi quali servono per dominare l'insieme di questioni che ci si presentano.* (de Finetti A 1979a, p. 3, la sottolineatura è nel testo)

L'interesse per un approccio euristico è forse uno dei tratti caratteristici dell'impostazione didattica suggerita da de Finetti, sulla scia di autori assai noti al tempo come George Pólya, e forse un po' meno noti allora, ma molto noti adesso, come Alan H. Schoenfeld. Al momento in cui de Finetti scriveva, questa impostazione metodologica, che vede come elemento chiave dell'apprendimento e insegnamento della matematica il risolvere problemi (*problem solving*), trovava molti sostenitori, sia a livello internazionale che a livello nazionale. Ricordiamo [1] la strada indicata da Emma Castelnuovo, il cui libro *Didattica della Matematica* esce lo stesso anno di *Il 'saper vedere' in Matematica*. Ed è proprio alla Castelnuovo e al suo metodo che de Finetti dedica uno dei suoi esempi introduttivi, riportando la soluzione proposta da uno dei suoi allievi (de Finetti L 1967, p. 2) al problema di ricavare l'espressione del volume dell'ottaedro: la soluzione è ottenuta attraverso il completamento dell'ottaedro mediante quattro tetraedri regolari giustapposti all'ottaedro per ottenere un tetraedro di lato doppio. L'interesse didattico, come osserva de Finetti, sta nel fatto che la produzione di tale soluzione possa essere considerata il frutto di un metodo di insegnamento che "tende a stimolare l'intelligenza, anziché soffocarla [...]" (*Ibidem*, p. 3). Un metodo che porti a "vedere" la matematica.

È innegabile che le immagini, in varia forma e natura, abbiano un ruolo fondamentale per il pensiero ed in generale per le attività intellettuali dell'uomo. Molti sono i racconti di celebri 'scoperte' che

[1] Un approccio euristico sarà comune anche ai vari progetti per la scuola secondaria superiore che vedranno la luce proprio in quegli anni, come ad esempio il progetto "Matematica come scoperta" (G. Prodi, *Matematica come scoperta*, 3 voll., Messina-Firenze: Casa Editrice D'Anna, 1981) che poneva la soluzione dei problemi al centro della propria metodologia didattica.

hanno avuto origine nella contemplazione di un'immagine interiore o nel rapido apparire di essa. Ma forse più familiare ancora è l'esperienza personale di immagini che accompagnano i nostri pensieri, siano essi un tranquillo fantasticare senza scopo, o la ricerca insistente e intrigante della soluzione di un problema di matematica. È proprio nella ricerca della soluzione di un problema che spesso si ricorre alle immagini, ad esempio disegni prodotti su un foglio di carta. Così ad esempio interviene Pólya all'inizio di un paragrafo dedicato alle figure in geometria, nel suo libro *Come risolvere i problemi di Matematica*:

> *Le figure costituiscono non solo il fondamento dei problemi di geometria sintetica, ma anche un elemento ausiliario fondamentale in ogni problema, non necessariamente geometrico. Quindi ci sono due validissimi motivi per apprezzare il ruolo delle figure nella risoluzione dei problemi.* (Pólya 1967, p. 111)

In modo del tutto coerente con quanto affermato da Pólya, il ruolo particolare assegnato alla geometria è chiarito in modo efficace proprio nelle prime pagine de *Il "saper vedere"*; scrive de Finetti:

> *Qualunque risultato matematico riesce di regola più chiaro, o diventa addirittura intuitivo, rappresentandolo* ***geometricamente*** *in modo* ***opportuno****.* (de Finetti L 1967, p. 4; il grassetto è nel testo)

Il registro assertivo di questa affermazione ben testimonia quanto per de Finetti fosse evidente la sua verità. In effetti la frase può suonare semplice e del tutto evidente all'orecchio di un matematico, ma non appena ci si pone il problema di chiarire che cosa significa rappresentare geometricamente, e in che cosa consiste produrre tale rappresentazione, ci rendiamo conto che il compito si fa complesso. Il processo di *rappresentazione geometrica*, come lo intende e lo sollecita a buona ragione de Finetti, richiede conoscenze matematiche e competenze specifiche che variano molto da problema a problema, che sono difficilmente descrivibili, e che per questo possono risultare ancor più difficili da raggiungere come obiettivi di insegnamento e apprendimento. In altri termini, affermare la necessità e l'efficacia di rappresentare geometricamente un problema, pone immediatamente un problema didattico: rappresentare geometricamente un problema è un processo spontaneo? E se non lo è, è possibile sviluppare tale capacità? E come è possibile farlo?

Consideriamo, ad esempio, la soluzione proposta da de Finetti al problema di trovare la somma dei primi 100 numeri naturali (ibidemibidem, p. 2); tale soluzione richiede di rappresentare un numero come un rettangolino di base 1 e altezza che ne esprime il valore, e la somma di più numeri come la figura ottenuta dalla giustapposizione dei rettangolini corrispondenti. La rappresentazione di un numero come un rettangolo non è comune, come lo è invece quella tramite un segmento. È ragionevole domandarsi come può venire in mente di utilizzarla. È sufficiente conoscere i rettangoli e le loro proprietà geometriche, e conoscere i numeri e saperli sommare, per avere l'idea di una rappresentazione come quella proposta? Inoltre, basta disporre di immagini perché queste si traducano in rappresentazioni *geometriche opportune* e perché diventino strumenti euristici, ossia rendano un risultato *chiaro* ed *intuitivo*?

La complessità del problema sollevato dall'affermazione di de Finetti, citata sopra, si presenta da tempo come una sfida nel campo della didattica della matematica. Proprio perché il principio affermato risulta condiviso, assumono particolare interesse gli studi che negli anni hanno cercato di chiarire come il pensiero utilizzi le immagini, ed in particolare come nel caso del pensare in matematica sia la geometria di tali immagini a rendere il loro contributo efficace. Questo porta a riconoscere un ruolo molto importante all'educazione geometrica e alla necessità di contrastare una pericolosa tendenza ad abbandonare lo studio della geometria nella scuola pre-universitaria. Vorrei ricordare, accanto alle parole di de Finetti, le parole di un altro matematico:

> *La geometria (la geometria Euclidea elementare) occupa una posizione specifica tra le altre branche della matematica e tra tutte le altre discipline per il suo carattere unico che consiste nella unione di logica immaginazione e pratica.* [...]. *In tutto questo sta l'importanza di insegnare un corso di geometria in tutte le scuole* [...]. (Alexandrov 1992, p. 365)

2. – Visualizzazione

L'uso di immagini, intendendo prevalentemente immagini interne, ma non solo, viene di solito detto visualizzazione, e su tale tema si discute da tempo nell'ambito dell'educazione matematica.

I primi studi sistematici sul tema della visualizzazione appaiono quando Alan Bishop pubblica alcuni lavori (Bishop 1979, 1983) originati da interessanti confronti tra modi di rappresentare diversi in culture diverse. Tali ricerche aprirono una pista che è rimasta a lungo non molto praticata, come ricorda Norma Presmeg (2006), ma che conta comunque contributi importanti. Negli ultimi tempi gli studi sulla visualizzazione sembrano essersi concentrati su aspetti specifici del funzionamento delle immagini in ambiti particolari del pensiero matematico. In particolare gli studi legati alle nuove tecnologie hanno aperto un filone di ricerche molto promettente su come l'uso di particolari ambienti tecnologici possa influenzare i processi di concettualizzazione matematica e sulla soluzione di problemi matematici (Arcavi, Hadas 2000).

La riflessione generale sul tema della visualizzazione ha avuto come primo risultato quello di chiarire e condividere il senso di termini complessi come visualizzazione, visualizzatore o immagine, che nel linguaggio corrente hanno un uso assai vario e vago, in una continua oscillazione tra contesto interno (immagini mentali, pensiero, concettualizzazione ...) ed esterno (diagrammi, schemi, disegni, immagini sullo schermo, ...).

Seguendo Presmeg possiamo accettare la seguente caratterizzazione:

> [...] *visualization is taken to include processes of constructing and transforming both visual mental imagery and all of the inscriptions of a spatial nature that may be implicated in doing mathematics (Presmeg, 1997a). This characterization is broad enough to include two aspects of spatial thinking elaborated by Bishop (1983), namely, interpreting figural information (IFI) and visual processing (VP).* (Presmeg 2006, p. 206)

Come chiarito da Bishop (1989) sembra esserci fin dall'inizio un'opposizione tra gli aspetti positivi e le criticità legate al fenomeno della visualizzazione. Da un lato, soprattutto basandosi sull'esperienza acquisita, si sottolinea il valore e il potere dei processi di visualizzazione (Krutetskii 1976), dall'altro, sin dai primi lavori riguardanti il comportamento degli allievi, si mettono in luce le difficoltà. A questo proposito, Presmeg in un lavoro del 1986 ne elencava alcune e tra le altre citava la seguente:

> *Especially if it is vague, imagery which is not coupled with rigorous analytical thought processes may be unhelpful.* (Presmeg 1986, p. 45)

Nel seguito, prendendo spunto dal testo di de Finetti *Il "saper vedere" in Matematica*, intendo proporre qualche riflessione sul tema della visualizzazione e, restringendomi all'ambito specifico della geometria, focalizzare alcuni aspetti che riteniamo fondamentali per comprendere un problema complesso e intravedere qualche possibile risposta alle molte domande che emergono.

