
La Matematica nella Società e nella Cultura

RIVISTA DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

ADRIAN R. D. MATHIAS

In lode della logica.

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. 8 (2015), n.1, p. 43–74.

Unione Matematica Italiana

[<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2015_1_8_1_43_0>](http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2015_1_8_1_43_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

In lode della logica

Su Bourbaki e l'insegnamento (mancante) della logica ()*

ADRIAN R. D. MATHIAS

Parte I

Ostacoli all'insegnamento della logica a Cambridge

Nel 1964, quando ero ancora uno studente di matematica a Cambridge, il mio precedente insegnante di algebra mi scrisse per dirmi della scoperta, a opera di Cohen, del forcing – il metodo per ottenere un gran numero di risultati d'indipendenza nella teoria degli insiemi di Zermelo-Fraenkel – e in me nacque subito un grande interesse per la teoria degli insiemi. Mi resi conto che avrei dovuto lasciare Cambridge per imparare la logica e andai a Bonn per scrivere la mia tesi sotto la guida di Ronald Jensen. In seguito tornai a Cambridge per insegnare logica e teoria degli insiemi. Per un po' di tempo andò tutto bene, ma poi la provincialistica chiusura di Cambridge cominciò a pungere ...

Nel 1986 fui informato che le mie lezioni di logica e teoria degli insiemi non erano necessarie, perché tutto ciò che uno studente universitario aveva bisogno di sapere al riguardo c'era già in Bourbaki. Così mi misi a leggere il volume di Bourbaki sulla *Teoria degli insiemi*. Sconcertato da quel che ci avevo trovato, lessi gli articoli in cui la “posizione” di Bourbaki era stata precedentemente esposta e non ne fui rassicurato.

Ho raccolto le mie osservazioni in un articolo, “The Ignorance of Bourbaki”, che è già stato pubblicato (due volte) in inglese ed è stato tradotto in ungherese e spagnolo, ma per qualche ragione non in francese.

(*) Traduzione di Alberto Peruzzi, Dipartimento di Lettere e Filosofia, Università di Firenze.

Nell'articolo criticavo Bourbaki per tre motivi:

- I) nel loro testo del 1954 avevano fatto una scelta sbagliata di sistema logico;
- II) nei loro precedenti scritti avevano fatto una scelta inadeguata degli assiomi;
- III) negli articoli in cui esponevano la loro posizione non avevano fatto alcuna menzione di Gödel.

Così, quel docente di Cambridge che disse ai suoi studenti d'imparare la logica e i fondamenti da Bourbaki stava facendo loro tutt'altro che un favore. *A me* disse che stavo perdendo il mio tempo su qualcosa che era già morto – ma che è ancora lungi dall'esserlo.

Ostacoli all'insegnamento della logica in un'università francese

Subito dopo il mio arrivo a Réunion, la Sig.ra Morillon richiamò la mia attenzione sul fatto che nel piano di studi della sezione matematica del CAPES campeggiava la seguente affermazione:

Tout exposé de logique formelle est exclu.

(È esclusa ogni trattazione della logica formale.)

Così cominciai a indagare e, forse, voce delle mie indagini dev'essere arrivata al comitato del CAPES, perché in questi ultimi anni l'affermazione è stata addolcita:

Aucun exposé de logique formelle n'est envisagé.

(Non è prevista alcuna trattazione della logica formale.)

Il risultato di quelle indagini è stato recentemente pubblicato in inglese a Singapore.⁽¹⁾

⁽¹⁾ A. R. D. Mathias, Hilbert, Bourbaki and the scorning of logic, pp. 47-156 of *Infinity and Truth*, a cura di C.T. Chong *et al.*, World Scientific Publishing Company, Singapore, 2013.

Nel mio articolo giungevo alla conclusione che l'insegnamento della logica in Francia, ma anche altrove, e a tutti i livelli accademici, è stato ostacolato per parecchi decenni, per non dire che è stato bloccato, da politiche che hanno le loro radici nella mancanza d'interesse e di comprensione, da parte del gruppo Bourbaki, nei confronti dei fondamenti della matematica. Per dirla in parole crude:

- testi ampiamente diffusi contengono falsità e fraintendimenti sulla logica;
- il prestigio dei loro autori fa sì che questi errori siano docilmente accettati;
- il corretto insegnamento della logica è, di conseguenza, impedito.

Che questi fatti abbiano qualcosa a che vedere con il declino degli standard che si avverte negli studenti di matematica?

- I docenti di matematica nei licei mi dicono che la nozione di dimostrazione non è più insegnata.
- Tra gli studenti universitari che al terzo anno seguono il mio corso di algebra, non ce n'è uno capace di darmi la dimostrazione del teorema di Pitagora (una dimostrazione che imparai a dieci anni).
- L'ultima volta che ho tenuto un corso di algebra lineare, mi sono accorto che le pagine con gli esempi che avevo preparato dieci anni fa sono, adesso, troppo difficili per i miei allievi.

Stiamo assistendo a un crollo del livello intellettuale richiesto nelle scuole francesi. ⁽²⁾ Per quanto concerne la matematica, credo che un fattore che ha contribuito a questo crollo, se non la sua causa principale, stia nell'aver soppresso l'insegnamento della logica, che a mio giudizio è conseguenza del disastroso trattamento riservato alla logica da Bourbaki. ⁽³⁾

⁽²⁾ S. Coignard, *Le pacte immoral: comment ils sacrifient l'éducation de nos enfants*, Albin Michel, Parigi 2011.

⁽³⁾ [N.d.T. Per quanto riguarda la scuola italiana, un analogo "crollo" è stato avvertito da molti docenti ed è stato pure attestato da recenti indagini OCSE. Facendo specifico riferimento alla matematica, benché l'influenza bourbakista sia stata notevole anche in Italia, sembra più difficile poter ascrivere a tale influenza la principale responsabilità del "crollo". Ciò non impedisce di ritenere che anche nel nostro paese ci sia stata e tuttora ci

Occorre precisare: non sto dicendo che non c'è altro da insegnare che la logica. Sono ben lungi da pensarlo, perché sarebbe come dire che un aspirante pianista non dovrebbe suonare altro che scale. Ma un addestramento in logica fornirà un solido assetto mentale in molti campi, proprio come esercitarsi sugli studi di Liszt darà maggior controllo quando si passa alle opere di Beethoven e Chopin. La logica rafforza la mente né più né meno di come Liszt rafforza le dita ed entrambi i rafforzamenti permettono poi di rivolgersi a compiti più impegnativi.

Ostacoli alla logica in Italia

Circa un secolo fa si verificò un caso più specifico di ostruzione all'insegnamento della logica, a stretto seguito di un crollo in un'altra disciplina.

Il logico italiano Giuseppe Peano era fra i relatori nelle sessioni plenarie del Congresso Internazionale dei Matematici che si tenne a Zurigo nel 1897. Nel successivo Congresso svoltosi a Parigi, nel 1900, Russell e altri osservarono che Peano e la sua falange di logici italiani dominavano le discussioni di logica.

Peano aveva molti assistenti e collaboratori, elencati da Bourbaki nelle sue note storiche: Vailati, Pieri, Padoa, Vacca, Vivanti, Fano e Burali-Forti, ma, come osserva Hubert Kennedy nella sua biografia di Peano, *la maggior parte di essi rimasero esclusi dall'ambiente universitario*. Cosicché, quando Peano morì nel 1932 (si noti che continuò a insegnare fino al giorno prima), la logica italiana divenne un deserto, tornando a rifiorire soltanto dopo la seconda guerra mondiale, quando giovani ricercatori italiani andarono in Germania a impararla.

La soppressione della logica in Italia è eloquentemente rievocata da Casari:

sia una carenza formativa relativamente alla logica, malgrado la presenza di logici di prestigio internazionale che per più decenni si sono impegnati a farne capire l'importanza per i curricula di matematica e, più in generale, per la formazione di un "abito mentale" proficuo in ogni ambito disciplinare.]

Se, alla luce di quel che successe dopo, guardiamo ai risultati metalogici dei suoi allievi, sorge una domanda cruciale: come poté accadere che quelle capacità e quelle competenze specifiche, non molti anni dopo che Hans Freudenthal si era riferito, con soddisfazione, al “trionfo della falange italiana a Parigi”, abbiano potuto non esser più un punto di riferimento per la ricerca mondiale e siano anche scomparse dalla scena culturale italiana? ⁽⁴⁾

Consideriamo ora una possibile conseguenza dell’ostilità diffusa nelle università italiane verso Peano e la sua scuola di logica.

