La Matematica nella Società e nella Cultura

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Laurent Mazliak

René Gateaux a cento anni dalla morte

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **8** (2015), n.2, p. 169–190.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2015_1_8_2_169_0>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2015.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. VIII, Agosto 2015, 169-190

René Gateaux
A cento anni dalla morte

Laurent Mazliak

Introduzione

Il 3 ottobre 2014 ricorreva il centenario della morte di René Gateaux avvenuta durante quella fase durissima dell'inizio della prima guerra mondiale chiamata la *corsa al mare*. È dunque particolarmente opportuno presentare qualche aspetto della breve vita di questo giovane matematico. Come cercherò di mostrare, studiando il caso di René Gateaux possiamo farci un'idea di quella che era all'inizio del ventesimo secolo la vita di un giovane studioso brutalmente interrotta dalla guerra; ma possiamo anche seguire la storia di un capitolo importante dell'analisi matematica del ventesimo secolo che lega in maniera sorprendente l'analisi funzionale con la moderna teoria della probabilità. Il presente articolo è una versione breve dell'articolo inglese [22], dove sono in particolare sviluppati gli aspetti matematici del lavoro di Gateaux.

Cominciamo dall'articolo fondamentale [25] di Wiener, "Differential space" dove si introduce il primo modello matematico di movimento browniano. Questo lavoro risale al 1923, ossia nove anni dopo la morte di René Gateaux. Wiener segnala nell'introduzione che al cuore della sua teoria si trova la questione dell'integrazione in spazi di dimensione infinita:

> Ora, l'integrazione in spazi di infinite dimensioni è un problema relativamente poco studiato. Salvo alcuni tentativi di ricerca di Fréchet e E.H. Moore, praticamente tutto quello che è stato fatto si deve a Gateaux, Lévy, Daniell, e all'autore di questo articolo. Di queste ricerche, forse le più complete sono quelle iniziate da Gateaux e portate avanti da Lévy nelle sue Leçons d'analyse fonctionnelle (1).

(1) Now, integration in infinitely many dimensions is a relatively little-studied problem. Apart from certain tentative investigations of Fréchet and E.H. Moore, practically all that has been done on it is due to Gateaux, Lévy, Daniell, and the author of this paper. Of these inverstigations, perhaps the most complete are those begun by Gateaux and carried out by Lévy in his Leç cons d'Analyse Fonctionnelle. ([25], p. 132).

Il libro di Paul Lévy [17] al quale si riferisce Wiener era stato pubblicato un anno prima (1922), immediatamente dopo il corso dato da Lévy nel 1919-1920 al Collège de France, sul quale torneremo più tardi. Wiener aveva scoperto il libro subito dopo la sua pubblicazione, e, essendo in Francia nell'estate 1922, ne aveva subito discusso lungamente con Lévy. Del resto, nel suo articolo del 1923, Wiener non nasconde certo questa fonte dove si trova la forma d'integrazione in dimensione infinita da lui ricercata.

La presenza del nome di René Gateaux può sorprendere. Come è possibile che i lavori di un giovanissimo matematico, morto a 25 anni, prima ancora di aver sostenuto la sua tesi di dottorato, prima di occupare qualsiasi posizione accademica, autore soltanto di qualche breve nota, si possano trovare citati nell'articolo così strategico di Wiener? Inoltre, il nome di René Gateaux è conosciuto ancora oggi (e talvolta anche dagli studenti!) attraverso la nozione di differenziale di Gateaux, che corrisponde alla derivata direzionale di una funzione di più variabili mentre il differenziale di Fréchet rappresenta la derivabilità in tutte le direzioni possibili. Tutto ciò merita senz'altro una spiegazione...

Vorrei subito rivelare la chiave principale del mistero: perché il nome di Gateaux è pervenuto fino a noi, invece di essere, come per la maggior parte dei suoi compagni di sventura, una semplice parola d'oro sulle nostre piazze (nelle splendide parole del poeta Aragon), cioè un'iscrizione sul monumento ai caduti delle nostre città? Gateaux ebbe infatti la fortuna, durante il suo breve periodo di attività, di essere in relazione con matematici di grande rilievo, come Emile Borel, Jacques Hadamard e soprattutto Vito Volterra i cui archivi, interamente conservati all'Accademia dei Lincei, costituiscono una miniera d'oro per gli storici. Questi matematici, che elevano il giovane Gateaux caduto al fronte alla dignità di un eroe, hanno facilitato la diffusione del suo nome e, fatto ancora più sorprendente, dei suoi lavori che si trovavano spesso allo stato di appunti.

Naturalmente, voglio dire subito che la figura di Gateaux non è da sopravvalutare: Gateaux non è Abel, per prendere un celebre esempio di matematico morto molto giovane. Uno dei principali insegnamenti del nostro approccio biografico è che ci permette di chiarire il ruolo dei matematici in Francia intorno alla Grande Guerra. Bisogna rendersi conto dell'ecatombe che questo tragico evento ha significato per i giovani studenti. Per dare un'idea del disastro, basta ricordare che, dei 280 allievi che entrarono alla Ecole Normale Supérieure tra il 1911 e il 1914 (Gateaux ne era stato appena licenziato e dunque non fa parte di questi), 241 furono inviati al fronte e 101 vi morirono. Se, come proclamato dal presidente della Repubblica Raymond Poincaré ([4]) nel 1919, l'Ecole del 1914 aveva vendicato l'Ecole del 1870 (anno della cocente sconfitta francese contro la Prussia), era difficile non constatare che il prezzo era stato enorme.

Figura 1: I luoghi della vita di René Gateaux in Francia.

1. – Gli anni della formazione

Abbiamo pochi dettagli sull'infanzia di René Gateaux. È originario di Vitry le François, un grosso borgo della Marna, a 150 Km a est di Parigi. Suo padre è un piccolo artigiano (possiede un'impresa per la fabbricazione di selle e finimenti per cavalli). Sembra sia stato un al-

Figura 2: Il cortile interno dell'Ecole Normale Supérieure.

lievo brillante poiché ottiene il suo baccalaureato a 16 anni (ossia due anni prima del normale) e a 18 vince il concorso per entrare all'Ecole Normale Supérieure.