3. – Visualizzazione e pensiero spaziale

Dal punto di vista dell'educazione matematica è possibile trovare molti riferimenti al ruolo chiave della 'visualizzazione' nell'attività del matematico, ma anche molti riferimenti alle difficoltà e addirittura alla riluttanza (Eisemberg, Dreyfus 1991) che è possibile osservare da parte degli allievi in classe. Alcuni ricercatori (Presmeg 2006) mettono in evidenza il fatto che, a differenza di quanto sembra accadere per i matematici, gli allievi solo raramente ricorrono a supporti visivi e sfruttano le grandi potenzialità che tali supporti possono offrire per svolgere un ragionamento, per risolvere un problema. La differenza tra il comportamento degli allievi e quello dei matematici non è difficile da comprendere e, come sottolineato da Healy a Hoyles (1996) e con loro da altri, ad esempio Presmeg (1997b), è riconducibile al processo interpretativo della sensazione visiva, processo nel quale consiste la visione, ovvero la *percezione* di una immagine. Ogni matematico sa cosa *vedere*, ossia come interpretare un diagramma; in particolare, in geometria l'esperto ha familiarità con il processo di generalizzazione che rende l'immagine che osserva una rappresentazione del concetto generale che sta trattando. Inoltre, a partire da un dato problema, l'esperto cercherà di orientare il processo percettivo in modo che sia utile alla soluzione, in altre parole cercherà di avvalersi dell'immagine in modo euristico.

In questo senso le difficoltà rilevate negli studi svolti con gli allievi non risultano sorprendenti, ma proprio perché la realtà dell'esperto ci parla di comportamenti tanto semplici e naturali, quanto efficaci, è ragionevole domandarsi se sia possibile educare gli allievi nel campo della visualizzazione, aiutandoli a superare i possibili ostacoli osservati e sviluppando modi di pensare che ricorrono a rappresentazioni geometriche opportune, e in generale matematicamente efficaci. Per rispondere a questa domanda dobbiamo in primo luogo cercare di capire meglio come funziona la visualizzazione.

3.1 – *Due esempi*

Iniziamo la nostra riflessione da un esempio proposto da de Finetti e da lui discusso. L'autore riporta con stupore come un certo problema non abbia trovato solutori su circa 250 studenti che partecipavano ad una gara di matematica. Il problema "richiedeva, sostanzialmente che si avesse un'idea di come si sarebbe disposto un filo a cappio infilato nella punta di un cono e teso in un punto verso basso (ad es. mediante un peso), come indicato nella fig. 18 [si veda la Figura 1]. Nessuno vi riuscì [...]." (de Finetti L 1967, p. 12).

Secondo quanto riportato, immaginare la disposizione del filo determinando la forma esatta del cappio, sembra andare al di là delle possibilità di visualizzazione degli allievi: anche se non sembrano esserci difficoltà ad evocare l'immagine di un cono e di un filo disposto a cappio intorno ad esso, quando si richiede un maggior dettaglio dell'immagine che permetta di determinare le caratteristiche geometriche della curva che modellizza il filo, il pensiero si blocca e l'allievo non risponde.

Un caso molto simile di blocco nell'elaborazione efficace di un'immagine si ritrova nell'affrontare il problema seguente: determinare se le diagonali di un cubo si incontrano e se si incontrano perpendicolarmente.

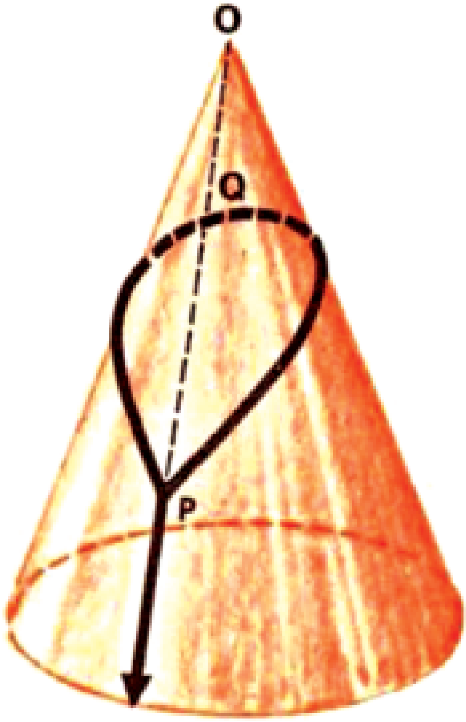


Figura 1. L'immagine del cono utilizzata da de Finetti

Anche in questo caso, i soggetti intervistati mostrano grandi difficoltà nell'elaborazione di un'immagine che superi la rappresentazione generica di un cubo e riesca a determinare se l'angolo tra due diagonali è o meno retto. In effetti, si ottiene un gran numero di risposte positive, oppure uno sconsolato "non saprei ...".

In entrambi i casi stupisce e lascia perplessi, il contrasto tra la sensazione di familiarità che suscita il riferimento ad oggetti come un cono e un cappio, o un cubo e le sue diagonali, e la difficoltà a dare la risposta al quesito; da un lato la sensazione precisa di 'vedere' gli oggetti di cui si parla, dall'altro la sensazione di non riuscire a mettere a fuoco l'immagine in modo soddisfacente per rispondere alla domanda. Nel caso del cubo i soggetti che partecipavano ad un'intervista riportavano proprio l'esperienza del tentativo di centrare l'immagine sul dettaglio del punto di incontro delle diagonali e di fallire nel riprodurlo

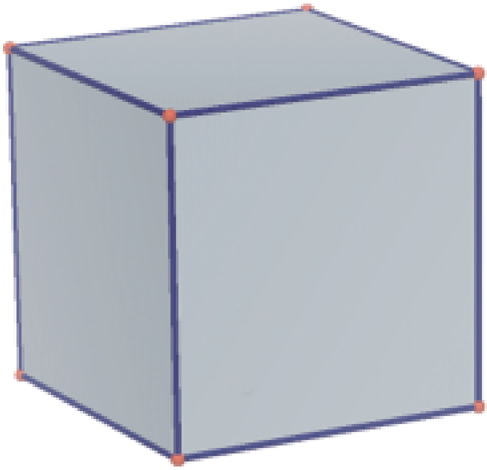


Figura 2. Immagine di un cubo del quale considerare le diagonali

mentalmente con sufficiente dettaglio per poter stabilire se le diagonali fossero o meno perpendicolari (Mariotti 2005).

Vediamo di chiarire meglio qualche aspetto riguardante la percezione e le immagini mentali per introdurre il problema specifico del rapporto tra immagini e concetti in geometria attraverso la nozione di *Concetti Figurali* che ci aiuterà a descrivere il ragionamento in geometria e a spiegare possibili blocchi o errori come quelli che abbiamo descritto nei due esempi precedenti.

4. – Immagini mentali e percezione

Nell'ambito della psicologia il termine immagine mentale è usato per particolari "prodotti dell'attività della mente" quando questi riguardino principalmente "la rievocazione e la riproduzione di fatti e oggetti che per molteplici aspetti sono simili alla percezione di quei medesimi fatti e oggetti ...". (Marucci 1995, p. 18)

La nozione di immagine mentale è molto antica, possiamo trovare un primo cenno sistematico di tale idea in Aristotele (Denis 1991) che parla delle immagini mentali come raffigurazioni interne, figurali e non simboliche, della realtà esterna. Questa posizione ha influenzato molte delle interpretazioni successive e può essere ricondotta a quella che oggi si chiamerebbe una interpretazione "analogica". In effetti, pur con molte differenze, è possibile tracciare una linea comune tra le concezioni filosofiche che dagli empiristi arrivano fino ad oggi: le immagini mentali sono rappresentazioni figurali interne che possiedono caratteristiche simili a quelle delle rappresentazioni interne generate durante il complesso processo cognitivo comunemente detto percezione.