Il crollo della scuola italiana di geometria

Dall’ultimo ventennio dell’Ottocento agli anni Trenta del Novecento fiorì in Italia una scuola di geometria. I suoi principali esponenti furono Castelnuovo, Enriques e Severi. Si dice che Castelnuovo sia stato il più rigoroso tra loro e che Enriques abbia fornito dimostrazioni incomplete, delle cui lacune era però consapevole (infatti, tentò anche di colmarle); quanto a Severi, dopo un avvio brillante, si dice che abbia prodotto cose di nessun conto. Infine, si dice che l’intera scuola di geometria sia svanita intorno al 1930. Agli italiani non difettavano certo le idee, ma nessuno era in grado di stabilire che cosa fosse stato effettivamente dimostrato ⁽⁵⁾ e “in alcuni casi l’articolazione di queste idee andava oltre il linguaggio tecnico a disposizione”. ⁽⁶⁾, ⁽⁷⁾

⁽⁴⁾ Il passo (tradotto) è tratto da E. Casari, “At the origins of metalogic”, in *Giuseppe Peano between mathematics and logic*, a cura di Fulvia Skof, Springer, Milano-New York, 2011, pp. 143-156.

⁽⁵⁾ Cfr. una mail inviata da David Mumford a Thomas Foster il 23 novembre del 1994, consultabile su <http://ftp.mcs.anl.gov/pub/qed/archive/209>. A seguito di questa mail, sono apparse due successive analisi più ricche di dettagli circa le difficoltà incontrate dai geometri italiani: D. Babbitt, J. Goodstein, “Federigo Enriques’s quest to prove the Completeness Theorem”, *Notices AMS*, 58/2, 2011, pp. 240-249, e D. Mumford, “Intuition and rigour and Enriques’s quest”, ivi, pp. 250-260.

⁽⁶⁾ https://en.wikipedia.org/wiki/Italian_school_of_algebraic_geometry.

⁽⁷⁾ [N.d.T. Al declino della logica in Italia contribuirono le reciproche incomprensioni fra la scuola di Peano e la stessa scuola italiana di geometria algebrica, ma anche a prescindere da tali incomprensioni si trattava di due modi diversi, se non opposti, di intendere i principi-guida che avrebbero dovuto ispirare i curricula formativi in ambito matematico, nel disegno dei quali furono i geometri algebrici ad avere il peso maggiore.]

Dopo la seconda guerra mondiale, la geometria acquistò nuova vita grazie a Bourbaki: Zariski (che era stato allievo di Castelnuovo), Weil, Chevalley e Samuel misero a posto le cose. Dopodiché Grothendieck rivoluzionò la materia. Purtroppo, Grothendieck entrò presto in rotta con Bourbaki: secondo *La Tribu*, si era stancato di sentirsi dire, parodiando la famosa osservazione satirica di George Orwell, che tutti gli insiemi vuoti sono uguali ma che alcuni sono più uguali di altri.

Passiamo ora a esaminare la crisi dei fondamenti che si manifestò nel 1902.

Il paradosso di Russell

In una lettera a Frege del 16 giugno 1902, Russell, servendosi di argomenti di Cantor e Zermelo, dimostrò che il sistema di Frege era incoerente, cioè, auto-contraddittorio. In notazione moderna, lo schema di comprensione si scriverebbe

$$\exists y \forall x [x \in y \iff \Phi(x)].$$

Questo schema stabilisce che, per qualsiasi proprietà Φ , esiste la classe, denotata da $\{x \mid \Phi(x)\}$, i membri della quale sono esattamente quegli x per cui vale la proprietà Φ .

Prendiamo dunque come $\Phi(x)$ la proprietà $x \notin x$, che dice che x non è un membro di se stesso. Sia B la corrispondente classe $\{x \mid x \notin x\}$. Così,

$$\forall x [x \in B \iff x \notin x].$$

Che cosa succede quando prendiamo $x = B$? Otteniamo

$$B \in B \iff B \notin B.$$

Imbarazzante.

Risposte allo shock

Dopo la scoperta del paradosso di Russell ci furono molti tentativi di evitare la contraddizione ponendosi una domanda: *perché dovrebbe essere legittimo, nell'argomento di Russell, prendere B come uno dei possibili valori della variabile x ?*

Le due principali strategie per affrontare il problema prendevano strade diverse, che poi hanno portato alla teoria degli insiemi e alla teoria dei tipi. C'è anche la teoria di Quine basata sulla stratificazione, che si colloca un po' a metà strada fra le due. La ricerca su tutte e tre è continuata fino a oggi ed è bene tener presente che non sono soluzioni equivalenti.

La risposta insiemistica

Una prima risposta fu la *teoria degli insiemi di Zermelo*, Z , formulata ancora in maniera un po' vaga da Zermelo e poi rifinita da Skolem. L'idea di Zermelo era di fare una distinzione fra *insiemi* e *proprietà*, ove le proprietà stanno per quelle che poi saranno indicate come *classi*. In questa concezione, ogni insieme è una classe; se una classe è membro di un'altra classe, essa è necessariamente un insieme; una classe propria è una classe "troppo grande" per essere un insieme. Questa distinzione gli permise di conservare le variabili globali, nel senso che scorrono sull'universo di tutti gli insiemi. I suoi assiomi stabilivano che certe classi sono insiemi. Così, Zermelo indebolì lo schema di comprensione in uno *schema di separazione*:

$$\forall a \exists y \forall x [x \in y \iff (x \in a \wedge \Phi(x))].$$

Detto in parole: fissato un insieme a , la classe di tutti i membri di a che hanno la proprietà Φ è un insieme. La contraddizione di Russell condurrebbe adesso a una dimostrazione che la classe di tutti gli insiemi $\{x \mid x = x\}$, solitamente indicata come *l'universo* e denotata da V , non è un insieme; perciò $V \notin V$ è dimostrabile nella teoria di Zermelo.

Un'altra caratteristica importante di Z è l'assioma dell'insieme potenza, il quale afferma che, se A è un insieme, la classe $\{X \mid X \subseteq A\}$ di tutti i suoi sottoinsiemi è anch'essa un insieme. Il sistema ZF aggiunge a Z come assioma lo *schema di collezione*, che per ciascuna formula Φ stabilisce che

$$\forall x_{\in a} \exists y \Phi(x, y) \Rightarrow \exists b \forall x_{\in a} \exists y_{\in b} \Phi(x, y).$$

Zermelo formulò anche l'Assioma di Scelta, **AC**, che in precedenza era stato inconsapevolmente usato dai matematici. Nella versione zermeliana, l'assioma si esprime così: ogni famiglia di insiemi a due a due disgiunti ammette una trasversale, cioè, un insieme che interseca ciascun membro della famiglia in un punto. Per gli insiemisti, la formulazione più naturale dell'assioma di scelta è il Principio del Buon Ordinamento: ogni insieme ammette un buon ordinamento (cioè, un ordinamento lineare *ben fondato*, ove una relazione binaria R si dice “ben fondata” se ogni sottoinsieme non vuoto X del campo della relazione ha almeno un elemento b che sia R -minimale tra gli elementi di X , di modo che in X non esiste alcun c tale che cRb). Sono ormai note centinaia di formulazioni equivalenti dell'assioma di scelta (che non fa parte di **ZF**). Molti matematici ritengono che una forma conveniente sia quella data nel Lemma di Zorn, il quale afferma l'esistenza di elementi massimali in un ordinamento parziale in cui ogni catena abbia un confine superiore.

La risposta della teoria dei tipi

Russell, invece, abbandonò le variabili globali, rimpiazzandole con variabili “tipate”. Il suo sistema originario era complicato dai suoi principi di ramificazione ma chi poi ci ha lavorato ha semplificato il sistema, arrivando a quella che oggi si indica come teoria semplice dei tipi.

Lo schema di comprensione fu mantenuto da Russell nella forma più generale possibile, una volta rimpiazzate le variabili globali con variabili tipate. Ecco dunque lo schema di comprensione che ne risulta:

$$\exists y_{n+1} \forall x_n [x_n \in y_{n+1} \iff \Phi(x_n)].$$

Qui, una variabile con indice n varia tra gli oggetti di tipo n ; e lo schema ci dice che la collezione di tutti gli oggetti di tipo n con una data proprietà è un oggetto di tipo $n + 1$. In questo contesto, perciò, l'argomento di Russell proverà che la classe $\{x_n \mid x_n \in x_n\}$, un oggetto di tipo $n + 1$, non è un oggetto di tipo n .

Nella teoria dei tipi non c'è alcun universo. La collezione $\{x_n \mid x_n = x_n\}$ di tutti gli oggetti di tipo n è un oggetto di tipo $n + 1$.

OSSERVAZIONE. Kemeny ha dimostrato nel 1949 che il sistema Z di Zermelo è molto più potente della teoria dei tipi.

La risposta di Quine

Menzioniamo rapidamente una terza proposta, avanzata un po' di tempo dopo da Quine. Nel sistema di Quine, alle variabili non è associato un tipo; una formula costruita a partire da formule atomiche della forma $x = y$ e $x \in y$ è detta *stratificabile* se si possono assegnare dei numeri interi a tutte le variabili in modo tale che a due occorrenze della stessa variabile resti assegnato lo stesso intero e, inoltre che, quando si abbia un'occorrenza di $x \in y$, il numero assegnato a y sia maggiore del numero assegnato a x , mentre, quando si abbia un'occorrenza di $x = y$, a x e a y sia assegnato lo stesso numero.

