La Matematica nella Società e nella Cultura

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Paola Cantù

Filosofia e matematica tra XIX e XX secolo

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **7** (2014), n.3 (Matematica e filosofia. Contributi al dialogo interdisciplinare), p. 481–502.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2014_1_7_3_481_0>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2014.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. VII, Dicembre 2014, 481-502

Filosofia e matematica tra XIX e XX secolo

Paola Cantù

1. – Introduzione

Per comprendere il rapporto tra filosofia e matematica tra XIX e XX secolo si tende spesso a considerare le interazioni tra le due discipline in filosofia della matematica e della logica. Stewart Shapiro ha distinto due diverse modalità di rapporto tra ontologia e pratica della matematica, descritte rispettivamente dai principi metodologici *philosophy first* e *philosophy last-if-at-all*: nel primo caso le ragioni filosofiche a favore di una determinata ontologia matematica determinano normativamente come la matematica deve essere fatta; nel secondo caso la filosofia è un mero epifenomeno che non esercita alcuna influenza sullo sviluppo della matematica. (1) Questa distinzione, che ha avuto molta fortuna in filosofia della matematica, soprattutto nel dibattito tra realisti e nominalisti, è spesso ripresa, con qualche variante terminologico-concettuale, anche nelle ricerche sulla spiegazione matematica, ove si distingue tra spiegazione orientata alla pratica (*practice-driven*) e spiegazione orientata alla filosofia (*philosophy-driven*).

In questo articolo faremo uso di quest'ultima distinzione terminologica, estendendola però a tutti gli ambiti di filosofia della matematica (e non solo all'ontologia o alla questione della spiegazione) e a diverse tradizioni di ricerca (non solo logica, filosofia analitica e questioni fondazionali, ma anche approcci interdisciplinari quali la teoria dell'argomentazione). (2) L'approccio orientato alla filosofia – al quale Shapiro si allinea, pur insistendo sulla necessità di abbattere inutili muri tra filosofia e matematica e

(1) Cfr. Shapiro (1997), pp. 25 ss.

(2) La distinzione *philosophy-driven* e *practice-driven* adottata in questo articolo ricalca in parte l'opposizione tracciata da Paolo Mancosu tra una certa tradizione di filosofia analitica e quella che Mancosu chiama tradizione *maverick*, che include Lakatos (1976) e Corfield (2003), ma non ha valore storico bensì, al pari di Shapiro, metodologico. Cfr. Mancosu (2008a), p. 3.

sull'opportunità di considerare *defeasible* la normatività filosofica – assume che la filosofia sia un'attività svolta esclusivamente da filosofi di mestiere (che eventualmente possono essere anche competenti in matematica) e che influenza la matematica senza esserne a sua volta influenzata in maniera significativa. A tale approccio ascriviamo le indagini collegate allo sviluppo degli *ismi* novecenteschi (neo-logicismo, nominalismo, strutturalismo, ecc.), le ricerche correlate al noto dilemma di Benacerraf sull'indispensabilità della matematica e più in generale tutti i contributi al problema dell'esistenza di oggetti astratti, del loro accesso cognitivo e della scelta di una logica al primo o al secondo ordine. ([3]) L'approccio orientato alla pratica matematica è invece caratterizzato dall'idea che la ricerca di soluzioni ai problemi aperti in matematica così come la ricerca di definizioni e di argomenti siano attività essenzialmente filosofiche – indipendentemente da chi se ne occupa – che possono avere ricadute tanto sullo sviluppo delle teorie matematiche stesse quanto sulle trasformazioni degli strumenti concettuali di cui si serve la filosofia. Nell'approccio orientato alla pratica includiamo le indagini che mostrano l'intersecarsi di filosofia e storia della matematica, le ricerche epistemologiche relative alla visualizzazione e alla spiegazione in matematica, le indagini sulle dimostrazioni assistite dal calcolatore, e l'analisi di alcune proprietà degli argomenti matematici, come la purezza, l'evidenza, la fecondità. ([4])

([3]) Si pensi ad esempio alla filosofia della matematica cosi come è intesa dai filosofi analitici o ai temi trattati nella maggioranza delle introduzioni alla filosofia della matematica e nelle voci enciclopediche (per esempio Shapiro 2005, i primi capitoli di Irvine 2009, Horsten 2007, ecc.).