Due normalisti del suo anno, Georges Gonthiez e Maurice Janet, ci hanno lasciato un ritratto toccante del loro giovane amico:

> Aveva una certa freschezza d'animo propria delle persone oneste che non sono state ancora segnate dalla vita. Quando arrivò all'Ecole Normale, aprì tranquillamente il suo spirito a nuovi argomenti con la facilità naturale e la calma di una bella intelligenza, modesta e sicura di se stessa [...] Ci è subito apparso come uno dei migliori matematici del nostro gruppo, serio e pronto a concentrarsi sull'essenziale. Amava confrontarsi con ogni sorta di questioni, generali e filosofiche (2).

(2) Il avait cette fraîcheur d'esprit des natures droites que la vie n'a pas encore froissées; et, arrivant à l'Ecole, il ouvrait tranquillement son esprit à de nouveaux objets avec l'aisance naturelle et le laisser-aller d'une belle intelligence sûre d'elle-même dans sa modestie. [...] Il nous apparut bientôt comme un des tous premiers mathématiciens de la promotion, réfléchi, sérieux, prompt à découvrir l'essentiel, aimant à se porter vers les questions d'intérêt général et philosophique. ([1], p. 137).

Nel 1908, un evento particolare segna la vita di René Gateaux. Decide di farsi battezzare e entrare così a far parte della Chiesa Cattolica (l'ambiente degli artigiani francesi in cui aveva vissuto era spesso fortemente anti clericale alla fine dell'Ottocento). Negli anni immediatamente successivi all'Affaire Dreyfus, in cui la Chiesa aveva agito in modo deplorevole, si erano formati numerosi movimenti cattolici riformisti che cercavano di coinvolgere in particolare gli intellettuali ([15]). Un normalista dello stesso anno di Gateaux, Pierre Poyet, fu soprannominato l'apostolo dell'Ecole Normale in quanto fu all'origine della conversione di numerosi allievi, tra cui Gateaux. Una biografia di Pierre Poyet ([3]) mi ha permesso di reperire la sola fotografia autografa di René Gateaux che io conosca e che presento qui sotto.

Figura 3: Gateaux e altri normalisti nella stanza di Pierre Poyet a Parigi. *Turne*, nel vocabolario normalista, è il termine per indicare la stanza personale nella parte dell'edificio della Normale usata come convitto.

Gonthiez e Janet insistono molto sull'importanza di questo battesimo. Scrivono:

> È in effetti assolutamente impressionante mettere in parallelo i metodi impiegati da Gateaux nella sua vita religiosa con quelli della sua vita esteriore (3).

(3) Il est en effet absolument frappant de mettre en parallèle les méthodes employées par Gateaux dans sa vie religieuse et dans sa vie extérieure. ([1], p. 138).

Nel 1910, René ottiene l'Agrégation in matematica che gli permette di diventare professore di liceo. Non inizierà che nell'ottobre 1912, poiché prima assolve il dovere del servizio di leva. La legge del marzo 1905 aveva ridotto il servizio militare a due anni ma lo aveva reso universale (per gli uomini!). L'articolo 23 di questa legge precisava che gli allievi dell'Ecole Normale dovevano trascorrere un anno da soldati semplici e un altro anno come ufficiali (sotto-tenenti). Il dossier militare di Gateaux che ho ritrovato indica che egli fu un allievo ufficiale coscienzioso. Recita:

> Secondo semestre 1912: Ha fatto molti progressi. Molto intelligente, molto coscienzioso e di buoni sentimenti, vuole fare del suo meglio. È divenuto un buon comandante di sezione, può rendere utili servizi in caso di mobilizzazione. Ha seguito un periodo di formazione al tiro e vi ha ottenuto ottimi voti ([4]).

Nell'ottobre 1912, Gateaux è dunque professore al liceo di Bar-le-Duc, altra città a 200 chilometri a est di Parigi. Già dalla fine del 1912 Gateaux chiede di beneficiare di un anno di congedo per andare a Roma. Stava infatti per cominciare una tesi di dottorato sull'analisi funzionale, una disciplina che Vito Volterra aveva creato nel corso degli anni novanta dell'Ottocento e che, grazie a Hadamard, si era molto sviluppata in Francia all'inizio del ventesimo secolo. Nel 1910, Hadamard ne aveva fatto il soggetto delle sue lezioni al Collège de France, nel 1911 Paul Lévy aveva sostenuto una brillante tesi su questo argomento e, nel 1912, Volterra era venuto a Parigi a tenere un corso alla Sorbona sulla teoria delle funzioni di linea. Questo corso era stato redatto da Joseph Pérès ([23]), che nello stesso anno ottenne una borsa di studio per recarsi a Roma, una delle prime borse della fondazione David-Weill attribuite a uno studente della facoltà di scienze. Anche Gateaux si candidò per ottenere questa borsa nel 1913, appoggiato da Borel:

> Il Signor Gateaux, attualmente professore al Liceo di Bar-le-Duc, mi ha recentemente parlato delle sue intenzioni di chiedere una borsa di studio in vista delle sue ricerche legate ai vostri lavori. Gli ho consigliato di chiedere come Pérès una borsa David-Weill e di

([4]) A beaucoup progressé, fort intelligent, très consciencieux et de bons sentiments, soucieux d'arriver à bien faire. Il est devenu un bon Chef de section, capable de rendre de bons services à la mobilisation. A fait un stage à l'Ecole de tir et y a obtenu de très bonnes notes. ([13]).

> andare a Roma. Vi allego la lettera nella quale mi comunica che ha chiesto la borsa e mi indica le sue intenzioni. Ho l'intenzione di appoggiare la sua candidatura. (5)

Come scrive più tardi Hadamard:

> Fu uno di coloro che, inaugurando una tradizione che non applaudiremo mai abbastanza, andarono a Roma a formarsi ai metodi e alle teorie di Volterra (6).

Su questo possediamo un documento straordinario: la lettera che Gateaux inviò a Borel (il quale la trasmise a Volterra) contenente il programma di ricerca per il suo anno a Roma. È una lettera molto lunga, di una decina di pagine. Non avrò qui il tempo di analizzare questo programma ma si può osservare che Gateaux parla già di integrazione in dimensione infinita e che pensa di affrontare tale questione con un metodo alla Riemann.