Perciò, una formula stratificata si ottiene da una formula ben formata della teoria semplice dei tipi rimuovendo le assegnazioni di tipo alle variabili. Il sistema di Quine, *New Foundations*, NF, contiene, accanto all'assioma di estensionalità, lo schema di comprensione di Frege ma solo limitatamente a $\Phi(x)$ stratificate:

$$\exists y \forall x [x \in y \iff \Phi(x)].$$

Ne segue che, essendo stratificabile la formula $x = x$, l'universo V è un insieme. Pertanto, nel sistema di Quine si può dimostrare che $V \in V$. I reiterati sforzi per dimostrare la coerenza di NF relativamente a qualche sistema più familiare non hanno ancora avuto successo. Tuttavia, anche se NF dovesse risultare incoerente, l'utilità della nozione di formula stratificabile non verrebbe meno.

Il programma di Hilbert e i risultati di Gödel

Hilbert si era preoccupato, già a partire dal 1902 ma con maggior impegno dal 1917, di cancellare dalla matematica pura le ombre derivanti dalla scoperta dei paradossi insiemistici e per molti anni rimase dell'idea che quest'opera di "ripulitura" della matematica fosse qualcosa che si poteva portare a termine "una volta per tutte". Hilbert era

convinto di aver trovato il modo per riuscirci: richiedeva che la matematica fosse formalizzata usando il suo operatore ε e poi che se ne mostrasse la coerenza mediante mezzi puramente finitari.⁽⁸⁾ Al Congresso Internazionale di Matematica svoltosi a Bologna nel 1928, Hilbert presentò una fiduciosa relazione sull'avanzamento dei lavori. La sua fiducia si sarebbe incrinata due anni più tardi.

Nella tesi di abilitazione presentata nel 1930, da cui è ricavato l'articolo pubblicato nel 1931, Gödel mostrava che il sogno di Hilbert non poteva essere realizzato, provando che qualunque sistema formale coerente, ricorsivamente assiomatizzabile e adeguato per l'aritmetica ricorsiva, sarebbe risultato sintatticamente incompleto, nel senso che qualche enunciato del sistema non sarebbe stato né dimostrabile né refutabile nel sistema stesso; Gödel, inoltre, mostrava che la coerenza del sistema poteva essere provata soltanto in un sistema la cui coerenza era meno sicura.

Veniamo così a sapere che la *logica proposizionale classica* è coerente, semanticamente completa e decidibile; che la logica predicativa del prim'ordine è coerente e, come mostrato da Gödel nella sua dissertazione, semanticamente completa; e che l'*aritmetica di Peano*, se (com'è opinione comune) coerente, non è né sintatticamente completa né decidibile.

La coerenza relativa dell'Assioma di Scelta

Un fattore importante dell'argomento di Gödel era l'uso della teoria della ricorsività (primitiva), che era stata sviluppata per rispondere a domande come “che cos'è un algoritmo?” e “che cosa vuol dire, per una funzione, essere computabile?” – fu questa la culla dell'informatica. Le

⁽⁸⁾ L'operatore ε “di scelta” permette di associare a una qualsiasi formula $\Phi(x)$ un termine $\varepsilon x\Phi(x)$, o più brevemente $\varepsilon_x\Phi$, in modo da eliminare i quantificatori presenti. Il significato inteso di $\varepsilon_x\Phi$ è: quel particolare x che soddisfa Φ se esiste qualcosa che soddisfi Φ . Perciò, $\varepsilon x\Phi(x)$ è equivalente a $\Phi(\varepsilon_x\Phi/x)$, ove si sia sostituito il termine $\varepsilon_x\Phi$ alle occorrenze libere della variabile x in Φ . Analogamente, in vista della interdefinibilità (“classica”) di $\exists$ e $\forall$, $\forall x\Phi(x)$ equivale a $\Phi(\varepsilon_x\neg\Phi(x)/x)$. Più avanti mi riferirò all'uso che Bourbaki fece dell'operatore di scelta.

idee della teoria della ricorsività, una volta generalizzate come principi di ricorsione transfinita, portarono Gödel a formulare l'Assioma di Costruibilità e poi a dimostrarne la coerenza relativa, rispetto agli altri assiomi di ZF. Da allora, quelle idee sono state estese ulteriormente, nella forma di un principio di ricorsione su arbitrarie relazioni ben fondate (ZF ammette questi principi, mentre Z non li ammette).

Un'illustrazione

Supponete di trovarvi al banco dei testimoni, sotto giuramento, e che il legale di parte opposta vi presenti una serie di affermazioni, invitandovi a dichiarare se le considerate vere o no. Supponete inoltre di rispondere “vero”, o “falso”, in conformità a una qualche procedura ricorsiva che avete deciso di seguire.

Considerate adesso la seguente ipotesi, che ha l'apparenza di una tattica difensiva minimale per un supposto mentitore (M).

IPOTESI M: la procedura scelta vi porta sempre a respingere un'affermazione che contraddica le precedenti affermazioni che avete accettato.

Supponete che la serie di affermazioni che vi vengono sottoposte sia in effetti un elenco ricorsivo di tutti gli enunciati dell'aritmetica di Peano, e che la vostra posizione iniziale sia quella di accettare gli assiomi di Peano. Infine, supponete che gli assiomi di Peano formino un sistema coerente.

Se l'ipotesi M fosse vera, allora, una volta giunti alla fine del tempo, l'elenco di affermazioni che avete accettato formerebbe un'estensione ricorsiva coerente dell'aritmetica di Peano. In base al teorema di Gödel, questo è impossibile.

Ne consegue che l'ipotesi M è falsa: qualsiasi algoritmo ricorsivo per non mentire vi esporrebbe, alla fine, all'accusa di aver violato il giuramento. In altre parole, verrà un momento in cui affermerete qualcosa, in conformità alla procedura ricorsiva scelta, che sarà in contraddizione con qualche vostra affermazione precedente, rendendovi colpevoli di falsa testimonianza.

Il gruppo Bourbaki

Occorre mettere bene in evidenza che il gruppo Bourbaki era composto da persone non sempre d'accordo le une con le altre. André Weil e Dieudonné non avevano tempo per la logica e pensavano che, una volta stabilito un formalismo, non c'è più bisogno di preoccuparsi della logica e dei fondamenti. Chevalley, invece, si spinse fino a preparare delle note seminariali sul celebre saggio di Gödel che conteneva la dimostrazione di coerenza relativa dell'Assioma di Scelta; e Eilenberg pensava che le idee fondazionali dovessero svilupparsi via via che la matematica stessa si sviluppava.

Fra i membri di Bourbaki c'erano molti matematici di spicco, ma a molti di essi la logica non interessava. Avevano notevole interesse per certe aree della matematica e non per altre. La mia opinione è che siano stati fuorviati dal loro entusiasmo fino a compiere errori nell'organizzare la serie di loro testi e che sulla logica, volendo copiare Hilbert, siano andati in confusione.

Per prima cosa, rivolgeremo l'attenzione alle conseguenze infelici del formalismo che scelsero di adottare. Poi, segnaleremo fraintendimenti ed errori presenti nei testi della scuola bourbakista.

L'uso da parte dei bourbakisti dell'operatore ε di Hilbert, che chiamarono τ

Nel formalismo di Bourbaki, i quantificatori non sono nozioni primitive. In modo informale, l'idea è quella di scegliere in partenza, per un'arbitraria formula $\Phi(x)$, un esempio, cioè, un qualche a tale che $\Phi(a)$. Quest'esempio è indicato da Bourbaki come $\tau_x \Phi$.⁽⁹⁾ Se non c'è alcun esempio del genere, $\tau_x \Phi$ sarà qualcosa di arbitrario, come – poniamo – l'insieme vuoto. I quantificatori sono introdotti nel modo che segue:

⁽⁹⁾ Così facendo la notazione hilbertiana veniva alterata. Qui ci atterremo alla notazione usata da Bourbaki.

Definizione. $(\exists xR)$ è $R(\tau_x R/x)$.⁽¹⁰⁾

Definizione. $(\forall xR)$ è $\neg(\exists x)\neg R$.

È da notare che, se traduciamo $\exists x\Phi$ come $\Phi(\tau_x\Phi)$, allora nello scrivere per esteso quest'ultima formula dobbiamo sostituire ogni occorrenza libera di x in Φ con il termine $\tau_x\Phi$, di modo che formule contenenti molti quantificatori diventano, una volta espresse, estremamente lunghe. Come risultato, la definizione di numero data nel 1948 da Bourbaki richiedeva la bellezza di 4523659424929 simboli, unitamente a 1179618517981 collegamenti finalizzati a evitare ogni ambiguità.

In successive edizioni di Bourbaki il termine per 1 arriva a un impressionante totale di

2409875496393137472149767527877436912979508338752092897

simboli, con

871880233733949069946182804910912227472430953034182177

collegamenti.⁽¹¹⁾

Potete fare il confronto con una moderna definizione insiemistica del numero 1, che impiega soltanto *otto* simboli.