Il problema della relazione tra le immagini e gli oggetti rimanda al problema generale di come un'informazione viene elaborata per essere percepita e immagazzinata dall'organismo, ovvero al rapporto tra sensazione, percezione e memoria, e di come tutto ciò si riconduca al fenomeno delle immagini mentali. Per quanto riguarda la percezione sembra essere condivisa la caratterizzazione seguente:

> [...] *è il processo che determina il significato degli stimoli che ci colpiscono.* [...] *nella percezione è in gioco più della semplice determinazione del fatto che qualcosa esiste nell'ambiente, il che chiameremo rilevazione.* (Moates, Schumacher 1983, pp. 20-21)

Possiamo distinguere due tipi di processi a seconda che dai dati sensoriali si vada verso la categorizzazione (= costruzione di schemi categoriali) o viceversa, dagli schemi categoriali si vada verso i dati sensoriali (tali processi sono di solito detti, rispettivamente, processi *bottom-up* e processi *top-down*). Per quanto riguarda la percezione sembra esserci una costante interazione tra i due tipi di processi e una descrizione del processo percettivo in questi termini è fornita ad esempio da Neisser in questo modo:

> *le strutture cognitive cruciali per l'attività visiva sono gli schemi anticipatori che preparano il percettore ad accettare determinati tipi di informazioni piuttosto che altri* [...]. *Dal momento che possiamo vedere ciò che sappiamo come cercare, sono questi schemi (insieme con l'informazione effettivamente disponibile) che determinano ciò che verrà percepito.* (Neisser 1981, p. 44)

Di conseguenza, per quanto riguarda le immagini mentali, sembra esserci consenso sul considerarle come frutto di un processo di elaborazione che parte dai prodotti della percezione organizzati in modo sistematico rispetto alle conoscenze disponibili. Con le parole di Neisser, le immagini mentali sono

> *le immagini come le risposte interpretate dei processi percettivi, le quali sono poi ulteriormente prese in esame dalle strutture concettuali di ordine superiore, prese in carico dai sistemi di conoscenza organizzati in memoria semantica e confrontate con le informazioni possedute stabilmente dal soggetto nella memoria a lungo termine.* (*Ibidem*, p. 30)

Possiamo sintetizzare quanto detto finora con la definizione operativa di immagine mentale data da Finke:

> [*l'*]*invenzione o la ricostruzione mentale di un'esperienza che, almeno per alcuni aspetti assomiglia all'esperienza di un oggetto o di un evento che si sta realmente percependo, sia congiuntamente che in assenza di stimolazioni dirette.* (Finke 1989, cit. da Massironi 1995 p. 47)

Questa definizione esprime il legame stretto tra immagini mentali e percezione; per analizzare meglio questo legame, consideriamo la distinzione tra l'oggetto fisico e l'oggetto fenomenico, così come viene introdotta da Massironi (1995, p. 49 segg.).

Il primo, l'oggetto fisico, è l'oggetto in sé e, come tale, origine di dati sensoriali (informazioni visive, uditive, ecc.) indipendentemente dal soggetto che lo percepisce. Il secondo, oggetto fenomenico, è da intendersi come il risultato delle operazioni di organizzazione, ristrutturazione, aggregazione, ecc. Operazioni che costituiscono il processo percettivo compiuto dal soggetto sui dati sensoriali e che danno luogo all'oggetto come lo vediamo, ossia al rendimento percettivo, come dicono gli esperti. Ed è tale oggetto fenomenico che è all'origine della concettualizzazione dello spazio.

Esperimenti classici mostrano l'importanza di questa distinzione; ad esempio il caso delle illusioni ottiche, ma anche le differenze riscontrate nel caso di esperienze riguardanti la ricostruzione mentale di configurazioni. In particolare il caso delle forme 'ben organizzate' che richiedono lo stesso tempo di trattamento anche al crescere degli elementi. Le immagini mentali, in quanto prodotto dell'elaborazione di percezioni, sembrano dunque essere legate agli ‘oggetti fenomenici’ piuttosto che all’oggetto fisico. Ovvero le immagini mentali in un processo circolare e continuo (a spirale) trattano materiale già elaborato dal sistema percettivo e poi modificato dal trattamento e immagazzinamento mnestico. (*Ibidem*, p. 56)

5. – Realtà e Geometria

Dopo la breve divagazione su percezione ed immagini mentali, torniamo ai nostri esempi e alle difficoltà che si possono incontrare nel risolvere problemi come quelli proposti, che solo apparentemente possono considerarsi semplici. In entrambi i casi, per molti dei soggetti coinvolti – studenti che partecipavano alla gara matematica, o studenti che rispondevano al test o all’intervista – le capacità di visualizzazione non erano sufficienti a risolvere i problemi posti. Potremmo dire che l’immagine mentale evocata dal problema non sembrava essere adeguata per permettere una risposta, in altre parole possiamo dire che per molti l’oggetto fenomenico, risultato dell’esperienza comune di percezione, non sembrava aver generato un’immagine mentale, di un cono o di un cubo, adeguata ad elaborare una risposta. Tornando alla distinzione tra oggetto fenomenico e oggetto fisico, dovremo dunque aggiungere un ulteriore elemento, in relazione con gli altri due: l’oggetto geometrico, inteso come il concetto formalizzato dalla geometria e elemento di riferimento per la soluzione di problemi come quelli proposti.

In questo modo si mette a fuoco il problema chiave che riguarda l’educazione geometrica e il suo rapporto con la visualizzazione: intendo la distinzione tra lo sviluppo e l’elaborazione di concetti spaziali, così come emerge dall’esperienza quotidiana dello spazio fisico nel quale viviamo e lo sviluppo e l’elaborazione di concetti geometrici così come sono formalizzati dalla geometria in quanto teoria matematica.

Ovviamente, il legame tra concettualizzazione dello spazio e concettualizzazione in geometria è molto stretto, ma la distinzione tra i due ambiti è necessaria per comprendere non solo i punti di contatto, ma anche le differenze e di conseguenza le difficoltà che emergono. La complessità della relazione tra geometria ed esperienza fisica è stata più volte affrontata nella letteratura riguardante l'educazione matematica (Vinner, Herschcovitz, 1983; Herschcovitz, 1989; Vinner, 1991; Clements, Battista, 1992) e recentemente da Houdement, Kuzniak (2003) e da Kuzniak (2013).

L'analisi fine del rapporto tra concettualizzazione spontanea dello spazio e concettualizzazione in geometria risulta fondamentale per una corretta interpretazione del ruolo della visualizzazione nel ragionamento geometrico, ovvero per dar ragione di ciò che spesso in modo un po' troppo semplicistico, è classificato come intuizione geometrica e che troppo spesso e in modo superficiale è considerata una abilità innata. Le conseguenze di questo modo di considerare la visualizzazione in geometria portano fatalisticamente a dividere gli allievi in quelli che *vedono* e in quelli che *non vedono* e dunque a far svanire il problema didattico di un possibile intervento educativo. Cerchiamo allora di analizzare meglio la natura dei concetti geometrici e dei processi mentali coinvolti nella soluzione di problemi geometrici come quelli presentati sopra, per cercare di capire come si potrebbe intervenire in modo adeguato.

6. – La nozione di Concetti Figurali

Vorrei cominciare con due citazioni che riprendo da Hans Freudenthal e che mi sembra descrivano molto bene la complessità del pensiero geometrico riconducibile alla doppia natura della geometria intesa come disciplina ed in particolare come disciplina scolastica.

> *I would rather ask what geometry is on the lowest level, the bottom level? ... Geometry is ... grasping the space in which the child lives and moves. The space that the child learns to know, explore, conquer in order to live, breathe and move better in it.* (Freudenthal 1973, p. 403)
> *In fact, if experimental geometry means that the student makes experiments, then a great part of his mathematical activity should be experimental, as is the activity of the creative mathematician. If it should remind us of experimental physics, it is wholly mistaken.* (*Ibidem*, p. 405)

Freudenthal riconosce l'origine della concettualizzazione geometrica nell'esperienza dello spazio fisico nel quale viviamo, ma chiarisce anche i limiti del riferimento alla realtà. Similmente si esprime Laborde:

> *Le savoir géométrique s'intéresse à deux champs de savoir: l'espace matériel, voir physique et l'espace théorique qui – après la découverte des géométries non-euclidiennes – se centre sur l'analyse de relations logiques antre des énoncés, relations déroulantes partialement de l'analyse de l'espace matériel.* (Laborde, 1988 pp. 341-45)

Anche se il legame è innegabile, una netta distinzione deve essere fatta tra lo spazio fisico nel quale avvengono le nostre esperienze e lo spazio astratto ed ideale della geometria. Così scriveva Henri Poincaré:

> *On voit que l'expérience joue un rôle indispensable dans la genèse de la géométrie: mais ce serait une erreur d'en conclure que la Géométrie est une science expérimentale, même en partie.* (Poincaré 1902, p. 90)
> [...] *les principes de la géométrie ne sont pas des faits expérimentaux* [...]. *Quelque péremptoires que me paraissent les raison déjà données, je crois devoir insister parce qu'il y a là une idée fausse profondément enracinée dans bien d'esprits.* (*Ibidem*, p. 92) ([2])

Certo è che la geometria, come teoria matematica, non dipende in alcun modo dalla verità o meno di una sua interpretazione in termini di spazio fisico, ma la geometria non può fare a meno di assumere significato proprio come scienza dello spazio reale. Il legame tra oggetti geometrici e realtà resta dunque molto stretto, in particolare il rapporto tra oggetti geometrici e oggetti fisici, o meglio oggetti fenomenici, come appena detto.