2. – La tappa romana

Il 28 agosto 1913 Gateaux annuncia a Volterra il suo arrivo a Roma in ottobre. Abbiamo pochi dettagli sul suo soggiorno romano (una volta a Roma, Gateaux non scrive più a Volterra!) Tuttavia, sembra aver dato prova di una bella energia. Quattro note, che costituiscono idealmente l'inizio del suo lavoro di tesi, sono pubblicate una dopo l'altra nei Rendiconti dell'Accademia dei Lincei ([6, 7, 8, 9]), che costituiscono nello spirito l'inizio del suo lavoro di tesi. Il primo gennaio 1914, Borel scrive a Volterra di essere lieto che Volterra sia contento del lavoro di Gateaux. Il 13 febbraio Gateaux tiene una conferenza al seminario matematico dell'università di Roma.

(5) M. Gateaux, actuellement professeur au Lycée de Bar-le-Duc, m'a parlé récemment de ses intentions de demander une bourse d'étude en vue de recherches qui se rattachent à vos travaux. Je lui ai conseillé de demander comme Pérès une bourse David Weill et d'aller à Rome. Je vous communique ci-inclus la lettre dans laquelle il me fait part qu'il a demandé la bourse, et m'indique ses intentions. J'ai l'intention d'appuyer sa demande. (Borel à Volterra, 18 avril 1913 ; Accademia dei Lincei, Roma) .

(6) Il fut un de ceux qui, inaugurant une tradition à laquelle nous ne saurions trop applaudir, allèrent à Rome se former aux méthodes et aux théories de M. Volterra. ([16])

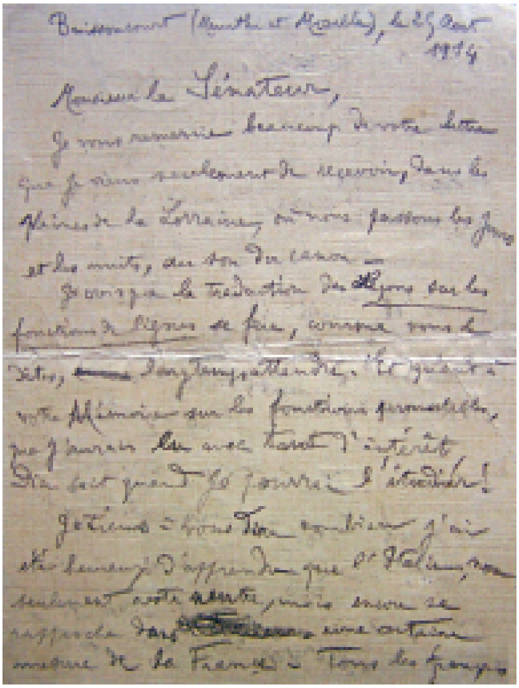
Figura 4: Il manifesto con l'ordine di mobilitazione generale del 2 Agosto 1914.

Gateaux torna in Francia nel giugno 1914 e chiede immediatamente una nuova borsa (questa volta della fondazione Commercy) per poter ritornare a Roma durante l'anno 1914-15. In una lettera a Volterra del luglio 1914, gli annuncia che la borsa gli è accordata e che tornerà dunque dopo l'estate. Questa lettera, scritta quindici giorni prima dello scoppio della guerra, testimonia una volta di più come la maggioranza dei francesi abbia preso coscienza del rischio della guerra solo all'ultimo minuto, e che la mobilitazione generale del 2 agosto abbia colto tutti di sorpresa.

Gateaux è subito nominato tenente nel 269mo reggimento di fanteria vicino a Nancy.

3. – Nella tempesta

Il mese di agosto 1914 è quello più devastante per i militari francesi. Il 22 agosto 1914, il peggior giorno di tutta la guerra per i francesi, si contano 27 000 morti. Perfino le carneficine delle offensive di Verdun o del Chemin des Dames saranno molto lontane da questi tristi record. Le



Buissoncourt (Meurthe et Moselle), le 25 août 1914

Monsieur le Sénateur,

Je vous remercie beaucoup de votre lettre que je viens seulement de recevoir, dans les plaines de la Lorraine, où nous passons les jours et les nuits, au son du canon.

Figura 5: Ultima lettera di R. Gateaux a V. Volterra (25 agosto 1914). Fondo ALAV, serie 001, fascicolo 585, scatola 21. Per gentile concessione della Biblioteca dell'Accademia Nazionale dei Lincei e Corsiniana.

cause sono molteplici: la famosa uniforme rosso vivo dei francesi ha spesso trasformato il campo di battaglia in un tiro al bersaglio, l'incoscienza dello stato maggiore che chiedeva di avanzare ad ogni costo, l'impreparazione degli ufficiali subalterni, ma anche per quanto riguarda gli studenti, particolarmente decimati in queste settimane, una sorta di super-volontarismo patriottico che andava molto al di là del semplice dovere. Così Fernand, figlio adottivo di Borel, che fu ucciso nel 1915, scriveva in una lettera alla madre adottiva Marguerite Appell:

> come socialista che lotta per la pace e l'intesa tra i popoli, voglio essere mandato in prima linea per mostrare che sono coraggioso come chiunque altro. Quelli che sopravvivranno, avranno il diritto di parlare a fronte alta davanti agli imboscati (7). ([20])

(7) En tant que socialiste luttant pour la paix et l'entente entre les hommes, je veux être envoyé en première ligne afin de prouver que je suis aussi courageux que n'importe qui. Ceux qui survivront auront le droit de parler haut devant les embusqués.

Un altro documento straordinario che possediamo è l'ultima lettera che Gateaux invia dal fronte a Volterra. In essa segnala la gioia provata sapendo che l'Italia aveva optato in favore della neutralità. La questione della partecipazione italiana assunse un'importanza capitale nella corrispondenza tra Volterra, interventista appassionato, e i suoi colleghi francesi fin dall'inizio del conflitto (agosto 1914) come mostrato in alcune ricerche con Rossana Tazzioli ([21]).