Ulteriori difficoltà con la logica manifestate dalla scuola bourbakista

Le ulteriori difficoltà cui mi riferisco sono esaminate dettagliatamente nel mio articolo “Hilbert, Bourbaki and the scorning of logic”.⁽¹²⁾ Qui per brevità, mi limito a elencare gli otto passi, da A a H, in cui la vicenda si snoda, così come è raccontata nell'articolo:

⁽¹⁰⁾ [N.d.T. Con “ t/x ”, si indica la sostituzione del termine t alle occorrenze libere della variabile x in una formula, perciò con $\Phi(t/x)$ s'intende la formula risultante dalla sostituzione, in $\Phi(x)$, di x con t . Esempio: se come $\Phi(x)$ prendiamo $x \geq 0$, $\Phi(1/x)$ è $1 \geq 0$. Vedi anche nota 8.]

⁽¹¹⁾ Il computo è stato fatto con un programma scritto da Solovay in *Allegro Common Lisp*.

⁽¹²⁾ Vedi nota 1.

A. Nel 1922, Hilbert (in un'opera scritta insieme a Bernays) propose una trattazione alternativa della logica dei predicati (p. 3)⁽¹³⁾ ...

B. che, malgrado molti aspetti insoddisfacenti, fu adottata da Bourbaki per la serie degli *Éléments de mathématique* ... (p. 17)

C. ... e da Godement per il suo trattato di algebra, portandolo a esprimere diffidenza verso la logica (p. 26) ...

D. ... e questa diffidenza, intensificata fino alla fobia dal tono veelemente degli scritti di Dieudonné (p. 42) ...

E. ... e incoraggiata, tanto per fare un esempio, dagli errori e dalle oscurità di un ben noto testo universitario (p. 52), ...

F. ... è ciò che, a mio giudizio, sta dietro all'esclusione della logica dall'esame CAPES (p. 72), ...

G. ... di modo la rigidità centralistica ha conservato la confusione accumulatasi e conseguentemente un vizio nel modo d'insegnare (p. 75) ...

H. ... cui si comincerà a porre rimedio quando i matematici adotteranno una presentazione post-gödeliana della logica (p. 81).

Due manuali di scuola bourbakista

Mi limiterò a poche parole sul *Cours d'Algèbre* (1963) di Roger Godement e sul *Tome 1, Algèbre* (1978) del *Cours de mathématiques* (1957) di Jacqueline Lelong-Ferrand e Jean-Marie Arnaudès, discutendone le sezioni C ed E. Userò [G] per riferirmi al primo e [LF, A] per riferirmi al secondo.

In [LF, A] si citano sia la *Théorie des Ensembles* (1957) di Bourbaki sia l'*Algèbre* di Godement e si riproducono, ingigantendoli, gli errori di entrambi. Inoltre, tanto [G] quanto [LF, A] seguono Bourbaki e Hilbert nell'identificare verità e dimostrabilità. In [G] si legge che:

A tutt'oggi non si conosce un solo esempio di una relazione che si possa dimostrare essere indecibile (ragion per cui è improbabile che il lettore ne possa incontrare una in concreto ...). D'altro canto, i logici (e specialmente K. Gödel)

⁽¹³⁾ Questo e i successivi rimandi di pagina si riferiscono all'articolo suddetto.

hanno mostrato trent'anni fa che non c'è speranza di arrivare a trovare una “ragionevole dimostrazione” del FATTO che ogni relazione è o vera o falsa, mentre i loro argomenti rendono estremamente probabile che relazioni indecidibili esistano. In parole povere, gli assiomi usuali della matematica non sono sufficientemente restrittivi da impedire che si manifestino ambiguità logiche.

In [LF, A] si legge testualmente:

una relazione è detta *vera* se può essere inserita in una dimostrazione [p. 2]

e

una relazione è *vera* se la si può inserire in un testo dimostrativo [p. 3].

Questa identificazione fra verità e dimostrabilità è, ovviamente, pane per i denti di chi è cresciuto in casa bourbakista. Ma è lungi dall'essere soddisfacente. Per esempio, sia l'Ipotesi del Continuo, CH, sia la sua negazione hanno conseguenze interessanti. Perciò si potrebbe usare tanto l'una quanto l'altra nel corso di una dimostrazione e, di conseguenza, attenendoci a questo strano significato di “vero”, dovremmo dire che entrambe sono vere.

La scelta fatta da [G] e da [LF, A] è in favore di un sistema come $ZC = Z + AC$. [G] se la cava abbastanza meglio, perché fa in modo da dare una definizione di “finito” ed evita assurdità a proposito dell'Assioma di Scelta, a differenza di quel che succede con [LF, A], ove si può leggere:

Nella teoria degli insiemi è stata ben presto riconosciuta la necessità d'introdurre un assioma chiamato “assioma di scelta”: grosso modo, quest'assioma dice che quando una relazione del tipo $\exists x A(x)$ è vera, si può sempre costruire formalmente un oggetto di cui $A(x)$ è vera.

Ma questo è falso: l'Assioma di Scelta (AC) implica, per esempio, l'esistenza di un buon ordinamento del continuo, ma questo è perfettamente compatibile con l'assenza di un qualunque buon ordinamento definibile del continuo.

[LF, A] finiscono per andare incontro a una serie di difficoltà e, di fatto, non riescono a definire l'insieme $\mathbf{N}$ dei numeri naturali.

$\mathbf{N}$ è menzionato a pagina 8 come un oggetto da ammettere come un insieme. All'inizio di pagina 12 si dice che l'esistenza di $\mathbf{N}$ richiede un assioma il quale stabilisca che c'è un insieme non finito, ma non si dà alcuna definizione di *finito* prima di pagina 32. Si fa uso di $\mathbf{N}$ a pagina 20, allorché si introducono le successioni, e lo stesso avviene a pagina 28 per fornire un esempio di insieme ordinato – e viene anche messo in risalto che si tratta di un buon ordinamento.

A pagina 31 le nostre speranze di trovare una definizione di $\mathbf{N}$ vengono meno, perché gli autori scrivono:

Diamo per note tutte le definizioni e tutte le proprietà elementari relative ai numeri naturali. Da qui in poi, l'insieme degli interi (non-negativi) sarà indicato con $\mathbf{N}$.

E finalmente, a pagina 32 ci viene data una definizione di “finito”: un insieme si dice *finito* se è in corrispondenza biunivoca con un segmento iniziale dei numeri naturali.

Ma questo è un circolo vizioso. L'assioma dell'infinito è uno degli assiomi di $\mathbf{Z}$ (e poi di $\mathbf{ZF}$). Nella versione di Zermelo, esso afferma l'esistenza di un insieme cui appartiene l'insieme vuoto $\emptyset$ e che, se contiene un elemento x , contiene anche come elemento $\{x\}$. Questo assioma è stato invece formulato da [LF, A] come “Esiste un insieme che non è finito” e ciò senza aver fornito una definizione di *finito*. Adesso veniamo a sapere che un insieme è finito se è in corrispondenza biunivoca con una certa famiglia di sottoinsiemi di un insieme non definito.

Se cerchiamo di interpretare simili affermazioni in modo tale da evitare la circolarità, arriviamo a dire che c'è un insieme linearmente ordinato che non è in corrispondenza biunivoca con un suo segmento iniziale che sia *proprio*. Ma questo non basta: l'insieme $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ ha un ordinamento lineare rispetto al quale esso non è in corrispondenza biunivoca con un qualche suo segmento iniziale; eppure, nessuno direbbe che è un insieme infinito.

Godement sulle coppie ordinate

Nel § 2 del *Cours d'Algèbre*, Godement discute le coppie ordinate e i prodotti cartesiani, senza introdurre nuovi assiomi fino al § 3. Nella

Osservazione 1 del § 2 a pagina 50, scrive:

La coppia ordinata [come definita alla Kuratowski] è totalmente priva d'interesse. [...] L'unica cosa che abbia importanza matematica è conoscere le condizioni in base alle quali due coppie ordinate sono uguali tra loro.

Per un algebrista, potrebbe anche essere così; ma per un insiemista, interessato a usare la teoria astratta della ricorsione, è del tutto naturale chiedersi se un dato insieme, come HF (unione degli insiemi transitivi finiti) o HC (unione degli insiemi transitivi numerabili), sia chiuso rispetto alla formazione di coppie. Per tale ragione, conviene avere una definizione economica di coppia ordinata, e una definizione del genere è appunto quella data da Kuratowski.

Godement fornisce alcuni assiomi per la matematica e afferma che in base a tali assiomi può dimostrare che il prodotto cartesiano di due insiemi è un insieme. Ma *la sua affermazione è falsa*, perché il suo sistema ha la stessa forza, sotto il profilo della coerenza, di Z , mentre se in esso i prodotti cartesiani esistessero, indipendentemente da quale definizione si fosse scelta per la nozione di coppia ordinata, avremmo ZF nella sua interezza; il che non può essere, perché in ZF si dimostra la coerenza di Z , e nessun sistema che soddisfi alle ipotesi del teorema di Gödel può dimostrare la propria coerenza.