Per questo motivo i concetti geometrici non possono essere considerati puri concetti ma conservano aspetti figurali, rappresentabili

([2]) Ma la lunga e complessa discussione che Poincaré dedica a questo problema ne testimonia la rilevanza in una prospettiva epistemologica, la stessa nella quale ritroviamo qualche anno più tardi gli studi di Jean Piaget e Bärbel Inhelder (1947). Il secolo XIX e l'inizio del XX sono stati caratterizzati da un generale interesse dei matematici per il problema della natura delle idee geometriche; articoli di ricerca che introducono nuove idee trattano spesso della loro origine sottolineandone il legame con l'esperienza . Per una discussione di questo tema rimando al contributo di Umberto Bottazzini (2001).

pittoricamente, provenienti dalla loro origine, lo spazio reale. Ad esempio la retta o il cerchio acquistano nel processo di concettualizzazione simultaneamente caratteri di concetto, astrazione delle proprietà di rettilineo o di rotondo, e di immagine, provenienti dall'esperienza (la percezione del bordo di un tavolo o di una ruota), di modo che il concetto geometrico risultante sembra ricondursi contemporaneamente a due componenti, la componente figurale riconducibile all'esperienza sensoriale e la componente concettuale riconducibile al processo di astrazione di caratteristiche comuni. In altri termini, nel ragionare in geometria i concetti in gioco, le figure e le relazioni geometriche, sono caratterizzati da una duplice natura, a un tempo logica e spaziale, simultaneamente concettuale e figurale. Ci riferiremo a tali entità mentali con il termine introdotto da Fischbein *Figural Concepts*. Traduciamo tale termine con *Concetti Figurali*. I concetti figurali sono caratterizzati dal fatto di essere

> *mixture of two independent, defined entities that is abstract ideas (concepts), on one hand, and sensory representations reflecting some concrete operations, on the other.* (Fischbein 1993, p. 140)

Secondo tale ipotesi, possiamo interpretare il ragionamento geometrico come interazione tra i due aspetti, quello figurale e quello concettuale. L'efficienza e la flessibilità del ragionamento sono allora da intendersi in termini di armonia tra questi due aspetti, mentre difficoltà ed errori possono essere interpretati in termini di disarmonia o conflitto (*Ibidem*, p. 150).

Dal punto di vista educativo assume importanza studiare tali processi interattivi e come sia possibile arrivare ad una buona armonizzazione, in particolare ha importanza delineare le variabili in gioco sulle quali sia possibile intervenire a livello didattico.

Consideriamo dunque come quadro di riferimento per descrivere la natura dei concetti geometrici quello introdotto da Fischbein (1993) e sviluppato in (Mariotti 1992) ed interpretiamo i due esempi introdotti precedentemente.

Per quanto riguarda il problema del cono e del cappio, de Finetti si chiedeva: "non è forse ovvio che il filo si dispone secondo *la linea più* *breve* (o, come si dice, 'geodetica') e che la linea più breve *è la retta* (ossia: la linea che diventa retta spianando il mantello del cono" (de Finetti L 1967, p. 12; il corsivo è nel testo). De Finetti interpretava poi la difficoltà osservata in termini di frattura tra esperienza del mondo fisico ed esperienza scolastica, in particolare riconduceva la difficoltà alla separazione tra quel molto che è stato già appreso e le nozioni teoriche che vengono relegate "nel limbo delle astrazioni scolastiche". In questo modo metteva in chiara evidenza il problema della mancata armonizzazione tra una componente figurale ed una componente concettuale, ossia l'inadeguatezza del controllo teorico sulle immagini, ed in particolare sulle immagini mentali, che la situazione evocava; controllo concettuale che permette in primo luogo di trasformare la domanda riguardante una situazione tridimensionale (un cono e un cappio) in una domanda riguardante una situazione bidimensionale (il mantello del cono, ossia la sua superficie, e la curva corrispondente al cappio); in realtà, il passaggio dall'immagine di un solido alla sua superficie (di solito parliamo di sviluppo di un solido) risulta un processo molto complesso (Mariotti 2005) e molto poco spontaneo. Certo, c'è un problema di inadeguatezza dell'intervento didattico, ma si tratta di capire meglio in cosa possa consistere un intervento opportuno.

Per comprendere meglio, consideriamo il secondo esempio e continuiamo l'esperimento mentale che abbiamo iniziato. Proviamo a seguire un ragionamento geometrico che cerca di chiarire la mutua relazione tra le diagonali di un cubo.

Sempre utilizzando solo l'immagine mentale del cubo evocata dalla domanda, consideriamo due delle diagonali del cubo e i vertici che le

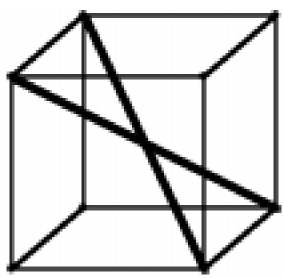


Figura 3. Due diagonali di un cubo

individuano, questi sono anche i vertici di un quadrilatero che ha per diagonali le due diagonali del cubo. Una volta individuato, è possibile focalizzare l'attenzione su questo quadrilatero e identificare i suoi lati rispettivamente come una coppia di spigoli (paralleli) del cubo e come una coppia di diagonali di due facce (parallele) del cubo. Tutto questo ci dice che il quadrilatero è un parallelogrammo con coppie di lati opposti di lunghezza diversa, dunque le sue diagonali si incontrano ma non sono perpendicolari. In realtà, il quadrilatero è un rettangolo, perché i suoi lati consecutivi appartengono a due facce adiacenti del cubo, ma ciò poco importa perché è proprio il fatto che avendo i lati a coppie paralleli e lati consecutivi diversi, il quadrilatero non può avere le diagonali perpendicolari.

Una volta completata la nostra riflessione, possiamo domandarci che cosa avviene dell'immagine mentale del cubo mentre elaboriamo questo ragionamento geometrico, in particolare che cosa accade all'immagine delle due diagonali, immagine che prima non si riusciva a mettere a fuoco. L'esperienza, ripetuta molte volte con soggetti diversi (Mariotti 2005), mostra che a seguito del ragionamento geometrico, anzi proprio mentre tale ragionamento è elaborato, l'immagine mentale del cubo subisce un processo di trasformazione: l'elaborazione concettuale del cubo e delle mutue relazioni tra spigoli e diagonali, porta ad una conseguente rielaborazione della componente figurale del cubo, di modo che alla fine l'armonia tra figurale e concettuale rende disponibile un'immagine mentale del cubo diversa da quella evocata precedentemente, e soprattutto perfettamente adeguata a rispondere alla domanda, tanto che si ha la sensazione di 'vedere' l'angolo tra le due diagonali e di riconoscerlo come 'non retto'. A generare tale immagine non è stata un'esperienza diretta, ma un'esperienza mentale mediata da un'elaborazione concettuale, il cui punto chiave è dato dalla individuazione del quadrilatero e della relazione geometrica tra i suoi lati; il ragionamento geometrico si è svolto a livello concettuale, ma mantenendo l'armonia tra componente figurale e componente concettuale, ha trasformato l'immagine mentale del cubo, fino a renderla adeguata a rispondere alla domanda.

Si comprende allora quanto complesso possa essere il percorso educativo che segua la raccomandazione espressa da Bruno de Finetti:

"Bisogna assimilare e render valido ciò che la scuola dà, e che ciascuno può far sì di venirne arricchito anziché soffocato: basta che renda concrete le cose astratte fondendole con ciò che vede e che sa". (de Finetti L 1967, p. 13)

Già, ma come fondere ciò che si vede con ciò che si sa, come armonizzare la componente figurale e la componente concettuale?

Cercando di capire meglio come rendere operativa questa raccomandazione, spostiamo la nostra attenzione sul ruolo molto delicato che può svolgere la produzione o l'interpretazione di immagini, così come la sua elaborazione a fini euristici.

7. – Disegno

Se pensiamo al rapporto tra geometria e realtà, e in particolare al rapporto tra concettualizzazione geometrica ed esperienza, quale quello vissuto da un allievo nel contesto scolastico, dobbiamo riconoscere il ruolo centrale svolto da un oggetto fisico molto particolare: il disegno, ossia una traccia scritta su un foglio e che rappresenta un oggetto geometrico. Il disegno ha da sempre accompagnato il pensiero geometrico in diverse forme e con diversi ruoli: un disegno accompagna l'introduzione di un nuovo concetto geometrico, un disegno accompagna o sostituisce un testo verbale scritto che esprime un problema, un disegno è usato a supporto del processo di risoluzione di un problema. In ognuno di questi casi il disegno svolge una funzione semiotica: fornisce un mezzo per rendere in qualche modo percepibile e comunicabile un concetto geometrico, altrimenti per sua natura non immediatamente ostensibile. Si tratta di una caratteristica comune a tutti i concetti della matematica. La natura intrinsecamente generale degli oggetti matematici fa dell'attività matematica un'attività essenzialmente simbolica. Certo è che nessuna attività matematica è pensabile senza il ricorso a una qualche traccia che in qualche modo renda percepibile ai nostri sensi (vista, tatto, udito), e per questo comunicabile, un'idea matematica o, come più spesso amiamo dire un oggetto matematico. Senza *segni* è impossibile fare matematica. Ma, allo stesso tempo, la matematica non è solo un gioco di segni, dato che un segno designa qualche cosa (Radford 2006) ed è su questo qualcosa che si dirigono i nostri pensieri.