Alla fine dell'agosto 1914, la situazione degli eserciti francese e britannico è quasi disperata, presi a tenaglia dalle due ali dell'esercito tedesco (quella da nord aveva violato la neutralità del Belgio seguendo il piano Schlieffen). Ebbe allora luogo quello che in Francia si è soliti chiamare il miracolo della Marna: una potente controffensiva francese che fermò i tedeschi a una cinquantina di chilometri da Parigi e che li obbligò a indietreggiare di 150 Km. Il fronte si stabilizzò verso la fine del mese di settembre tra la Somma e la frontiera svizzera, e non sarà quasi

Figura 6: Tomba di R. Gateaux a Bietz-Neuville St Vast (Francia).

per niente modificato fino all'estate 1918. Restava una sola zona possibile per le manovre: tra la Somma e il mare del Nord, dove per cinque mesi i due eserciti cercarono di circondarsi a vicenda. È quella che si chiama la corsa al mare, uno dei periodi più sanguinosi del conflitto. La 70^{ma} divisione alla quale appartiene Gateaux è trasportata in treno vicino ad Arras nel nord-est della Francia, in una gigantesca manovra ferroviaria di 500 chilometri, e prende posizione a Rouvroy il 2 ottobre. Il 3 ottobre, verso l'una del mattino, i tedeschi danno l'assalto e Gateaux, che è al comando delle mitragliatrici, viene ucciso. I corpi sono sotterrati alla svelta, e soltanto nel 1920 essi saranno riesumati e trasportati alla necropoli di Bietz-Neuville St Vast. Gateaux è ufficialmente dichiarato morto per la Francia nel giugno del 1922.

4. – Il destino matematico

Qui comincia un piccolo miracolo. Non sappiamo esattamente come la notizia della morte di Gateaux sia stata comunicata al mondo accademico. Una cartolina postale, inviata dal direttore del liceo di Bar-le-Duc nel dicembre 1914, e che ho ritrovato per caso all'Accademia delle Scienze di Parigi ha giocato un ruolo cruciale. Il direttore segnala infatti che Gateaux ha lasciato alla madre dei documenti contenenti appunti di capitoli della sua tesi. Borel avverte immediatamente Volterra della morte di Gateaux:

> Il successo sarà purtroppo conquistato attraverso perdite irreparabili; tra le tristi notizie che ho appreso recentemente, quella che mi ha fatto più pena è la morte di Gateaux. Le condizioni in cui ci è stata annunciata non lasciano purtroppo che una debole speranza di errore. Voglio tuttavia sperare che tra le decine di allievi dell'Ecole Normale che sono dati per dispersi, ve ne siano almeno uno o due che torneranno alla fine della guerra ([8]).

([8]) Le succès sera malheureusement acheté par des pertes irréparables ; parmi les tristes nouvelles que j'ai apprises récemment, une de celles qui m'a fait le plus de peine est la mort de Gateaux. Les conditions dans lesquelles elle nous est annoncée ne laissent malheureusement qu'un bien faible espoir d'une erreur. Je veux néanmoins espérer que sur les dizaines d'élèves de l'Ecole Normale regardés comme perdus, il s'en trouvera au moins un ou deux qui reviendront à la fin de la guerre. (Borel à Volterra, 10 décembre 1914; Archivio storico Lincei)

E Volterra risponde:

> Gateaux aveva molto talento e sono sicuro che avrebbe avuto un grande avvenire. Sviluppava le sue idee in modo sempre sicuro. L'anno scorso aveva lavorato molto e io non dubitavo che i fondamenti della sua tesi fossero pronti. Quante giovani esistenze sono state vittime di questa guerra! È orribile pensarci (9).

Dall'agosto 1915, Hadamard vuole far attribuire un premio dell'Accademia delle Scienze a Gateaux. Scrive nell'agosto 1915 al secrétaire perpétuel Emile Picard:

> [Gateaux] lascia sul calcolo funzionale delle ricerche molto avanzate (la sua tesi era in gran parte redatta e rappresentata dalle note presentate all'Accademia), ricerche alle quali il Signor Volterra, e io stesso, attribuiamo un grande valore (10).

SÉANCE DU 18 DÉCEMBRE 1916. 791

PRIX PONCELET.

(Commissaires : MM. Jordan, Émile Picard, Appell, Painlevé, Humbert, Hadamard, Boussinesq, Vieille; Darboux, rapporteur.)

La Commission vous propose de décerner le prix à M. Charles de la Vallée Poussin, professeur à l'Université de Louvain, Correspondant de l'Académie, pour l'ensemble de ses travaux mathématiques.

PRIX FRANCŒUR.

(Commissaires : MM. Jordan, Émile Picard, Appell, Painlevé, Humbert, Darboux, Boussinesq, Vieille; Hadamard, rapporteur.)

René-Eugène Gateaux est entré, en 1907, à l'École Normale supérieure. A sa sortie, il fut un de ceux qui, inaugurant une tradition à laquelle nous ne saurions trop applaudir, allèrent à Rome se former aux méthodes et aux théories de M. Volterra. Notre Confrère fut dès l'abord frappé des belles qualités scientifiques de Gàteaux et nous a personnellement fait connaître la haute estime en laquelle il tient son talent.

Figura 7: Annuncio del Premio Francœur del 1916 attribuito a René Gateaux. Compte-Rendus des séances hebdomadaires de l'Académie des Sciences de Paris, 163, p. 791 (18 dicembre 1916).

(9) Gateaux avait beaucoup de talent et je suis sûr qu'il avait un grand avenir. Il développait ses idées d'une manière toujours sûre. L'année passée il avait beaucoup travaillé et je ne doutais pas que tous les fondements pour sa thèse étaient prêts. Combien de jeunes existences ont été les victimes de cette guerre! C'est horrible à y penser. (Volterra à Borel, décembre 1914).

(10) [Gateaux] laisse sur le calcul fonctionnel des recherches fort avancées (sa thèse était en grande partie composée, et représentée par des notes présentées à l'Académie), recherches auxquelles M.Volterra, comme moi-même, attache un grand prix. (Hadamard à Picard, 5 août 1915).

Il premio Francœur è attribuito nel 1916, a titolo postumo, a René Gateaux. Nel suo rapporto Hadamard scriveva:

> [Gateaux] cominciò a percorrere una strada molto più audace e che prometteva di essere tra le più feconde, estendendo al dominio del funzionale il concetto di integrale. Nessuno può prevedere lo sviluppo e la portata che avrebbero potuto essere riservati a questa nuova serie di ricerche. È proprio questa che è stata interrotta dagli eventi ([11]).