Parte II

Verità e dimostrabilità

Bourbaki si atteneva alla linea di Hilbert e così rimase impantanato nel fraintendimento pre-gödeliano in cui Hilbert era caduto a proposito della relazione fra verità e coerenza.

Se la matematica fosse completa, non ci sarebbe alcuna differenza tra la verità e la dimostrabilità. Gödel, invece, prova che non si può sfuggire all'indecidibilità. Eppure, i testi dei bourbakisti continuano a dire ai lettori che “enunciati indecidibili s'incontrano di rado”.

Con un po' d'esperienza possiamo arrivare a identificare quali sistemi siano adeguati per quali idee. La logica comincia a diventare

interessante quando possiamo stabilire le limitazioni di un certo sistema, eventualmente mostrando che una certa idea non può essere definita all'interno di quel sistema, o – per esprimersi con più tatto – che una certa proposizione è esprimibile in un dato sistema ma non è, in esso, né dimostrabile né refutabile.

Due esempi: il Teorema di Paris-Harrington e la determinatezza di tutti i giochi boreliani.

Quanto al primo esempio, esso stabilisce che è indimostrabile nell'aritmetica di Peano una versione finitaria “rafforzata” del principio combinatorio noto come “Teorema di Ramsey”.⁽¹⁴⁾

Quanto al secondo esempio, si consideri un gioco fra due giocatori a ed e (a per Adamo ed e per Eva) che a turno scelgono un numero naturale. È Adamo a iniziare. Dopo ω scelte (mosse nel gioco) resterà definita una successione infinita di numeri $\gamma = \langle a_0, e_0, a_1, e_1, \dots \rangle$. Per decidere chi vince si fissa preliminarmente un insieme A di tali successioni infinite: Adamo vince una partita del gioco se γ è in A , altrimenti vince Eva. Una strategia per ciascun giocatore è una funzione definita sui segmenti iniziali delle successioni, la quale indica al giocatore cosa scegliere nella mossa successiva. L'insieme A è *determinato* se uno dei giocatori ha una strategia vincente. L'insieme di tutte le successioni infinite come γ è munito di una topologia naturale che ne fa uno spazio di Baire. Si può dimostrare (D. Gale, F. M. Stewart) che se A è un aperto di questa topologia allora A è determinato. Per “determinatezza di Borel” s'intende l'asserzione che se A è boreliano in questa topologia allora A è determinato. Harvey Friedman ha provato che la determinatezza di Borel non è dimostrabile in $ZC = Z + AC$; più precisamente, ha provato che per dimostrarla sarebbe necessaria l'iterazione dell'operazione di insieme potenza su tutti gli ordinali numerabili. Donald Martin ha poi dimostrato la determinatezza di Borel in $ZFC = ZF + AC$.

Relativamente alle risorse espressive richieste per formulare i due esempi mi limito a osservare che:

⁽¹⁴⁾ Sul significato del Teorema di Paris-Harrington nella prospettiva del sistema NF di Quine si veda <<https://www.dpmms.cam.ac.uk/~tf/parisharringtontalk.pdf>>

- il Teorema di Paris-Harrington si può esprimere ma non dimostrare all'interno dell'aritmetica di Peano; ne esiste invece una facile dimostrazione servendosi dell'assioma dell'infinito;
- la determinatezza di tutti i giochi boreliani con mosse intere può essere espressa ma non dimostrata in $\mathbb{Z}$; la si può dimostrare in ZFC, anche se non in maniera facile, perché qualunque sua dimostrazione richiede parecchie iterazioni del passaggio all'insieme potenza.

Torniamo ai greci

Gli antichi greci facevano una quadripartizione della matematica in: geometria e astronomia (intesa come geometria applicata), di contro a aritmetica e musica (intesa come aritmetica applicata).⁽¹⁵⁾

Per individuare le aree della matematica promosse da Bourbaki, invece di usare termini che hanno già acquisito significati pittoreschi, mi servirò di due parole che ho coniato sulla base di fonti greche:⁽¹⁶⁾

ENDOMETICA e AEXITROFICA

Queste parole, che intendo come nomi di due diverse metodologie, mi permettono di sostenere che Bourbaki stava discutendo soltanto di endometica, che adottava un punto di vista logico il quale, benché forse adeguato per l'endometica, è inadeguato per l'aexitrofica, e che entrambe le parti coprono aree considerevoli della matematica. Con questo, *non* sto asserendo che tutta la matematica rientri nell'una o nell'altra. Benché non sia qui offerta una definizione esatta dei due concetti, ciò che li differenzia risulterà sufficientemente chiaro dal modo in cui ora me ne servirò per identificare correnti diverse all'interno del pensiero matematico.

⁽¹⁵⁾ Nell'ambito di un dibattito svoltosi nel 1938, Lebesgue si dichiarava incapace di separare la forma geometrica dalla parte aritmetica della matematica.

⁽¹⁶⁾ Mi sono fatto un'idea di quel che questi due nuovi termini potessero significare: *ἐνδομησις* è un sostantivo che denota il materiale di cui è fatta una struttura, mentre *ἀεξίτροφος* è un aggettivo che significa *promotore di crescita*.

Sul versante dell'endometica ci sono le parti della matematica che sono state chiamate "strutturalistiche", ovvero: le parti supportate dalle ricerche di Bourbaki, Mac Lane e i loro continuatori; le parti supportate dalla teoria zermeliana degli insiemi $\mathbf{Z}$, con uso pesante dell'assioma dell'insieme potenza; l'area per cui la nozione di buon ordinamento sembra avere poca utilità; in senso lato, la geometria, così come sorge dalla nostra percezione dello spazio; l'area in cui può bastare "a meno di isomorfismo". L'endometica è la parte "top-down" della matematica: si parte con tutto quel che c'è "là fuori" e gradualmente lo si suddivide in frammenti intelligibili. Il "prodotto finale" è un raccolto di piccole strutture che potrebbero essere modelli di molte cose nel mondo esterno, di modo che questo esperimento di pensiero si focalizza su ciò che potremmo indicare come matematica "locale".

Sul versante aexitrofico ci sono le parti della matematica in cui la proprietà di essere ben fondato è della massima importanza e in cui si preferisce evitare l'assioma dell'insieme potenza; il luogo geometrico della ricorsività astratta; in senso lato, l'aritmetica, che sorge dalla nostra intuizione del tempo; e qui "a meno di isomorfismo" non è abbastanza. Si comincia dal nulla e gradualmente si costruisce, finché si ha una descrizione dell'universo matematico; ecco perché quest'esperimento di pensiero si potrebbe indicare come matematica "globale".

Jean Dieudonné, la voce di Bourbaki, ha una volta osservato ⁽¹⁷⁾ che "non abbiamo ancora iniziato a capire la relazione tra la combinatoria e la matematica concettuale". Il mio suggerimento è quello d'intendere la matematica concettuale cui si riferiva Dieudonné come endometica, e d'intendere invece la combinatoria, con il suo uso dell'induzione matematica, come aexitrofica.

In effetti, mi sembra che la differenza configuratasi all'inizio del Novecento fra la teoria degli insiemi e la teoria dei tipi concida con la divisione, che Dieudonné coglieva nel suo saggio del 1980, fra "logica" e "matematica"; ed è una differenza che persiste ancora oggi, sotto

⁽¹⁷⁾ J. Dieudonné, *A panorama of pure mathematics, as seen by N. Bourbaki*, Academic Press, New York, 1982.

forma di quella divisione che separa gli aexitrofi, impegnati a sviluppare le intuizioni che stanno all'origine della teoria degli insiemi e rivolti alla matematica globale, e gli endometi, impegnati a sviluppare le intuizioni che stanno all'origine della teoria dei tipi e rivolti alla matematica locale.

La gerarchia di Lévy

Nella teoria “pura” degli insiemi, tutte le entità sono insiemi, dunque anche ogni elemento di un insieme è un insieme. L'Assioma di Fondazione stabilisce che ogni insieme non vuoto a abbia un elemento b tale che l'intersezione $a \cap b$ sia vuota. Ciò implica che non ci sono circoli e neppure catene discendenti infinite nella relazione di appartenenza. Un insieme *transitivo* è un insieme u tale che i membri di membri di u sono anch'essi membri di u . Gli insiemi transitivi si possono intendere come micro-universi all'interno dei quali è possibile effettuare computazioni astratte, di modo che essi risultano importanti dal punto di vista aexitrofico. Al riguardo è utile ricordare un teorema di Mostowski che stabilisce che ogni relazione di estensione ben fondata è isomorfa a un insieme transitivo.