Il ruolo chiave svolto dalle diverse forme di rappresentazione necessarie allo svolgimento di attività matematiche, ci porta con Duval (2006, p. 105) ad affermare che in matematica, a differenza di altri domini del sapere, l'origine delle difficoltà è da cercare non solo nella specificità dei concetti, ma anche nel funzionamento dei sistemi semiotici utilizzati per la presentazione di un concetto. In particolare, nel caso della geometria, prima tra tutte abbiamo la difficoltà che gli allievi hanno a distinguere un concetto geometrico dalla sua rappresentazione.

In questo senso risulta molto pertinente e chiarificatrice la distinzione introdotta da Parzysz (1988) tra *figura* e *disegno;* ossia la figura intesa come "[...] the geometrical object which is described by the text defining it" e il disegno inteso come tracciato materiale, come una delle possibili rappresentazioni di una figura. Il rapporto complesso tra figura e disegno così intesi ha trovato riscontro in molti studi che considerano il problema del disegno in ambito didattico. Di particolare interesse, anche per le proposte didattiche presentate, sono quegli studi che riguardano il disegno inteso come rappresentazione bidimensionale di oggetti tridimensionali, o più in generale il disegno tecnico, come oggetto di studio specifico in modo da esplicitare il rapporto tra disegno ed oggetto, in termini geometrici (Parzysz 1991; Audibert 1992; Gutiérrez 1996).

Lasciando da parte il problema del disegno nel caso di figure (oggetti geometrici) tridimensionali, limitiamo la nostra attenzione al caso bidimensionale, e domandiamoci cosa caratterizza il disegno di una figura geometrica, ad esempio il disegno di un triangolo inteso come rappresentazione del concetto geometrico di triangolo.

A differenza delle rappresentazioni verbali o simboliche, la rappresentazione grafica di un concetto geometrico come quello di triangolo è una particolare istanza del concetto figurale di triangolo, del quale condivide la componente figurale, pur non godendo delle proprietà fondamentali della componente concettuale, principalmente la generalità. In altre parole, il disegno di un triangolo è triangolare ([3]).

([3]) Usando la terminologia corrente che la semiotica ha ripreso da Pierce, possiamo dire anche che il disegno di un triangolo è un segno classificabile come un'icona. Per una discussione più ampia si veda (Mariotti 2005).

Si tratta, in effetti, di un caso molto particolare, estraneo ad altri domini della matematica; in algebra ad esempio, le possibili rappresentazioni del concetto di numero pari in nessun senso possono essere considerate a loro volta pari. Nel caso dei concetti geometrici, concetti figurali, le loro rappresentazioni esterne pur restando particolari condividono con l'oggetto geometrico la componente figurale, e per questo possono offrire un supporto forte, perché diretto, alla componente figurale; ma affinché tale supporto sia anche produttivo, il disegno deve essere sottoposto al controllo concettuale. Ad esempio, solo attraverso un atto mentale, un disegno può arrivare a condividere con il concetto che rappresenta, anche la generalità e fornire un contributo efficace nella soluzione di un problema. Tornerò su questo aspetto più avanti, nella discussione delle potenzialità degli ambienti di geometria dinamica.

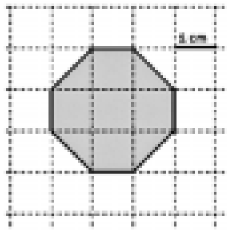
Come chiaramente descritto da alcuni studi ormai classici, il disegno ha una funzione complessa nel processo di concettualizzazione: è pratica comune introdurre un concetto geometrico fornendo esempi e questo avverrà soprattutto attraverso disegni che lo rappresentano. Si innesca così un duplice processo: da un lato la concettualizzazione è guidata da una definizione espressa verbalmente, dall'altro la concettualizzazione è guidata dall'esperienza percettiva di disegni dai quali astrarre le proprietà caratterizzanti. Come abbiamo visto, tale esperienza percettiva è frutto di un processo fortemente individualizzato che può restare completamente fuori dal controllo del soggetto, e a maggior ragione fuori dal controllo dell'insegnante. Accade così che, indipendentemente dalla definizione geometrica, il processo percettivo selezioni determinati elementi e ne tralasci altri in modo da limitare il concetto in questione, rendendo certi *elementi critici* (Vinner, Hershkowitz 1983; Hershkovitz 1989), seppure non pertinenti rispetto alla definizione matematica, indispensabili per il riconoscimento, e infine caratterizzanti il concetto stesso. Esempi classici sono quelli che includono come elemento critico la posizione della figura rispetto ad un sistema di riferimento canonico: ad esempio, l'altezza di un triangolo è riconosciuta come tale solo se nel disegno ha una *posizione verticale*. Altri esempi riguardano il riconoscimento di particolari poligoni; ad esempio, il caso del triangolo isoscele che è riconosciuto come tale solo se ha esattamente due lati uguali. Il caso del riconoscimento del triangolo isoscele fa parte di un fenomeno più ampio riguardante le difficoltà degli allievi ad accettare le classificazioni geometriche dei poligoni. È risultato ben noto che il compito della classificazione dei quadrilateri risulti particolarmente difficile (de Villiers 1994; Currie, Pegg 1998; Erez, Yerushalmy 2006; Monaghan 2000; Fujita, Jones 2007).

È possibile interpretare tale difficoltà come originata da un possibile conflitto tra componente figurale e componente concettuale. La componente concettuale, seguendo una specifica definizione geometrica, impone di considerare l'inclusione della classe dei quadrati nella classe dei rombi, e dunque impone di riconoscere un quadrato come un particolare rombo; al contrario, la componente figurale trae origine dall'esperienza percettiva che, selezionando elementi critici in relazione ai disegni, induce a differenziare nettamente un quadrato da un rombo (per una discussione più approfondita che affronta il problema della definizione nel quadro dei concetti figurali vedi Mariotti, Fischbein 1997).

Vediamo un esempio interessante che mostra la complessità del problema di riconoscimento. Consideriamo il problema seguente che compare tra i quesiti delle prove Invalsi del 2013 ([4]). Pur non essendo la rappresentazione di un poligono regolare, l'immagine proposta presenta molte simmetrie che la fanno apparire alquanto regolare. Questa apparente regolarità può costituire un elemento chiave nel riconoscimento del poligono e può indurre in errore nella scelta della risposta. In effetti, la maggioranza delle risposte (circa l'80 %, come riportato dai dati nazionali) sembra essere basata su questa inter-

([4]) La raccolta alla quale ci riferiamo è reperibile al seguente URL: http://www.invalsi.it/snvpn2013/documenti/strumenti/SNV2013_MAT_06_FASCICOLO_1.pdf I risultati che INVALSI rende pubblici sono di natura campionaria, ovviamente rappresentativi, su base statistica, dell'intera popolazione studentesca di riferimento. Le prove nelle classi-campione sono svolte in presenza di un osservatore esterno. Per maggiori dettagli è possibile consultare il Rapporto INVALSI 2013: http://www.invalsi.it/snvpn2013/rapporti/Rapporto_SNV_PN_2013_DEF_11_07_2013.pdf

D11. Giulio dice che l'ottagono rappresentato in figura ha il perimetro di 8 cm.



Giulio ha ragione? Scegli una delle due risposte e completa la frase.

☐ Giulio ha ragione perché ....

....

....

☐ Giulio non ha ragione perché ....

....

....

Figura 4. Testo del quesito come della prova INVALSI

pretazione che esaspera gli aspetti di regolarità del disegno e porta a considerarlo come la rappresentazione di un ottagono regolare. In altri termini, sembra essere accaduto che nella concettualizzazione di poligono regolare la componente figurale sia stata associata a una condizione di regolarità più generale rispetto a quella definita dalla geometria, che chiede che tutti i lati di un poligono siano di uguale lunghezza. Questa evenienza, combinata con la tendenza a regolarizzare l'immagine percepita, ben descritta dalle leggi della Gestalt, spiega come si possa essere indotti a riconoscere nel disegno un ottagono regolare.

8. – Disegnare in un ambiente di Geometria Dinamica

Le considerazioni fatte sopra si limitavano al caso di disegni nell'ambiente carta e penna, che ancora resta l'ambiente di disegno più familiare per gli allievi della scuola italiana. Seppure non così diffusi come forse ottimisticamente si pensava al loro primo apparire, ormai da anni sono disponibili ambienti grafici digitali, e in particolare sono disponibili ambienti software di geometria dinamica. Attualmente ne esistono diversi. Tanto per citare i più famosi, ai classici *Cabri*

(Laborde, Straesser 1990) ([5]), *The Geometer's Sketchpad* (Jackiw 2001) ([6]), si è recentemente affiancato *GeoGebra* ([7]). Questi software presentano differenze più o meno grandi rispetto alle funzionalità base, ma hanno tutti una caratteristica comune: la dinamicità, ossia la possibilità di muovere e trasformare le immagini prodotte sullo schermo. Tale funzione base, detta *trascinamento*, è riconducibile ad un principio che solo superficialmente può sembrare semplice ed immediatamente chiaro, ma che in realtà è assai complesso. Cercherò di chiarire come sia importante didatticamente rendersi conto di tale complessità per ben sfruttare potenzialità che un AGD può offrire nella pratica didattica.