Nel suo libro autobiografico del 1970, Paul Lévy scrive:

> Nel gennaio 1918 ero da oltre due mesi steso sopra un letto di ospedale, quando ripensai tutto a un tratto all'analisi funzionale. Nei miei primi lavori, non avevo mai pensato di estendere la nozione di integrale agli spazi a infinite dimensioni. Mi è parso di un tratto che fosse possibile affrontare questo problema partendo dalla nozione di media su una sfera dello spazio di funzioni di quadrato sommabile. Una tale funzione può essere approssimata da una funzione a scala, il cui numero n di valori distinti aumenti indefinitamente. La media cercata si può allora definire come il limite della media su una sfera dello spazio a n dimensioni. È evidente che questo limite potrebbe non esistere; ma, praticamente, esso esiste quasi sempre ([12]).

Nel dicembre 1918, viene chiesto a Lévy di tenere il cours Peccot al Collège de France. Teoricamente, questo corso è riservato a un gio-

([11]) [Gateaux] allait s'engager dans une voie beaucoup plus audacieuse, et qui promettait d'être d'être des plus fécondes, en étendant au domaine fonctionnel la notion d'intégrale. Nul ne peut prévoir le développement et la portée qui auraient pu être réservés à cette nouvelle série de recherches. C'est elle qui a été interrompue par les événements. ([16]).

([12]) En janvier 1918, j'étais depuis plus de deux mois couché dans un lit d'hôpital, quand je repensai tout à coup à l'analyse fonctionnelle. Dans mes premiers travaux, je n'avais jamais pensé à étendre la notion d'intégrale aux espaces à une infinité de dimensions. Il m'apparut tout à coup qu'il était possible d'aborder ce problème en partant de la notion de moyenne dans une sphère de l'espace des fonctions de carrés sommables. Une telle fonction peut être approchée par une fonction à paliers, le nombre n de ses valeurs distinctes augmentant indéfiniment. La moyenne cherchée peut alors être définie comme limite de la moyenne dans une sphère de l'espace à n dimensions. Il est bien évident que cette limite peut ne pas exister; mais pratiquement, elle existe souvent. ([19], p. 55-56).

vane matematico promettente di meno di 30 anni e Lévy ne ha 32; ma la guerra è stata una tale ecatombe che bisogna fare delle eccezioni al regolamento. Il libro del 1922 *Leçons d'Analyse Fonctionnelle* ([17]) è redatto a partire da questo corso. Su consiglio di Hadamard, Lévy prende contatto con Maurice Fréchet ([13]), il grande specialista del momento sull'integrazione in spazi astratti, per chiedergli consiglio. Lévy scive anche a Volterra:

> Essendomi occupato di recente della questione dell'estensione della nozione di integrale multiplo agli spazi funzionali, ne ho parlato con Hadamard che mi ha segnalato l'esistenza di una nota di R. Gateaux su questo soggetto. Ma non mi ha potuto dare il riferimento esatto e non riesco a trovarla. [...] Benché sia ancora arruolato, lavoro per preparare un corso che spero di poter tenere al Collège de France sulle funzioni di linea e le equazioni alle derivate funzionali, e in questa occasione vorrei sviluppare ulteriormente alcuni capitoli della teoria. [...] Credo che la generalizzazione del problema di Dirichlet debba presentare maggiori difficoltà. Non ho potuto fino ad ora utilizzare per il caso generale i vostri lavori sulle funzioni di primo grado e l'estensione della formula di Green. Ciò è dovuto al fatto che non ho ancora messo la nozione di integrale multiplo sotto una forma comoda per questo scopo ([14]).

Qualche giorno più tardi, Lévy scrive a Fréchet:

> Per quanto riguarda i lavori di Gateaux, ho saputo proprio ieri che Hadamard li aveva messi in sicurezza presso l'Ecole Normale du-

([13]) L'affascinante corrispondenza tra Paul Lévy e Maurice Fréchet fu cominciata nel dicembre 1918 e continuata per cinquanta anni. Il libro [2] ne propone l'edizione critica.

([14]) M'étant occupé récemment de la question de l'extension de la notion d'intégrale multiple à l'espace fonctionnel, j'en ai parlé à M. Hadamard qui m'a signalé l'existence d'une note de R. Gateaux sur ce sujet. Mais il n'a pas pu m'en donner la référence exacte et je ne puis réussir à la trouver. [...] Quoiqu'encore mobilisé, je travaille à préparer un cours que j'espère professer au Collège de France sur les fonctions de lignes et les équations aux dérivées fonctionnelles et à cette occasion, je voudrais développer davantage certains chapitres de la théorie. [...] Je crois que la généralisation du problème de Dirichlet doit présenter plus de difficultés. Je n'ai pu jusqu'ici profiter pour le cas général de vos travaux sur les fonctions du premier degré et l'extension de la formule de Green. Ceci tient précisément à ce que je n'ai pas encore mis la notion d'intégrale multiple sous une forme commode pour ce but. (Lévy à Volterra, 3 janvier 1919; Archivio storico Lincei).

> rante la guerra e che li ha appena ritirati. Nulla è quindi stato ancora pubblicato (15).

Poi Lévy riscrive a Volterra:

> Hadamard ha trovato varie memorie non pubblicate di Gateaux all'Ecole Normale. Non le ho ancora viste ma forse vi troverò quello che cerco (16).

Volterra risponde immediatamente a Lévy:

> Abbiamo discusso prima della sua partenza da Roma su alcune idee generali riguardo a questo argomento, ma non ha pubblicato niente a riguardo. Penso che, nelle note manoscritte che ha lasciato, si potrebbero molto probabilmente trovare delle note su questo soggetto. Sono felice che non siano andate perdute e che si trovino nelle vostre mani. La questione è molto interessante (17).

Hadamard incarica Lévy di realizzare un'edizione postuma delle carte di René Gateaux alla sua memoria, ed è questo lavoro che serve a Lévy per preparare il suo futuro cours Peccot. La cosa più importante che scopre riguarda l'integrazione in dimensione infinita negli spazi funzionali.