([4]) L'approccio *practice-driven* per come è inteso qui, include ad esempio Lakatos (1976) e Corfield (2003), ma anche la nuova epistemologia (Mancosu 2008), le interazioni tra filosofia e storia (Ferreiros e Gray 2006, van Kerkove *et al.* 2010), le recenti indagini sull'argomentazione in logica e in matematica (Gabbay *et al.* 2002, Aberdein e Dove 2013), le ricerche sulla teoria degli insiemi, sulla probabilità, sulla computabilità, sulla matematica inconsistente o sulle applicazioni e i problemi aperti in matematica (Irvine 2009, Colyvan 2012). Questa distinzione si intreccia ma non coincide con le distinzioni tracciate da Carlo Cellucci (2013, pp. 93-96) tra filosofia della matematica statica (volta alla giustificazione di un corpo di conoscenze stabilito) e dinamica (interessata piuttosto alla crescita della conoscenza matematica) e tra approccio top-down (a partire da qualche assunzione generale non dimostrata) e bottom-up (a partire dall'attività degli individui). Se condivide con l'approccio dinamico l'interesse per le argomentazioni induttive accanto a quelle deduttive, è *bottom-up* nel senso che emerge nell'attività dei singoli matematici.

Per comprendere il ruolo della filosofia in matematica tra XIX e XX secolo, ci sembra più utile un approccio *practice-driven*, che si interroghi sul modo in cui l'attività filosofica si è sviluppata all'interno delle teorie matematiche stesse, piuttosto che un approccio *philosophy-driven*, in cui l'attività filosofica associata alla matematica è ridotta alla sola questione fondazionale. Generalmente, infatti, si ricorre alla storia dei fondamenti della matematica e della logica per illustrare i complessi rapporti tra matematica e filosofia tra Ottocento e Novecento, ma questo è solo uno dei campi in cui emerge l'attività della filosofia all'interno della matematica. Anzi, in un certo senso, si potrebbe dire che in tale ambito la filosofia prende spunto da un problema proprio della matematica, la ricerca di una fondazione rigorosa dei propri concetti fondamentali, ma lo trasforma in un problema più strettamente logico, che riguarda o una parte molto ristretta della matematica (la logica matematica e eventualmente la teoria dei numeri o alcune parti elementari della geometria) o addirittura una parte della filosofia stessa, dato che per molti autori la logica matematica è una disciplina filosofica scritta in notazione simbolica.

Per comprendere il rapporto tra filosofia e matematica tra XIX e XX secolo occorre però innanzitutto ricostruire l'emergere della distinzione disciplinare tra matematica e filosofia nelle classificazioni ottocentesche delle scienze e le differenze tra i due tipi di conoscenza rilevate dai filosofi ma anche l'eventuale diverso uso di definizioni e argomenti nelle due discipline. I criteri usati per la classificazione delle scienze nell'Ottocento si basano su aspetti differenti delle teorie scientifiche – la natura degli oggetti, la metodologia di indagine, il tipo di conoscenza raggiunto – ma concordano nell'assegnare a filosofia e matematica due posizioni distinte o addirittura contrapposte. Anche nelle riflessioni filosofiche sulla natura di queste due scienze – si pensi per esempio a Kant, Hegel, Bolzano, Husserl – si insiste su una contrapposizione metodologica che implica campi di applicazione e finalità distinte. (5) *Prima facie*, anche l'uso di definizioni e argomenti sembra molto diverso in matematica e in filosofia. Tuttavia, le indagini più

(5) Cfr. Cantù (2003), spec. capp. 1 e 3.

recenti sulla pratica matematica e le indagini volte a riconoscere una continuità tra logica formale e informale pongono l'accento su alcune somiglianze: le definizioni sono nominali in entrambe le discipline; la matematica, come la filosofia, fa uso non solo di dimostrazioni ma anche di argomenti non deduttivi.

Una volta ricostruiti l'origine storica e i limiti della distinzione disciplinare, l'approccio *pratice-driven* a un problema concreto permetterà di mettere in questione un'opposizione troppo netta tra le due discipline e di mostrare quanto ricco sia stato il contributo della filosofia quando essa ha agito all'interno della matematica. L'indagine sui concetti di numero e grandezza, che attraversa diversi rami del sapere matematico – dalla geometria proiettiva allo studio del continuo, dalle indagini sulle grandezze misurabili all'assiomatizzazione dell'aritmetica – mostra bene come la ricerca di una definizione in matematica sia un'attività propriamente filosofica, sia perché richiede una visione d'insieme di varie parti della matematica, sia perché presuppone una riflessione metodologica sul significato delle operazioni di generalizzazione e di estensione di una teoria mediante nuovi elementi.