Mi sia ora consentito far riferimento alla nozione di Δ_0 -formula (introdotta da Azriel Lévy), per indicare una formula in cui tutti i quantificatori sono *ristretti*: $\forall x \in a \exists y \in x \dots$ ove la ‘ a ’ è una variabile per insiemi distinta da ‘ x ’. Espressioni come $\forall x \in x$ sono proibite. Esempi: “ u è transitivo” è una proprietà Δ_0 , essendo esprimibile come $\forall y \in u \forall x \in y (x \in u)$; “ $a = \cup b$ ” è Δ_0 , perché $a = \cup b \Leftrightarrow [\forall y \in a \exists x \in b (x \in y) \wedge \forall y \in b \forall x \in y (x \in a)]$; invece, “ d è l'insieme potenza di c ” non è Δ_0 e la ragione è presto detta.

Per ciascuna formula Φ del linguaggio della teoria di Zermelo, se A è un insieme transitivo (o una classe transitiva), indichiamo con $(\Phi)^A$ il risultato della riscrittura di Φ restringendo il raggio di tutte le variabili quantificate ad A . Perciò, $(\forall x \Psi)^A$ e $(\exists x \Psi)^A$ saranno $\forall x (x \in A \Rightarrow (\Psi)^A)$ e $\exists x (x \in A \ \& \ (\Psi)^A)$, rispettivamente.

Si noti che se $\Phi(a, b)$ è un predicato Δ_0 di a e b , e se a, b, u e w sono come sopra, allora $(\Phi(a, b))^u$ se e solo se $(\Phi(a, b))^w$, essendo en-

trambe equivalenti a $\Phi(a, b)$. Possiamo dire che le Δ_0 -formule sono *assolute* per insiemi transitivi.

Potrebbe verificarsi un caso come il seguente:

ci sono insiemi transitivi u, w con $u \subseteq w$,
 e insiemi a, b, c con a e b in u , c in w , tali che:
 ogni membro di b e di c è un sottoinsieme di a ,
 ogni sottoinsieme di a che è in u è un membro di b ,
 ogni sottoinsieme di a che è in w è in c , cosicché $b \subseteq c$;
 ma w contiene sottoinsiemi di a che non sono in u , cosicché $u \subset w$.

Allora u ‘pensa’ che b sia l’insieme potenza di a ; e w ‘pensa’ che c sia l’insieme potenza di a ; tuttavia, $b \neq c$.

Di conseguenza, l’operazione $\mathcal{P}$ d’insieme potenza *non è assoluta* per gli insiemi transitivi e di conseguenza il predicato $x = \mathcal{P}(y)$ non può essere descritto da una Δ_0 -formula.

E ora un minimo di notazione in più: le Σ_1 -formule sono quelle della forma $\exists x\Phi$ e le Π_1 -formule sono quelle della forma $\forall x\Phi$, ove Φ è Δ_0 . Una Δ_0 -classe è della forma $\{z \mid_z \Phi(z, a)\}$, ove Φ è Δ_0 .

La ricorsione in teoria degli insiemi: alcuni sistemi deboli

Il sottosistema KP di ZF, che cattura una ben definita porzione della teoria astratta della ricorsione, ha la Δ_0 -separazione e la Δ_0 -collezione, ma non l’assioma dell’insieme potenza. Il sottosistema MAC di ZC ha l’assioma dell’insieme potenza, la Δ_0 -separazione e AC, ma non la collezione.

Le relazioni fra Z, KP e MAC sono sottili:

- Z e Z + KP sono equicoerenti,⁽¹⁸⁾
- (Kemeny) in Z si dimostra la coerenza di MAC,
- ogni formula stratificata dimostrabile in Z + KP è dimostrabile in Z,
- MAC e MAC + KP sono equicoerenti,

⁽¹⁸⁾ Due teorie si dicono equicoerenti se la coerenza dell’una può essere derivata dalla coerenza dell’altra.

- MAC e la teoria semplice dei tipi (incluso un assioma dell'infinito) sono equicoerenti,
- ogni formula stratificata dimostrabile in $\text{MAC} + \text{KP}$ è dimostrabile in MAC ,
- (Coret) in $\mathbf{Z}$ si dimostra il rimpiazzamento stratificato,
- l'asserzione stratificabile “esiste un insieme infinito di cardinali infiniti” non è dimostrabile in $\mathbf{Z}$, quindi non è stratificabile neppure l'assioma di Π_1 -collezione,
- gli schemi di KP , ristretti a formule Φ stratificabili, sono dimostrabili in $\mathbf{Z}$.

Questi risultati suggeriscono una certa “ortogonalità” fra endometica e aexitrofica.

La coerenza relativa dell'Assioma di Scelta

Siete capaci di definire “definibile”? E nel caso, qual è il minimo ordinale indefinibile? Se diciamo che gli ordinali formano una totalità più che numerabile ma che le definizioni formano una totalità che è numerabile, sembra che siamo arrivati a una contraddizione non appena si consideri il minimo ordinale non definibile. La nozione gödeliana di costruibilità è un modo di districare la matassa. Infatti, si può verificare che la seguente definizione è corretta.

DEFINIZIONE. Sia u un insieme transitivo. Allora $\text{Def}(u)$ è la collezione dei sottoinsiemi di u che sono definibili su u mediante una formula insiemistica interpretata in u , ammettendo parametri estratti da u .

John von Neumann introdusse la seguente definizione per ricorsione transfinita:

$$V_0 = \emptyset; \quad V_{v+1} = P(V_v); \quad V_\lambda = \bigcup_{v < \lambda} V_v$$

e mostrò che l'assioma di fondazione, che non abbiamo discusso, è equivalente a $V = \bigcup_{v \in ON} V_v$, ove V è, come prima, l'universo e ON sta a indicare la classe degli ordinali.

Gödel fornì questa definizione:

$$L_0 = \emptyset; L_{v+1} = \text{Def}(L_v); L_\lambda = \bigcup_{v < \lambda} L_v$$

e definì l'universo costruibile, L , come $\bigcup_v L_v$

L'*assioma di costruibilità* è allora l'asserzione che $V = L$.

Le cose cominciano in modo tranquillo: per $n < \omega$, $L_n = V_n$ e $HF = L_\omega = V_\omega$ (HF è l'unione di tutti gli insiemi transitivi finiti). Poi le cose vanno diversamente: $L_{\omega+1}$ è numerabile, ma $V_{\omega+1}$ non lo è.

Sia ora ZFL il risultato dell'aggiunta di $V = L$ agli assiomi di ZF. Quella che segue è la struttura della dimostrazione della sua coerenza relativa provata da Gödel.

1. Per ciascun assioma Φ di ZF, dimostrare che $(\Phi)^L$ è un teorema di ZF.
2. Dimostrare che $(V = L)^L$ è un teorema di ZF. Si può controllare facilmente che le regole d'inferenza⁽¹⁹⁾ funzionano bene. Perciò, se $\Phi \wedge \neg \Phi$ fosse un teorema di ZFL, $(\Phi)^L \wedge \neg (\Phi)^L$ sarebbe un teorema di ZF.
3. Adesso, lavorando in ZFL, dimostrare l'assioma di scelta, fornendo una procedura uniforme per passare da un buon ordinamento di L_v a una sua estensione finale⁽²⁰⁾ che è un buon ordinamento di L_{v+1} . L'unione di tutti questi buon-ordinamenti sarà un Σ_1 -buon ordinamento dell'universo L .
4. L'ipotesi del continuo (che afferma l'esistenza di una corrispondenza biunivoca tra l'insieme dei numeri reali e l'insieme degli ordinali numerabili) è dimostrabile in ZFL, sebbene con maggiore difficoltà. Il lemma essenziale è che, se $V = L$, ogni sottoinsieme di ω sta dentro a L_v , per qualche ordinale numerabile v , e quindi sta in L_{ω_1} , che è di cardinalità $\aleph_1$.

⁽¹⁹⁾ Con riferimento a un linguaggio del primo ordine con identità, oltre agli assiomi logici relativi a connettivi e quantificatori (intesi nel loro significato "classico"), si devono infatti esplicitare le regole logiche che governano le inferenze. L'insieme di tali regole varia in funzione del tipo di assiomatizzazione della logica ("classica") che si è adottato. Tuttavia, esse solitamente comprendono la regola del *modus ponens* (da Φ e $\Phi \rightarrow \Psi$ si può inferire Ψ) e la regola di sostituzione (da $\Phi(x/t)$ e $t = s$ si può inferire $\Phi(x/s)$, ove t e s sono termini).

⁽²⁰⁾ Per la definizione del concetto di estensione finale, si veda G. Lolli, *Teoria assiomatica degli insiemi*, Boringhieri, Torino 1974 (p. 20).

I numeri naturali (definiti alla von Neumann, cioè, $0 = \emptyset$, $1 = \{0\}$, $2 = \{0, 1\}$, $3 = \{0, 1, 2\}$, ecc.) e le operazioni aritmetiche di L non differiscono da quel che sono per V ; perciò, ogni asserzione aritmetica dimostrabile in **ZFL** è dimostrabile in **ZF**. Osservazioni analoghe (Mostowski, Shoenfield) valgono per i teoremi dell'analisi con non più di due quantificatori su numeri reali – se ce ne sono altri, vincolano variabili su razionali o interi.