Vediamo un po' quello che fa Gateaux. Una funzione x è detta semplice di ordine n se essa assume un valore costante $x_1, x_2, \ldots, x_n$ su ogni sotto-intervallo $\left[0, \frac{1}{n}\right], \ldots, \left[\frac{n-1}{n}, 1\right]$. Le x_i sono dette coordinate di x.

(15) Au sujet des travaux de Gateaux, j'ai précisément appris hier que Monsieur Hadamard les avait mis en sûreté à l'Ecole Normale pendant la guerre et vient de les retirer. Rien n'est donc encore publié. (Lévy à Fréchet, 6 janvier 1919; [2], p. 57.

(16) M. Hadamard vient de trouver plusieurs mémoires non publiés de Gateaux à l'Ecole Normale. Je ne les ai pas encore vus mais peut-être y trouverais-je ce que j'y recherche. (Lévy à Volterra, 12 janvier 1919).

(17) Nous avons causé avant son départ de Rome des idées générales sur ce sujet mais il n'a rien publié là-dessus. Je pense que dans les notes manuscrites qu'il a laissées, on pourra bien probablement trouver quelques notes sur ce sujet. Je suis heureux qu'elles ne soient pas perdues et qu'elles se trouvent dans vos mains. La question est très intéressante. (Volterra à Lévy, 15 janvier 1919 ; Archivio storico Lincei).

Si considera allora una funzione semplice x in una palla di raggio 1 dell'insieme delle funzioni di quadrato integrabile (cioè L^2 munito della misura di Lebesgue), si ha $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \leq n$. Tali funzioni formano la n-esima sezione della palla di L^2 considerata. È dunque una palla di IR^n di raggio $\sqrt{n}$.

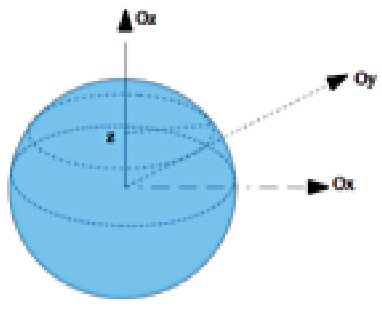
Consideriamo un funzionale U definito sull'insieme delle funzioni x tali che $\int_0^1 x(\alpha)^2 d\alpha \leq 1$ (ciò che noi chiamiamo una palla di L^2). La sua restrizione U_n alla n-esima sezione è una funzione di $x_1, x_2, \ldots, x_n$ il cui valor medio è dato da

$$\mu_n = \frac{\int_{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2 \leq n} U_n(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n}{W_n}$$

dove W_n è il volume della palla in IR^n di raggio $\sqrt{n}$. Sotto certe condizioni, la successione (μ_n) ammette un limite: è la media o l'integrale di U sulla palla.

Il principale risultato di René Gateaux è di aver calcolato l'integrale per importanti tipi di funzionali. L'esempio fondamentale è $U : x \mapsto f[x(\alpha)]$ dove f è una funzione continua fissata e α un reale fissato dell'intervallo $[0, 1]$. Se x è nella n-esima sezione, $x(\alpha)$ è dunque una delle coordinate.

Guardiamo per cominciare la situazione semplice in tre dimensioni, considerando una funzione della coordinata z.



La media di $f(z)$ sulla palla $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$ è definita considerando l'intersezione della palla con il piano all'altitudine z. Questo è un disco di superficie $\pi(\rho^2 - z^2)$ e la media del 'funzionale' f sulla palla di IR^3 è definita da

$$\frac{1}{\frac{4}{3}\pi\rho^3}\int_{-\rho}^{\rho} f(z)[\pi(\rho^2 - z^2)]dz.$$

Passiamo allora alla situazione in dimensione n. Quando si fissa z tale che $0 \leq z^2 \leq n$, il volume (di dimensione $n-1$) dell'intersezione della palla di raggio 1 con l'iperpiano $x(\alpha) = z$ è dato da $(\sqrt{n - z^2})^{n-1} \cdot V_{n-1}$ dove V_n è il volume della palla unitaria in dimensione n. Si noti che questo volume verifica la relazione di ricorrenza

$$V_n = V_{n-1}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\theta d\theta$$

La media di U sulla n-esima sezione è allora data da

$$\frac{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\sqrt{n}\sin\theta)\cos^n\theta d\theta}{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\theta d\theta.}$$

Gateaux usa allora un metodo simile a quello di Laplace. I valori di θ che danno il contributo più significativo all'integrale al numeratore sono quelle prossime a 0. Per n grande, questo integrale diventa prossimo a

$$\int_{-\eta}^{\eta} f\left(\sqrt{n}\sin\frac{\psi}{\sqrt{n}}\right)\cos^n\frac{\psi}{\sqrt{n}}\frac{d\psi}{\sqrt{n}}$$

Si ha inoltre che $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\theta d\theta \sim \sqrt{\frac{2\pi}{n}}$.

Uno sviluppo di Taylor permette allora di ottenere che, per n poi η tendenti all'infinito, la media di U sulla n-esima sezione tende a

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\psi)e^{-\frac{\psi^2}{2}}d\psi.$$

Gateaux definisce questa quantità come l'integrale di U sulla palla.

Si vede dunque che Gateaux aveva cambiato il suo punto di vista iniziale, poiché un approccio diretto alla Riemann non gli avrebbe permesso di concludere. Ha avuto bisogno invece di considerare la convergenza delle medie.

Gateaux mostra inoltre che il risultato è generalizzabile per una funzione del tipo

$$U(x) = \int_{[0,1]^n} d\alpha_1 \dots d\alpha_p f[x(\alpha_1), \dots, x(\alpha_p), \alpha_1, \dots, \alpha_p]$$

il cui integrale è dato da

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}} \int_{[0,1]^n} d\alpha_1 \dots d\alpha_p \int_{IR^n} dx_1 \dots dx_p f(x_1, \dots, x_p, \alpha_1, \dots, \alpha_p) \mathrm{e}^{-\frac{x_1^2 + \dots + x_p^2}{2}}.$$

A questo punto, accade una straordinaria coincidenza che lo spirito fecondo di Lévy riesce a sfruttare magistralmente. Oggi, Paul Lévy è soprattutto noto come uno dei maggiori probabilisti del ventesimo secolo. Ma nel 1919 egli non conosceva ancora la teoria della probabilità. Come lui stesso scrive:

> Da parte mia, ho appreso i primi elementi di calcolo delle probabilità nella primavera del 1919, grazie a Carvallo che mi aveva chiesto di fare tre conferenze su questo argomento all'Ecole Polytechnique. Sono allora giunto in tre settimane a dei nuovi risultati. Ma mai rivendicherei per i miei lavori di probabilità una data anteriore al 1919. Posso anche aggiungere, e l'ho detto un giorno a Borel, che non ho visto che nel 1929 l'importanza dei nuovi problemi che poneva la teoria numerabile della probabilità. Ma ero preparato dal calcolo funzionale allo studio delle funzioni di infinite variabili e molte delle mie idee sono divenute senza sforzo idee applicabili al calcolo delle probabilità ([18]).