8.1 – *La funzione trascinamento*

Lo spazio grafico virtuale è costituito dallo schermo di un computer, da un particolare ambiente software che offre strumenti per disegnare e da una particolare funzione che trasforma le immagini disegnate sullo schermo. Tale funzione, per come è realizzata ed in particolare per come è attivata, agendo sull'immagine che appare sullo schermo attraverso mouse, dà all'utilizzatore la sensazione di trascinare il disegno e per questo è detta funzione di *trascinamento*.

L'effetto del trascinamento è dovuto al fatto che la macchina realizza una successione di nuove immagini, ciascuna ottenuta tramite la stessa procedura di costruzione, ma ogni volta a partire da un nuovo punto base. Il numero elevato di immagini e la velocità della loro apparizione sullo schermo permettono di ottenere l'effetto visivo di una immagine in movimento. Il movimento è percepito sulla base del gioco tra proprietà che variano e proprietà che non variano; sono queste ultime, dette *invarianti*, che costituiscono l'identità della immagine sullo schermo, ossia ciò che permette di riconoscerla come un oggetto (fenomenico) in movimento e che permettono eventualmente di rico-

([5]) http://www.cabri.com
([6]) http://www.chartwellyorke.com/sketchpad/x24070.html
([7]) http://www.geogebra.org

noscerla come la rappresentazione di un oggetto geometrico. La dialettica tra variazione e invarianti che sta alla base del sistema di rappresentazione realizzato in un ambiente di geometria dinamica (AGD) è la stessa che sta alla base di ogni processo di categorizzazione; è tale dialettica che permette di riconoscere come istanze dello stesso concetto elementi anche molto diversi tra loro. Osserviamo più da vicino le caratteristiche degli invarianti di un AGD, per comprendere la maggiore ricchezza semiotica offerta da tali ambienti rispetto all'ambiente carta e penna. In primo luogo, se consideriamo la caratterizzazione data di un concetto geometrico come *concetto figurale*, una figura dinamica di un AGD costituisce una rappresentazione che non solo supporta la componente figurale, ma offre anche un supporto alla componente concettuale: mediante il trascinamento infatti è possibile avere accesso non solo ad una particolare istanza del concetto, ma ad una vasta gamma di esempi tutti tra loro legati dalla comune definizione realizzata dalla procedura di costruzione. In particolare, mediante la sua dinamicità un disegno in un AGD riesce a rappresentare la generalità di un concetto figurale, seppure non completamente. Il controllo concettuale che per un disegno in carta e penna chiedeva all'utilizzatore un atto mentale, spesso molto, troppo difficile per lui, nel caso di un AGD viene ad essere a carico della macchina, che automaticamente varia ciò che non è definito ma mantiene ciò che è definito esplicitamente dai passi di costruzione. Ogni immagine che appare sullo schermo ha dunque una realtà potenziale che offre una rappresentazione, ad un tempo figurale e concettuale, dell'oggetto geometrico in gioco. Ma c'è di più, le proprietà invarianti di un'immagine dinamica hanno un corrispettivo nei comandi utilizzati per la loro realizzazione, di modo che è possibile stabilire in modo esplicito una relazione tra proprietà caratteristiche di una immagine e comandi utilizzati nella costruzione.

Si comprende così quanto grandi siano le potenzialità offerte da simili ambienti grafici rispetto al problema della concettualizzazione e del suo rapporto con la definizione in geometria: è possibile promuovere immagini mentali più flessibili e meno influenzabili da stereotipi, ma anche rendere accettabili quelle classificazioni inclusive che generano tante difficoltà. Ad esempio, la costruzione di un triangolo isoscele come triangolo con due lati uguali, permetterà di osservare, tra le tante immagini generate da tale costruzione, le immagini che rappresentano i casi particolari dei triangoli equilateri (Bardone et al. 1998; Fujita, Jones, 2007; Fujita 2012), rendendo accettabile il considerare un triangolo equilatero come un caso particolare di triangolo isoscele.

Questi particolari sistemi di rappresentazione sembrano offrire grandi potenzialità per sviluppare quella visione dinamica auspicata da de Finetti, e che lui chiamava "ultravedere" (de Finetti L 1967, p. 30):

> *Il punto che dobbiamo ora imprimerci bene in testa è proprio che, anche se forse più che mai nella matematica, il modo più semplice e appropriato per rispondere a un problema particolare consiste nel risolvere un problema molto (o moltissimo) più generale.* [...] *l'aspetto più saliente e istruttivo consiste non tanto nella maggiore generalità in e per sé quanto piuttosto nel fatto che essa si consegue vedendo il problema sotto una forma che si può dire* ***dinamica*** *(quale cercano di dare anche dei semplici ausili didattici, come le figure deformabili).* (*Ibidem*, p. 31)

Certamente un ambiente di geometria dinamica (AGD) offre un ausilio assai più sofisticato di quanto non faccia una figura deformabile come un quadrilatero articolato costruito con aste incernierate. È per questo che certamente l'uso didattico di un AGD avrebbe trovato in de Finetti un sostenitore, proprio come mezzo per favorire quella visione dinamica nella soluzione ai problemi da lui più volte auspicata.

Un uso didattico efficace di tali ambienti, proprio per il loro carattere sofisticato, presuppone una progettazione attenta delle situazioni didattiche che ne vogliano sfruttare le potenzialità.

La letteratura in questo settore è ampia e tocca vari aspetti connessi all'uso delle tecnologie ed in particolare all'uso didattico di un AGD (Laborde 2000; Hollebrands et al. 2007; Clements et al. 2008; Ruthven et al. 2008), ma qui desidero spostare l'attenzione su un ulteriore aspetto, ancora legato alla dinamicità e che credo chiarisca come le esperienze in un AGD possano favorire lo sviluppo di competenze specifiche riconducibili a ciò che comunemente chiamiamo visualizzazione in geometria. Si tratta dell'uso di immagini dinamiche per la soluzione di problemi aperti che chiedono di formulare congetture.

8.2 – *Formulare congetture in un AGD*

Gli invarianti, ossia le proprietà geometriche che si mantengono per trascinamento, sono di due tipi: il primo è costituito dalle proprietà definite tramite i comandi usati per effettuare la costruzione di partenza, il secondo è costituito dalle proprietà che sono deducibili delle proprietà costruite all'interno della teoria geometrica classica. Ad esempio, la costruzione di un poligono che abbia due lati paralleli provocherà il fenomeno di una figura che muovendosi mantiene tali lati paralleli; diremo allora che il parallelismo tra i due lati è un *invariante per trascinamento*. Inoltre, la costruzione effettuata provocherà anche il fenomeno di *mantenere tutte le conseguenze del parallelismo tra i due lati, intendendo per conseguenze le proprietà che sono geometricamente derivabili (deducibili nella teoria) dalla proprietà costruita*. Anche queste conseguenze, ossia le proprietà derivate, costituiranno degli invarianti per trascinamento ([8]). Ad esempio, se oltre a due lati paralleli costruiamo anche i due assi di tali lati, otteniamo una figura che mostra chiaramente il parallelismo tra tali assi, anche se non sono stati esplicitamente costruiti come paralleli.

Alla simultaneità delle proprietà invarianti corrisponde la relazione di conseguenza logica che lega le proprietà invarianti per costruzione (premesse) alle proprietà invarianti derivate (conseguenza); la distinzione tra premesse e conseguenza ha un corrispettivo nella asimmetria che sussiste tra i due tipi di proprietà invarianti: proprietà invarianti che possiamo dire *dirette*, cioè definite esplicitamente nella costruzione, e proprietà invarianti che possiamo dire *indirette*, ossia quelle che appaiono invarianti nel trascinamento senza però essere state definite nella costruzione. Quello che appare sullo schermo è

([8]) Come discusso ad esempio da Hoelz (1996) o da Straesser (2001) caratteristiche specifiche della realizzazione informatica del micromondo possono indurre regolarità e far apparire invarianti per trascinamento proprietà che non sono conseguenze delle proprietà di costruzione compatibili con la Geometria Euclidea. Si tratta di casi limitati e per non appesantire il discorso qui non ne terremo conto anche se aprono un interessante filone di ricerca riguardo alla nuova geometria che da tali esperienze potrebbe avere origine.