2. – L'emergere di una distinzione disciplinare nelle classificazioni delle scienze

L'Ottocento costituisce un momento di rottura nello sviluppo della matematica e una discontinuità teorica e metodologica che ha portato ad una distinzione disciplinare rispetto alla filosofia. Da un punto di vista teorico la matematica sviluppa nuovi rami del sapere – dall'analisi combinatoria alla teoria degli spazi vettoriali, dalla probabilità alla topologia, dall'analisi differenziale alla teoria dei numeri ipercomplessi – e numerosissime applicazioni alla fisica, alla chimica, alle scienze della natura, discipline che si separano anch'esse dalla generica "filosofia naturale". Ne segue una modificazione del posto assegnato a ciascuna disciplina all'interno delle classificazioni delle scienze e di conseguenza un diverso ruolo assegnato a ciascuna nelle riforme dei sistemi educativi, particolarmente significative nei paesi di recente unificazione, come la Germania o l'Italia.

Un primo tipo di classificazioni delle scienze emerse nell'Ottocento è tassonomico e ricalca le ripartizioni usate nelle scienze naturali: la distinzione si basa non più sulle facoltà coinvolte (sensi, immaginazione, ragione) ma sugli oggetti delle diverse scienze. In questa prospettiva emerge la distinzione tra scienze naturali e scienze dello spirito, che oppone la matematica, avvicinata alla fisica, e la filosofia, associata alle scienze sociali. ([6])

A queste classificazioni tassonomiche si affiancano classificazioni più concettuali, basate sul punto di vista dal quale le scienze studiano i propri oggetti (metodo) e sul tipo di conoscenze che la scienza è in grado di produrre. Una nota classificazione basata sul metodo è quella che oppone approccio nomotetico e avalutativo proprio delle scienze naturali (alle quali appartiene la matematica) e approccio idiografico e valutativo proprio delle scienze dello spirito, e dunque della filosofia. ([7])

Altre classificazioni fanno riferimento al tipo di conoscenza scientifica prodotta, e in particolare al tipo di verità o di proposizioni che compaiono nelle diverse scienze. Un esempio è la classificazione che oppone scienze formali (astratte) e scienze reali (concrete), una distinzione che avvicina la matematica alla logica, riprendendo la distinzione leibniziana e humeana tra verità di fatto e verità di ragione. ([8]) Per Comte la matematica, intesa come scienza delle grandezze che misura le relazioni quantitative tra i fenomeni, riveste il ruolo di *organon* della filosofia naturale (dunque di tutte le scienze), venendo a ricoprire il ruolo che Aristotele aveva assegnato alla logica. Per Carnap invece la matematica è esplicitamente associata alla logica come scienza tautologica, che pur non esprimendo stati di fatto ha valore scientifico perché permette di esplicitare la conoscenza contenuta nelle premesse di un'argomentazione. In entrambi i casi, alla matematica si affida un ruolo metodologico fondamentale che da un lato la rende oggetto privilegiato d'indagine filosofica mentre dall'altro le affida il compito di garantire una concezione unitaria del sapere scientifico.

([6]) Cfr. Ampère (1834-38), Du Bois-Reymond (1878), Dilthey (1883).

([7]) Cfr. Windelband (1894), Rickert (1896-1902), Dilthey (1883).

([8]) Cfr. Grassmann (1844), Comte (1830-42), Spencer (1864), Wundt (1889), Carnap (1931).

Benché la matematica sia imparentata alla logica, essa resta nettamente distinta dalla filosofia come metafisica, che è relegata ad uno stadio preliminare nello sviluppo della conoscenza umana (Comte) o è privata di significato in quanto non esprimibile mediante enunciati verificabili (empirismo logico).

Pur nella varietà dei metodi e degli obiettivi delle classificazioni ottocentesche, un tratto comune riguarda il ruolo contrapposto o nettamente separato assegnato a filosofia e matematica: si tratta ormai di due discipline non solo distinte, ma anche "lontane" nella raffigurazione spaziale degli alberi della conoscenza.