([18]) Pour ma part, j'ai appris les premiers éléments du calcul des probabilités au printemps de 1919, grâce à Carvallo qui m'avait demandé de faire trois conférences sur ce sujet aux élèves de l'Ecole Polytechnique. Je suis d'ailleurs arrivé en trois semaines à des résultats nouveaux. Mais jamais je ne revendiquerai pour mes travaux de calcul des probabilités une date antérieure à 1919. Je peux même ajouter, et je l'ai dit un jour à M. Borel, que je n'ai guère vu qu'en 1929 l'importance des problèmes nouveaux que posait la théorie des probabilités dénombrables. Mais j'étais préparé par le calcul fonctionnel à l'étude des fonctions d'une infinité de variables et beaucoup de mes idées sur l'analyse fonctionnelle sont devenues sans effort des idées applicables au calcul des probabilités. (Lévy à Fréchet, 23 avril 1945; [2], p. 139).

È come si vede per necessità di insegnamento che Lévy ha dovuto studiare il calcolo delle probabilità. La guerra aveva in effetti dimostrato quanto certe tecniche di probabilità si erano rivelate importanti (in particolare nel calcolo degli errori in balistica) e la direzione dell'Ecole Polytechnique suggerì di rafforzare l'insegnamento di questa disciplina. Progressivamente, Lévy prende coscienza che è sotto una forma probabilistica che si esprimono, nel modo più naturale, i problemi di analisi funzionale che lo interessano.

Cerchiamo di capire sull'esempio fondamentale come la probabilità entrava nelle considerazioni di Lévy sugli spazi funzionali.

In IR^n, si consideri la parte della n-palla di centro 0 e raggio $\sqrt{n}$, compresa tra gli iperpiani : $z = \xi_1$ et $z = \xi_2$ (dove z è una delle coordinate). Il rapporto tra il volume di questa porzione e quello dell'intera palla è dato da

$$\frac{\int_{\frac{\xi_1}{\sqrt{n}}}^{\frac{\xi_2}{\sqrt{n}}} \cos^n \theta d\theta}{\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos^n \theta d\theta}$$

Quando $n \to +\infty$, questo rapporto tende a

(1) $$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \mathbf{e}^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Lévy avanza allora l'interpretazione seguente: Se la funzione x è "scelta a caso" nella palla di L^2 di centro 0 e di raggio 1, la probabilità che $x(\alpha)$ sia compreso tra ξ_1 e ξ_2 è data da

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \mathbf{e}^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi.$$

In altre parole, la legge della variabilità aleatoria $x(\alpha)$ è una gaussiana. Questo gli permette per esempio di interpretare immediatamente la media del funzionale U che a x associa $f(x(\alpha))$ ottenuta da Gateaux sotto la forma

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\psi) e^{-\frac{\psi^2}{2}} d\psi.$$

come se fosse una speranza matematica in relazione alla legge gaussiana.

Questa interpretazione probabilistica diventa onnipresente nella terza parte delle *Leçons d'Analyse Fonctionnelle* consacrata alle questioni di integrazione. Lévy aveva allora coscienza della profonda originalità del suo approccio e, come lui stesso ammette, sperava che il testo ricevesse l'attenzione che meritava. Ne fu deluso. Bisogna qui segnalare il disinteresse abbastanza generale (per non dire il disprezzo...) dei matematici francesi per il calcolo delle probabilità a partire dalla metà del '800 ; Poincaré e Borel erano due eccezioni che nessuno in Francia (salvo Lévy e Fréchet) aveva ancora seguito. Questo può dunque spiegare l'assenza nelle carte di Gateaux di ogni riferimento alla densità gaussiana, sebbene essa entrasse in maniera evidente nell'espressione delle sue medie.

Se il libro passa quasi inosservato in Francia, esso trova invece in Wiener un lettore appassionato. Nell'estate del 1922, Wiener viene a trascorrere qualche settimana in Francia e soggiorna con Lévy a Pougues les eaux, una città termale al centro della Francia, dove discutono sul libro. Come scrive nella sua autobiografia, Lévy aveva ragione di pensare che la terza parte del suo libro fosse all'origine della memoria di Wiener sul moto browniano. In ogni caso, come ho già detto, Wiener non nasconde nel suo articolo [25] questa influenza:

> Il presente articolo ha ricevuto il suo incipit grazie a una conversazione che l'autore ha avuto con il Professor Lévy riguardo alla relazione che è alla base dei due sistemi di integrazione in un numero infinito di dimensioni, quello di Lévy e quello dell'autore. Per questo suo debito, l'autore desidera dare pieno credito.

Gateaux è ora trattato da Wiener come un precursore ed è Lévy che è dichiarato essere la sua principale fonte di ispirazione. Per la sua costruzione del moto browniano, Wiener utilizza infatti gli studi di Lévy sulla sfera di n dimensioni e la definizione di integrale-media di Gateaux-Lévy per

1) dedurre la forma gaussiana degli incrementi

2) definire la misura corrispondente nello spazio delle funzioni continue (misura di Wiener)

3) ottenere l'espressione della media di un funzionale analitico.

Conclusione

Lévy ha sempre avuto un po' la mania di insistere sul fatto che egli aveva già scoperto molte cose prima degli altri, il che può essere anche vero ma non si dice! Tuttavia, gli si può rendere giustizia per quanto riguarda la misura di Wiener, perché è chiaro che tutto era già pronto nel suo libro del 1922. Nel suo libro autobiografico [19], Lévy non nasconde la sua delusione di avere lasciato a Wiener la priorità della pubblicazione.