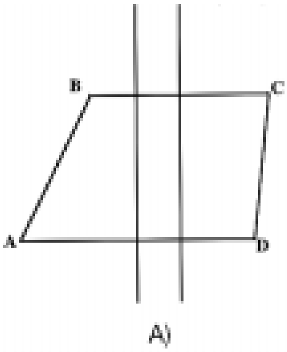


Figura 5a. L'immagine che si ottiene dalla costruzione dei due assi

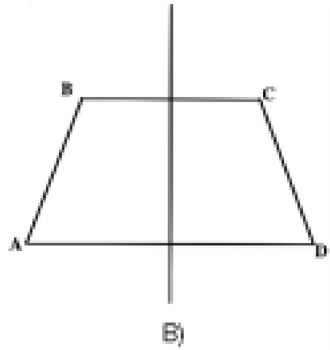


Figura 5b. Cosa si ottiene cercando di far coincidere i due assi

l'invarianza della relazione tra invarianti (invarianti di costruzione e invarianti derivati) e questo invariante, che possiamo dire di secondo livello, corrisponde nella geometria alla validità logica della relazione di implicazione che lega gli invarianti di costruzione con gli invarianti derivati.

Si comprende allora la complessità di interpretazione che si presenta all'osservatore, e in particolare ad un allievo poco esperto di geometria, quando di fronte ad un'immagine che si muove, sia richiesto di formulare una congettura. Nell'esempio della costruzione precedente una congettura possibile potrebbe essere: "in un quadrilatero, se due dei suoi lati sono paralleli allora i loro assi sono paralleli". In un compito di questo tipo, la complessità sta nel fatto di rendersi conto che, nonostante le proprietà invarianti siano percepite simultaneamente, esiste tra queste una gerarchia logica indotta dalla costruzione. In effetti, quello che si richiede è una interpretazione del comportamento delle diverse parti della figura sotto l'azione del trascinamento, che tenga conto della distinzione tra movimento diretto ed indiretto.

Nonostante l'indubbia difficoltà di mantenere il controllo sulla diversa natura delle proprietà invarianti, mi pare che appaia chiaramente la potenzialità didattica offerta dalla natura tutta particolare della rappresentazione di oggetti geometrici in un AGD. Strategie diverse di esplorazione sono state studiate e classificate (Arzarello et al. 2002) mettendo in luce non solo l'elaborazione geometrica delle relazioni tra invarianti di costruzione ed invarianti derivati, ma l'emergere di nuove categorie di invarianti insieme a particolari modi di trascinamento. Si parla dunque di strategie di invarianti molli (*soft*) o robusti (*robust*), dove un invariante molle è una proprietà ottenuta intenzionalmente, sotto il controllo percettivo, in modo da permettere che l'insieme delle figure possibili sia costruito empiricamente, ma sotto il controllo del solutore (Laborde 2005). Si parla anche di trascinamento guidato (*lieu muet*, o *dummy locus dragging*) (Arzarello et al. 2002; Lopez-Real, Leung 2006; Baccaglini-Frank, Mariotti 2010) rispetto al quale le condizioni sotto le quali una certa proprietà si mantiene vengono ad essere rappresentate come traiettorie percorse dal punto variabile. Ritroviamo così quel pensar per *luoghi* di cui parla de Finetti (L 1967, p. 36), per descrivere il modo di "affrontare le questioni una per volta" quando le condizioni devono valere simultaneamente: ogni condizione non individua la soluzione ma darà "il luogo dei punti soddisfacenti a tale condizione".

9. – Conclusioni: educare a vedere

Per concludere vorrei tornare su due aspetti che mi pare sintetizzino bene il discorso didattico di de Finetti e costituiscano per noi ancora una chiara indicazione rispetto alla quale orientare la ricerca in didattica della matematica. Il primo aspetto riguarda la centralità del risolvere problemi: "risolvere un problema è sempre di per sé uno sforzo istruttivo" scriveva de Finetti (L 1967, p. 3). Il secondo riguarda l'importanza della geometria, proprio per quel ruolo chiave giocato dalla rappresentazione geometrica di un problema: "Qualunque risultato matematico riesce più chiaro [...] rappresentandolo geometricamente in modo opportuno" (*Ibidem*, p. 4).

Alla luce di quanto discusso sopra possiamo osservare però che quanto sostenuto da de Finetti, in modo lucido e argomentato, sembra emergere da una riflessione acuta e sensibile del pensiero matematico, basata forse su un'attenta analisi introspettiva, oltre che su un'analisi epistemologica, ma non tanto da una osservazione e da uno studio sistematico dei processi messi in atto dagli allievi nel contesto scolastico.

Quello che forse appare non essere stato sufficientemente considerato è il problema del come si possa arrivare a perseguire certi obiettivi. La riflessione didattica offre suggerimenti che seppure condivisibili restano troppo generici per risultare operativi, vista la complessità del problema.

Ecco come egli si esprime a proposito di cosa si deve fare perché il "saper vedere" serva a veder meglio:

> [...] *occorre avere immaginazione, e farne uso per saper vedere ogni esempio e problema.*
> [...]. *Se un'idea risulta particolarmente importante* [...] *perché non fissarla meglio in testa (ed anche, perché no, sulla carta) sotto forma di enunciato preciso, di regola comoda, di convenzione servizievole* [...]. *Basta solo considerare tutto ciò come continuazione delle riflessioni precedenti.* (*Ibidem*, p. 21)

Più che suggerimenti sul cosa fare abbiamo una lista di richieste la cui attuazione in classe pone complessi problemi didattici per i quali non è immediatamente chiara la soluzione.

Non deve però stupire tanto ottimismo, era perfettamente in sintonia con quanto in quel momento si andava sviluppando nel campo della didattica della matematica e il rapporto sul congresso di Exeter (de Finetti A 1973l) ci offre un documento molto interessante in questo senso. La selezione degli interventi e i commenti riportati mostrano come de Finetti si collocasse nel contesto della ricerca internazionale, con una particolare sensibilità rispetto ai problemi di innovazione per il curriculum, lasciandosi però incuriosire e affascinare da problematiche più squisitamente psicopedagogiche come quelle emerse nel gruppo su *La psicologia dell'apprendimento della Matematica*, in particolare quelle proposte dal presidente del gruppo, Efraim Fischbein (*Ibidem*, p. 20) sul tema dell'intuizione e del rapporto tra intuizione e formalizzazione.

Quanto ho cercato di mostrare, dunque, è come la ricerca svolta fino ad ora sia in sintonia con il discorso didattico di de Finetti: mettendone in luce la complessità offre anche qualche strumento in più per delineare qualche possibile soluzione ai problemi didattici che si aprono. In questo senso sono da considerare le analisi svolte nei paragrafi precedenti, e soprattutto l'interpretazione del vedere in geometria che abbiamo cercato di caratterizzare sulla base della nozione di *Concetti Figurali.* In particolare, un'interpretazione che considera lo sviluppo del pensiero geometrico come il raggiungimento di abilità e competenze che permettano una interpretazione adeguata delle immagini disponibili e una loro elaborazione efficace rispetto alla soluzione del problema. Questo significa curare uno sviluppo 'armonico' dei concetti geometrici di modo che la componente figurale si mantenga in armonia con la componente concettuale, ossia facendo sì che nell'elaborazione di un ragionamento geometrico si possa disporre di immagini vivide e flessibili e di un controllo teorico adeguato – permettendo ad esempio di fronteggiare possibili interferenze di stereotipi.

Il ruolo del disegno, sia come prodotto che come processo, emerge chiaramente dai numerosi studi presenti in letteratura. Pur tenendo in conto i possibili ostacoli che il disegno, e in generale le rappresentazioni esterne, possono creare, il disegno può essere considerato come un elemento chiave che si pone tra l'oggetto fenomenico e il concetto geometrico e alimenta la dialettica tra componente figurale e componente concettuale.

Infine, un settore particolarmente promettente sembra essere quello legato all'uso del disegno in un AGD. In generale, risolvere problemi in un AGD – siano questi problemi di costruzione o problemi di congettura – richiede di mobilitare la dialettica tra componente figurale e componente concettuale per permettere un uso efficace delle immagini dinamiche disponibili. In questo senso attività di soluzione di problemi in un AGD appaiono particolarmente promettenti, proprio perché offrono esperienze significative per lo sviluppo di abilità e competenze specifiche nell'ambito della geometria, che possono essere fruttuosamente reinvestite in altri ambiti della matematica, ad esempio ogni qualvolta sia necessaria una interpretazione *geometrica* di immagini dinamiche. È per questo che ci piace pensare che questi nuovi strumenti didattici avrebbero attratto la curiosità e la fantasia di de Finetti, che ne avrebbe immediatamente colto le potenzialità didattiche per raggiungere obiettivi ambiziosi di educazione al pensiero matematico a lui cari.

BIBLIOGRAFIA

ALEXANDROV, A.D. (1994), Geometry as an element of culture, in *Selected lectures from the 7th International Congress on Mathematical Education*: Québec, 17-23 August 1992, Presses de l'Université Laval.

ARCAVI, A., & HADAS, N. (2000), Computer mediated learning: an example of an approach, *International Journal of Computers for Mathematical learning*, 5(1), 2000, 25-45.

ARZARELLO, F., OLIVERO, F., PAOLA, D. & ROBUTTI, O. (2002), A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments, *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 43, n. 3, 66-72.

AUDIBERT, G. (1986), L'enseignement de la géométrie de l'espace, *Bullettin APMEP*, n. 355, 501-526.