L'indagine che Jensen ha fatto su L ha portato a dimostrare principi combinatori molto potenti in L , noti come $\diamond$, $\square$, 'l'intrico' (*morass*) ...

Soluzioni aexitrofiche a questioni endometiche

L'assioma di costruibilità è il punto d'arrivo nella matematica *aexitrofica*; tuttavia, viene a capo di questioni endometiche senza che se ne conosca una soluzione endometica.

Bourbaki parla di tre specie di strutture: le strutture algebriche, le strutture d'ordine e le strutture topologiche. *È importante notare che esse sono tutte quante endometiche*, perché le loro rispettive definizioni non fanno uso di idee tratte dalla teoria della ricorsione. Ebbene, ecco tre problemi nelle rispettive aree di queste tre strutture-madri.

- 1) Esiste un gruppo abeliano G che non sia libero ma che abbia una proprietà goduta da tutti i gruppi abeliani liberi, ovvero tale che $Ext(G, \mathbf{Z}) = 0$?
- 2) Esiste un ordinamento lineare denso in se stesso, senza alcun insieme non numerabile di intervalli aperti a due a due disgiunti e non vuoti, che sia completo, ma che non sia isomorfo a $\mathbf{R}$, e di conseguenza non sia separabile?
- 3) Esiste uno spazio ereditariamente separabile di cardinalità maggiore di $2^{\aleph_0}$?

Tutte e tre i problemi sono indecidibili in **ZFC**, ma sono tutti e tre decisi dall'assioma gödeliano di costruibilità, $V = L$. Le risposte sono, rispettivamente: No, Sì, Sì.

“Quando c’è bisogno di uno strumento più potente, non c’è motivo di fermarsi a metà”, afferma Dieudonné. ⁽²¹⁾ Concordo.

A onore di Mac Lane va il fatto che abbia riconosciuto l’importanza della soluzione data da Shelah, nel 1974, al problema di Whitehead sui gruppi abeliani liberi, che abbiamo appena menzionato. Mac Lane, però, non è stato altrettanto illuminato a proposito dei grandi cardinali; e Dieudonné disse, in privato, che i matematici non li avrebbero mai incontrati.

Bisognerebbe mettere in rilievo che l’importanza sta nelle proprietà dei grandi cardinali piuttosto che nei grandi cardinali come tali. L contiene tutti gli ordinali e potrebbe succedere che un ordinale che è numerabile in V sia non numerabile in L ; anzi, in L esso potrebbe essere un grande cardinale, inaccessibile, o di Mahlo o debolmente compatto.

Un classico quesito di Lusin era se ogni insieme non numerabile co-analitico di reali possieda un sottoinsieme perfetto. ⁽²²⁾ Gödel provò che se $V = L$, la risposta è negativa. Dopo l’introduzione del forcing a opera di Cohen, Solovay arrivò a una risposta più precisa. Per ciascun sottoinsieme a di ω , si può modificare la definizione gödeliana in modo da ottenere una classe $L(a)$ che è transitiva, contiene a e tutti gli ordinali, e rispetto alla quale gli assiomi di ZF valgono. Allora, la risposta al quesito di Lusin è positiva se e solo se per ciascun a , $(\omega_1)^{L(a)}$ è numerabile, il che è a sua volta equivalente a dire che “ (ω_1) è inaccessibile ai reali”, nel senso che il vero ω_1 è un cardinale fortemente inaccessibile in ciascun $L(a)$. Si conoscono altre proprietà dei grandi cardinali che si nascono in altri enunciati, apparentemente innocui, della matematica ordinaria. La fiducia di Dieudonné era malriposta.

⁽²¹⁾ *Foundations of Modern Analysis*, Introduzione al cap. VIII, p. 148 dell’edizione ampliata e corretta (Academic Press, New York 1969).

⁽²²⁾ Per queste nozioni, si veda A. Kanamori, “L’ipotesi del continuo”, in *La matematica II. Problemi e teoremi*, a cura di C. Bartocci e P. Odifreddi, Einaudi, Torino 2008, pp. 461-514.

La scelta degli assiomi

Bourbaki scelse qualcosa di simile a Z nell'articolo *The foundations of mathematics for the working mathematician* (1948-49). Qui, le coppie ordinate erano trattate come nozione primitiva, ma Bourbaki non aveva un assioma che affermasse l'esistenza di una coppia non ordinata di due elementi; e nessun assioma del genere era ricavabile da quelli che invece erano posti.

Nel libro del 1954, Bourbaki passò a un sistema più forte – simile a ZFC – e, in virtù dell'uso che faceva dell'operatore di Hilbert, una forma (per classi) dell'Assioma di Scelta è in effetti dimostrabile in quel sistema. Ma non è saggio esser troppo sicuri di sé e pensare di poter determinare “una volta per tutte” la scelta degli assiomi giusti. Gli assiomi ci sono per far sì che la matematica sia comunicabile con esattezza, ma la matematica cresce e, come anche Eilenberg pensava, i fondamenti devono crescere insieme a essa.

In anni recenti, forti ipotesi insiemistiche come il principio di Vopenka e l'esistenza di cardinali supercompatti sono state usate per costruire localizzazioni per vari funtori.⁽²³⁾

La trasmissione dell'ignoranza

A Bordeaux, il 22 febbraio del 2006, Jean-Marc Deshouillers ha tenuto una conferenza di novanta minuti,⁽²⁴⁾ nel corso della quale gli accenni negativi alla logica sono più o meno gli stessi di quelli fatti cinquant'anni prima dai bourbakisti. Deshouillers ha detto che la logica formale è faticosa. A un certo punto ha usato il termine “metateorema” e poi si è affrettato ad aggiungere che è qualcosa di molto complicato, qualcosa che non sapeva spiegare, rispecchiando

⁽²³⁾ J. Bagaria, Carles Casacuberta, A.R.D. Mathias, J. Rosický, Definable orthogonality classes in accessible categories are small, *J. European Math. Soc.*, di prossima pubblicazione.

⁽²⁴⁾ http://www.canalu.tv/video/universite_bordeaux_segalen_dcam/les_theoremes_de_godel_fin_d_un_espoir.3954.

così l'osservazione di Lolli⁽²⁵⁾ secondo cui i matematici si ritraggono all'idea che una formula matematica possa essere un oggetto matematico.

Ma è davvero così complicata la nozione di metateorema? Deshouillers ha ben presente l'idea di sistema formale. Ora, un metateorema è semplicemente un teorema su sistemi formali; e a sua disposizione c'è già un eccellente esempio: se ZF è coerente, tale è anche $ZF + AC$.

Deshouillers afferma che il lavoro dei logici non ha avuto effetti sul lavoro dei matematici; proprio come, suppongo, la classificazione dei gruppi finiti non avrebbe avuto nessun effetto su quegli studiosi di teoria dei modelli che non potevano permettersi il disturbo di informarsi al riguardo. Per quelli che potevano, erano lì pronti degli ottimi risultati.

Deshouillers pensa che gli ultrafiltri siano cose bizzarre, come già Mac Lane disse dei cardinali misurabili; non è al corrente del fatto che a meno di isomorfismi c'è un solo modello ben fondato di PA ; non sa che i modelli non-standard possono abbreviare le dimostrazioni; non si è ancora reso conto che una teoria completa può avere modelli non isomorfi, e in certi casi sono modelli della stessa cardinalità; e ritiene che non si possa discutere di insiemi infiniti senza far appello ad AC .

Deshouillers è inoltre convinto che la mancanza di unicità dei modelli non conti, perché si lavora pur sempre nella stessa teoria. Ma questo è semplicemente falso: chi lavora in teoria dei topos, per esempio, ha un approccio molto diverso alla matematica rispetto a chi lavora in teoria degli insiemi. I probabilisti hanno un altro approccio ancora. Per fortuna c'è un terreno comune, ma che ne sarebbe dell'inventività se tutti fossero costretti a pensare indossando una camicia di forza (e la stessa per tutti)?

Stando a quel che dice Deshouillers, risultati che sono stati provati usando metodi non-standard si possono provare anche senza. Può anche darsi, ma sarebbero stati ottenuti in maniera altrettanto spedita? Qui

⁽²⁵⁾ Gabriele Lolli, *Why mathematicians do not love logic*, <homepage.sns.it/lolli/articoli/Lolli.pdf>.

entra in gioco una questione relativa alla lunghezza delle dimostrazioni. Il teorema di Hindman ⁽²⁶⁾ ne è una buona illustrazione: se ne conoscono quattro dimostrazioni diverse e ciascuna di esse fa assunzioni differenti sull'esistenza di oggetti d'ordine superiore. Una dimostrazione sfrutta l'esistenza di un ultrafiltro di un tipo particolare, un'altra si serve di un semigruppato compatto formato dalla classe di tutti gli ultrafiltri su $\mathbb{N}$. Più grande la cassetta degli attrezzi, più breve la dimostrazione.