> Poiché ho deciso di non nascondere nulla della mia propria psicologia, è venuto il momento di dire che, tra tutte le occasioni che non ho saputo cogliere, quella di aver lasciato a Wiener la scoperta di questa funzione ... è, malgrado il fatto che l'esistenza di precursori ne diminuisce l'importanza, una di quelle che mi lasciano più rimpianti. Tutto era pronto per fare [questa scoperta], e credo che ci sarei arrivato uno o due anni più tardi. Ma Wiener mi ha preceduto. Non ho potuto che indicare, in un fascicolo del Mémorial des Sciences mathématiques pubblicato nel 1925, il legame che esiste tra le idee di Wiener e quelle di Gateaux. Mi sono reso conto solo molto più tardi che il mio libro del 1922 aveva probabilmente contribuito alla scoperta di Wiener (19).

In ogni caso, è chiaro che è attraverso i lavori di Lévy e il loro recupero da parte di Wiener che il nome di René Gateaux ci è ancora noto oggi.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] *Annuaire de l'Association des Anciens Elèves de l'Ecole Normale Supérieure* (1918).

[2] Barbut, Marc, Locker Bernard and Mazliak, Laurent. *Paul Lévy - Maurice Fréchet, 50 years of mathematics*, Springer, 2013.

(19) Puisque j'ai décidé de ne rien cacher de ma propre psychologie, le moment est venu de dire que, parmi les occasions que je n'ai pas su saisir, celle d'avoir laissé à Wiener la découverte de cette fonction $X(t)$ est, malgré le fait que l'existence des précurseurs en diminue l'importance, une de celles qui me laissent le plus de regrets. Tout me préparait à le faire, et je crois que j'y serais arrivé, un ou deux ans plus tard. Mais Wiener m'a devancé. Je ne pus qu'indiquer, dans un fascicule du Mémorial des Sciences mathématiques publié en 1925, le lien qui existe entre les idées de Wiener et celles de Gateaux. Je ne me dis que bien plus tard que mon livre de 1922 avait sans doute contribué à la découverte de Wiener. (Levy 1970, p. 98).

[3] BESSIERES ALBERT: *Pierre Poyet, l'Apôtre de l'Ecole Normale*.
[4] Ecole Normale Supérieure (1919) : *séance de rentrée du 23 mars 1919. Discours de Raymond Poincaré et d'Ernest Lavisse*. Paris, Imprimerie Money, 1919.
[5] GATEAUX, RENÉ (1913a) : *Sur les fonctionnelles continues et les fonctionnelles analytiques, Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, **157**, 325-327, 1913.
[6] GATEAUX, RENÉ (1913b) : *Sur la représentation des fonctionnelles continues*, Atti della Reale Accademia dei Lincei, **22-2**, 646-648, 1913.
[7] GATEAUX, RENÉ (1914a) : *Sur la représentation des fonctionnelles continues*, Atti della Reale Accademia dei Lincei, **23-1**, 310-315, 1914.
[8] GATEAUX, RENÉ (1914b) : *Sur les fonctionnelles d'ordre entier d'approximation*, Atti della Reale Accademia dei Lincei, **23-1**, 405-408, 1914.
[9] GATEAUX, RENÉ (1914c) : *Représentation d'une fonctionnelle continue, satisfaisant à la condition du cycle fermé*, Atti della Reale Accademia dei Lincei, **23-1**, 481-486, 1914.
[10] GATEAUX, RENÉ (1919a) : *Sur la notion d'intégrale dans le domaine fonctionnel et sur la théorie du potentiel*, Bulletin de la Société Mathématique de France, **47**, 47-70, 1919.
[11] GATEAUX, RENÉ (1919b) : *Fonctions d'une infinité de variables indépendantes*, Bull.S.M.F, **47**, 70-96, 1919.
[12] GATEAUX, RENÉ (1922a) : *Sur diverses questions de calcul fonctionnel*, Bull.S.M.F, **50**, 1-37, 1922.
[13] GATEAUX, RENÉ (1922b) : *Dossier Militaire, Archives de l'Armée de Terre*, Château de Vincennes, cote 5Ye97543.
[14] GUERRAGIO, ANGELO e PAOLONI, GIOVANNI (2008) : *Vito Volterra, Roma*, Franco Muzzio, 2008.
[15] GUGELOT, FRÉDÉRIC (1998) : *La conversion des intellectuels*, CNRS Editions, 1998.
[16] HADAMARD, JACQUES (1916) : *Rapport sur le Prix Francœur*, Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 18 décembre 1916, **163**, 791-792, 1916.
[17] LEVY, PAUL (1922) : *Leçons d'Analyse fonctionnelle*, Gauthier-Villars, 1922.
[18] LEVY, PAUL (1925b): *Analyse fonctionnelle*, Mémorial des sciences mathématiques, fasc. 5, Gauthier-Villars (1925).
[19] LEVY, PAUL (1970) : *Quelques aspects de la pensée d'un mathématicien*, Blanchard, 1970.
[20] MARBO, CAMILLE (1967) : *A travers deux siècles, souvenirs et rencontres (1883-1967)*, Grasset, 1967.
[21] MAZLIAK, LAURENT and TAZZIOLI, ROSSANA (2009): *Mathematicians in war; Volterra and his French colleagues during WW1. Archimedes*, Springer, 2009.
[22] MAZLIAK, LAURENT (2015): *The ghosts of the Ecole Normale*. Statistical Science, **20**, 3, 2015.
[23] VOLTERRA, VITO (1913) : *Leçons sur l'intégration des équations différentielles aux dérivées partielles*, Gauthier-Villars, Paris, 1913.
[24] VOLTERRA, VITO (1913): *Leçons sur les fonctions de lignes*, Gauthier-Villars, Paris, 1913.
[25] WIENER, NORBERT (1923) : *Differential space*, Jour. Math. and Phys. **58**, 131-174.

Laurent Mazliak
Sorbonne Universités
Université Pierre et Marie Curie
Laboratoire de Probabilités et Modèles aléatoires
Paris, France
E-mail: laurent.mazliak@upmc.fr