BISHOP, A. (1979), Visualizing and mathematics in a pre-technological culture, *Educational Studies in Mathematics*, 10, 135-146.

BISHOP, A. (1983), Space and geometry, in Lesh, R., Landau, M. (Eds.) *Acquisition of Mathematics concept and processes*, New York: Academic Press, 176-203.

BISHOP, A. (1989), Review of research on mathematics education, *Focus on learning problems in mathematics*, 11.1, 7-15.

BOTTAZZINI, U. (2001), I geometri italiani e i Grundlagen der Geometrie di Hilbert, *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana*, s. 8, 4-B, 545-570.

CLEMENTS, D.H., BATTISTA, M.T. (1992), Geometry and spatial reasoning, in Grouws, D.A. (Ed.) *Handbook of reasearch on mathematics teaching and learning*, New York: Macmillan Pub. Co.

CLEMENTS, D.H., SARAMA, J., YELLAND, N.J. & GLASS, B. (2008), Learning and teaching geometry with computers in the elementary and middle school, in M.K. Heid & G. Blum (Eds.), *Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics: Research syntheses.* vol. 1, IAP, 109-154.

CURRIE, P., PEGG, J. (1998), Investigating students understanding of the relationships among quadrilaterals, in C. Kanes, M. Goos and E. Warren (Eds.), *Teaching Mathematics in New Times, Proceedings of the Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australia*, 1, 177-184.

DE VILLIERS, M. (1994), The role and function of a hierarchical classification of quadrilaterals, *For the Learning of Mathematics*, 14(1), 11-18.

DENIS, M. (1991), *Image & Cognition, Harvester Wheatsheaf* (Trad. inglese di Denis, M. *Image et cognition*, Paris : Presses Universitaires de France, 1989), Ney York: Harvester-Weatcheaf.

DUVAL, R. (2006), A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics, *Educational Studies in Mathematics*, 61 (1-2), 103-131.

EISENBERG, T., DREYFUS, T. (1991), On reluctance to visualize in mathematics, in Zimmermann, W. & Cunnigham, S. (Eds.), *Visualization in teaching and learning mathematics*, MAA Notes, N. 19, 25-38.

Erez, M., Yerushalmy, M. (2006), “If you can turn a rectangle into a square, you can turn a square into a rectangle”: young students’ experience the dragging tool, *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 11(3), 271-299.

Finke, R.A. (1989), *Principles of Mental Imagery*, Cambridge: The MIT Press (MA).

Fischbein, E. (1993), The theory of figural concepts, *Educational Studies* 24 (2), 139-162.

Freudental, H. (1973), *Mathematics as an educational task*, Dodrecht: Reidel.

Fujita, T., Jones, K. (2007), Learners’ understanding of the definitions and hierarchical classification of quadrilaterals: towards a theoretical framing, *Research in Mathematics Education*, 9 (1-2), 3-20.

Gutiérrez, A. (1996), Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework, in *Proceedings of PME*, 18.1, 3-20.

Hadamard, J. (1954), *The psychology of invention in the mathematical field*, New York: Dover.

Healy, L., Hoyles, C. (1996), Seeing, doing and expressing: An evaluation of task sequences for supporting algebraic thinking, in *Proceedings of PME*, 18.3, 3-67.

Hersckovitz, R. (1989), Visualization in geometry. Two sides of the coin, *Focus on learning problems in mathematics*, 11, n. 1, 61-76.

Hoelz, R. (1996), How does “dragging” affect the learning of geometry, *International Journal of Computer for Mathematical Learning*, 1.2, 169-87.

Hollebrands, K., Laborde, C., & Straesser, R. (2007), The learning of geometry with technology at the secondary level, in *Research on technology in the learning and teaching of mathematics: Syntheses and perspectives,* Greenwich, CT: Information Age Publishing, 155-205.

Houdement, C., Kuzniak, A. (1999), Un exemple de cadre conceptuel pour l’étude de l’enseignement de la géométrie en formation des maîtres, *Educational Studies in Mathematics,* 40 (3), 283-312.

Jackiw, N. (2001), *The Geometers Sketchpad* (version 4.0) [Computer software], Emeryville.

Krutetskii, V.A. (1976), *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren*, Chicago: University of Chicago Press.

Kuzniak, A. (2013) Teaching and Learning Geometry and Beyond, in *CERME 8 Proceedings*, 33-49.

Laborde, C. (1988), L’enseignement de la géométrie en tant que terrain d’exploration de phénomène didactiques, *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 9, n. 3, 337-364.

Laborde, C. (2000), Dynamic geometry environments as a source of rich learning contexts for the complex activity of proving, *Educational Studies in Mathematics,* 44 (1-2), 151-161.

LABORDE, C. (2005), Robust and Soft Constructions, *Proceedings of the 10th Asian Technology Conference in Mathematics,* Korea, National University of Education, 22-35.

LABORDE, J.M., STRAESSER, R. (1990), Cabri-Géomètre: A microworld of geometry for guided discovery learning, *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 22 (5), 171-177.

LEUNG, A., BACCAGLINI-FRANK, A., MARIOTTI, M.A. (2013), Discernment of invariants in dynamic geometry environments, *Educational Studies in Mathematics*, 84.3, 439-460.

LOPEZ-REAL, F., LEUNG, A. (2006), Dragging as a conceptual tool in dynamic geometry, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 37 (6), 665-679.

MARIOTTI, M.A. (1992), Immagini e concetti in geometria, *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, 15 (9), 863-885.

MARIOTTI, M.A. (2005), *La Geometria in classe*, Bologna: Pitagora Editrice, 2005

MARIOTTI, M.A., FISCHBEIN, E., (1997), Defining in classroom activities, *Educational Studies in Mathematics*, 34, 219-248.

MARUCCI, F.S. (1995), *Le immagini mentali: teorie e processi*, Roma: La Nuova Italia Scientifica.

MASSIRONI, M. (1995), Il "fisico" e il "fenomenico" nelle immagini mentali, in F.S. Marucci, *Le immagini mentali*, Roma: NIS, 45-78.

MOATES, D.R., SCHUMACHER, G.M. (1983), *Psicologia dei processi cognitivi*, Bologna: Il Mulino (Trad. da: *An Introduction to cognitive psychology*, Belmont, 1980).

MONAGHAN, F. (2000), What difference does it make? Children views of the difference between some quadrilaterals, *Educational Studies in Mathematics*, 42(2), 179-196.

NEISSER, U. (1981), *Conoscenza e realtà*, Bologna: Il Mulino (Trad. da: *Cognition and reality: Principles and implications of cognitive psychology*. New York: WH Freeman/Times Books/Henry Holt & Co., 1976).

PARZYSZ, B. (1988), Knowing vs seeing. Problems of the plane representation of space geometry figures, *Educational Studies in Mathematics*, 19, 266-299.

PARZYSZ, B. (1991), Representation of space and students' conceptions at High School level, *Educational Studies in Mathematics*, 22, 575-593.

PIAGET, J., INHELDER, B. (1947), *La représentation de l'espace chez l'enfant*, Paris : Presses Universitaire de France.

POINCARÉ, H. (1902), *La science et l'hypothèse*, Paris : Flammarion.

PÓLYA, G. (1967), *Come risolvere i problemi di Matematica*, Milano: Feltrinelli. (Trad. da: *How to solve it*, Princeton (New Jersey): Princeton Univ. Press, 1945).

PRESMEG, N. C. (1986), Visualization in high school mathematics, *For the Learning of Mathematics*, 6 (3), 42-46.

PRESMEG, N.C. (1997a), A semiotic framework for linking cultural practice and classroom mathematics, in J. Dossey, J. Swafford, M. Parmantie and A. Dossey (Eds.), *Proceedings of the 19th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol. 1, ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education, Columbus, Ohio, 151-156.

PRESMEG, N.C. (1997b), Generalization using imagery in mathematics, in L.D. English (Ed.), *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors and images,* Mahwah, NJ, USA: Lawrence Erlbaum, 299-312.

PRESMEG, N.C. (2006), Research on visualization in learning and teaching mathematics, in *Handbook of research on the psychology of mathematics education*, 205-235.

RADFORD, L. (2006), Tre tradizioni semiotiche: Saussure, Peirce e Vygotskij, *Rassegna*, 29, 34-39.

RUTHVEN, K., HENNESSY, S., & DEANEY, R. (2008), Constructions of dynamic geometry: A study of the interpretative flexibility of educational software in classroom practice, *Computers & Education*, 51(1), 297-317.

STRAESSER, R. (2001), Cabri-géomètre: does dynamic geometry software (DGS) change geometry and its teaching and learning?, *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 6, 319-333.

VINNER, S., HERSHKOWITZ, R. (1983), On concept formation in geometry, *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 83 (1), 20-25.

VINNER, S. (1991), The role of definitions in the teaching and learning of mathematics, in D.O. Tall (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 65-81.

Maria Alessandra Mariotti
Dipartimento di Ingegneria Informatica e Scienze Matematiche,
Università degli Studi di Siena
e-mail: mariotti21@unisi.it