Applicazioni degli ultrafiltri e dei modelli non-standard non sono difficili da trovare. Eccone sei, delle quali Deshouillers menziona la prima:

- il teorema di Bernstein-Robinson sugli operatori polinomialmente compatti;
- la trattazione che Anderson fa del moto browniano mediante l'uso di misure di Loeb;
- la dimostrazione non-standard di Cutland e Kendall di un teorema sul frazionamento del tempo;
- la dimostrazione data da Henson e Wattenberg del teorema di Egoroff;
- la dimostrazione data da Ax e Kochen della quasi-validità della congettura di Artin;
- la dimostrazione data da Silver della compattezza a cardinali singolari, che ha aperto le chiuse in teoria degli insiemi.

ANNOTAZIONE. Deshouillers è un esperto di teoria dei numeri, con al suo attivo molti bei risultati. Ma, nel tentativo di raccontare al pubblico i teoremi di Gödel, ottenuti settant'anni prima, ripete nel 2006 gli stessi errori che si trovano in quanto Bourbaki pubblicò nel 1954, Godement nel 1963 e Delong-Ferrand e Arnaudiès nel 1978.

Perché ha consentito che venisse registrata per la posterità una conferenza così disinformata e mal preparata? Viene da dire che la ragione sia la seguente: che nella sua vita professionale ha lavorato all'interno di una cultura dell'ignoranza.

⁽²⁶⁾ Cfr. H. Towsner, "A simple proof and some difficult examples for Hindman's theorem", *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 53, 2012, pp. 53-65.

Bourbaki e l'economia

Ci sono economisti interessati alle critiche che rivolgo a Bourbaki, perché pensano che l'influenza di Bourbaki abbia orientato l'economia matematica nella direzione sbagliata. In effetti, all'interno dell'economia ho trovato spunti che vanno nel senso della mia suddivisione: l'economista spagnolo Huerta de Soto⁽²⁷⁾ si oppone alla scuola austriaca, la quale fa uso di quella logica verbale (astratta e formale) che consente l'integrazione del tempo soggettivo e della creatività umana con la visione neoclassica, che fa uso del formalismo matematico classico, ovvero, del linguaggio simbolico tipico dell'analisi di fenomeni atemporali costanti. A me l'aggettivo "atemporale" suggerisce che Huerta de Soto abbia in mente l'endometica, non l'aexitrofica.

In un'altra direzione, a pagina 83 del libro di Weintraub,⁽²⁸⁾ si menziona Volkmann per aver asserito che *la fisica non è bottom-up*. Sono troppo ignorante di economia per capire le questioni dibattute, ma posso pensare che nel quadro dell'aexitrofica ci siano idee che potrebbero sicuramente essere utili agli economisti.

Burocrazia contro creatività

Che la creatività sia bloccata da un eccessivo controllo burocratico è un fatto ben noto agli storici delle culture. Citerò alcuni passi del grande economista e studioso di teorie sociali Friedrich von Hayek.⁽²⁹⁾

Nel suo studio sulle istituzioni e sul diritto privato degli egizi, Jacques Pirenne descrive il carattere essenzialmente individualistico della legge sul finire della terza dinastia, quando la proprietà era "individuale e inviolabile, integralmente nelle mani del proprietario", ma registra l'inizio della sua decadenza già du-

⁽²⁷⁾ Jesus Huerta de Soto, *The ongoing Methodenstreit of the Austrian school*, *Journal des Economistes et des Etudes Humaines*, 8, 1998, pp. 75-113.

⁽²⁸⁾ E. Roy Weintraub, *How economics became a mathematical science*, Duke University Press, Durham e Londra 2002.

⁽²⁹⁾ *The fatal conceit: the errors of socialism*, Routledge, Londra 1988 (i brani sono tratti da p. 33, 44, 45, 46, nell'ordine).

rante la quinta dinastia.⁽³⁰⁾ Ciò condusse al socialismo di stato dell'ottava dinastia – descritto in un altro testo, anch'esso in francese, pubblicato nello stesso anno –,⁽³¹⁾ che prevalse nei successivi duemila anni e spiega ampiamente il carattere stagnante della civiltà egizia in quell'arco di tempo.

Sembra quasi che i governi potenti non si siano mai stancati di danneggiare lo spontaneo processo di miglioramento, operando in così malo modo che l'evoluzione culturale venne arrestata sul nascere. Il governo bizantino dell'Impero romano d'Oriente può esserne considerato esempio.⁽³²⁾

Anche la storia della Cina testimonia numerosi tentativi da parte del governo, rivolti a istituire un ordine così perfetto che l'innovazione divenne impossibile.⁽³³⁾

Ciò che portò la tanto avanzata civiltà della Cina a restare dietro all'Europa fu il fatto che i suoi governi dettero un così stretto giro di vite da non lasciare adito a sviluppi innovativi, mentre l'Europa deve probabilmente la sua straordinaria espansione nel Medio Evo alla sua anarchia politica.⁽³⁴⁾

Un eccessivo controllo burocratico si collega, a mio giudizio, a un'avversione verso la logica. Il compagno Mao scoraggiava lo studio di Confucio e sospetto che i politici preferiscano che l'elettorato non sia capace di criticare le loro dichiarazioni. Ma fortunatamente succede che, certe volte, nelle società sviluppate la logica sia tenuta in grande conto e sia insegnata nel modo appropriato.

Nell'Inghilterra del primo Ottocento, quattro economisti – Whately, Mill, Jevons e il primo Keynes – iniziarono la loro carriera scrivendo un trattato di logica, prima di volgersi allo sviluppo delle loro idee sull'economia.

⁽³⁰⁾ Hayek fa riferimento a J. Pirenne, *Histoire des institutions et du droit privé de l'ancienne Egypte*, Edition de la Fondation Egyptologique Reine Elisabeth, Bruxelles, 1934.

⁽³¹⁾ Qui, il riferimento è a S. Dairan, *Un socialisme d'état quinze siècles avant Jesus-Christ*, Librairie Orientaliste P. Geuthner, Parigi 1934.

⁽³²⁾ A tale proposito, i riferimenti di von Hayek sono a tre lavori di M. Rostovtzeff pubblicati nel 1930: 'The Decline of the Ancient World and its Economic Explanation', *Economic History Review*, II; *A history of the ancient world*, Clarendon Press, Oxford 1930; *L'empereur Tibère et le culte impérial*, F. Alcan, Parigi; e *Gesellschaft und Wirtschaft im Römischen Kaiserreich*, Quelle nonché a Luigi Einaudi, 'Greatness and decline of planned economy in the Hellenic world', *Kyklos* II, 1948, pp 193-210, 289-316.

⁽³³⁾ J. Needham, *Science and civilisation in China*, Cambridge University Press, Cambridge 1954-85.

⁽³⁴⁾ J. Baechler, *The origin of capitalism*, Blackwell, Oxford 1975 (p. 77).

Andando indietro di due millenni e mezzo, ecco cosa dice Confucio nel cap. 13 degli *Analecta*:

Tse-lu affermò: “Il governatore di Wei vi sta aspettando per iniziare a governare insieme a voi. Da che cosa pensate di cominciare?”

Il Maestro rispose: “Quel che è necessario è rettificare i nomi”.

“Già! Come no?”, disse Tse-lu. “Voi siete lontano dai problemi reali! e perché mai bisognerebbe rettificarli?”

Il Maestro disse: “Come siete ignorante! Un uomo di mente elevata, a proposito di quel che non sa, manifesta un cauto riserbo. Se i nomi non sono corretti, il linguaggio non è in accordo con la verità delle cose. Se il linguaggio non è in accordo con la verità delle cose, gli affari non possono essere condotti con successo. Quando gli affari non possono essere condotti con successo, le buone maniere e la musica non fioriscono. Quando le buone maniere e la musica non fioriscono, le sanzioni non saranno date in modo appropriato. Quando le sanzioni non sono date in modo appropriato, la gente non sa più come muovere le mani e i piedi. Perciò un uomo superiore giudica necessario che i nomi che usa siano appropriatamente espressi e, inoltre, che quel che intende esprimere sia appropriatamente comunicato. Ciò che l'uomo di mente elevata esige è appunto che nelle sue parole non ci sia niente di scorretto!”

Nel proporre una simile rettifica Confucio aveva l'istinto di un logico; e di una ripulitura del genere c'è bisogno nel nostro tempo. Oggi, come allora, la logica ha, nella sua funzione di critica del ragionamento, un ruolo importante da svolgere per far progredire e per trasmettere la conoscenza: *i logici sono i critici della ragione, non i suoi schiavi.*

Adrian R. D. Mathias
Laboratoire d'Informatique et de Mathématiques,
Université de la Reunion
E-mail: ardm@dpmms.cam.ac.uk
ardm@email.mathematik.uni-freiburg.de