3. – L'opposizione tra matematica e filosofia nelle definizioni dei filosofi

La separazione tra saperi umanistici e saperi scientifici nei curricula scolastici e accademici (foriera della futura opposizione tra le due culture discussa da Charles Percy Snow) ([9]) sancisce la fine dell'ideale unitario del sapere, che si era manifestato non solo nel progetto leibniziano di una chiave simbolica universale di accesso alla realtà ma anche nei progetti pedagogici delle enciclopedie settecentesche, che ancora vedevano nella matematica la componente di un'unica attività razionale filosofica. È in questa prospettiva che emerge l'originalità delle definizioni per contrapposizione di matematica e filosofia proposte dai filosofi.

Kant contrappone la filosofia come 'uso discorsivo della ragione secondo concetti' alla matematica come 'uso intuitivo della ragione mediante la costruzione dei concetti'. ([10]) Bolzano distingue la matematica come 'studio delle condizioni di possibilità degli oggetti' dalla filosofia come 'studio delle condizioni di esistenza delle cose'. ([11]) La matematica, infatti, non riguarda la realtà ma soltanto il regno dell'in sé, vale a dire di qualcosa che non ha esistenza reale, mentre la filosofia (metafisica) riguarda l'esistenza delle cose (per esempio dell'anima e di

([9]) Cfr. Snow (1959).
([10]) Cfr. Kant (1787), B 747 (trad. it. p. 446).
([11]) Cfr. Bolzano (1810), p. 11.

dio). Seppure in prospettiva diversa, la distinzione husserliana tra matematica formale e logica trascendentale segue la stessa linea: la matematica non ha bisogno di interrogarsi sull'esistenza attuale delle sue costruzioni formali, ma la logica filosofica, se vuole essere una scienza genuina, deve interrogarsi sul rapporto tra la logica formale e il mondo materiale delle cose. ([12])

Nella *Fenomenologia dello spirito* Hegel osserva che la matematica non è un buon modello di conoscenza, perché in essa, a differenza che in filosofia, la necessità della dimostrazione resta esterna all'oggetto e la conoscenza è ottenuta solo attraverso l'indagine del modo in cui viene in essere l'esistenza, senza considerare anche il modo in cui viene in essere l'essenza dell'oggetto. ([13]) Filosofia e matematica sono contrapposte come due modi diversi di conoscenza (rispettivamente dialettica e non-dialettica) dotati di gradi di certezza distinti: a differenza della deduzione filosofica, la dimostrazione matematica non è necessaria a causa dell'arbitrarietà nella scelta delle costruzioni ausiliarie.

Gli empiristi logici, pur non avendo l'intenzione esplicita di opporre la conoscenza matematica alla conoscenza filosofica, hanno accentuato il divario, sia perché hanno insistito sulla natura analitica di logica e matematica, sia perché hanno contrapposto gli enunciati scientifici dotati di significato (la cui verità può essere stabilita in virtù delle convenzioni del linguaggio o verificata empiricamente) agli enunciati metafisici, privi di un criterio di verificabilità.

Uno degli aspetti centrali della svolta novecentesca consiste proprio nel ruolo ambiguo che la logica viene a svolgere incuneandosi tra matematica e filosofia fino a far saltare queste definizioni filosofiche per contrapposizione. Da un lato, nella tradizione dell'algebra della logica (Schröder), l'indagine filosofica sulle leggi del pensiero si avvale di una notazione simbolica che rileva certe simmetrie tra le relazioni tra i concetti e le usuali operazioni matematiche. D'altro lato, nella filosofia analitica erede della prospettiva logicista (Frege, Russell), la matematica è riducibile alla logica, e ove quest'ultima sia considerata parte della

([12]) Cfr. Husserl (1929), pp. 11-12 (trad. it. p. 17).
([13]) Cfr. Hegel (1807), pp. xlviii-li (trad. it. pp. 32-35).

filosofia, la contrapposizione tra matematica e filosofia viene meno. ([14]) Perfino chi considera la logica matematica come qualcosa di essenzialmente distinto dalla logica filosofica non sembra interessato a contrapporre le due discipline: Peano e i membri della sua scuola, ad esempio, si presentano ai convegni di matematica e di filosofia di Parigi nel 1900 discutendo il tema della definizione da un punto di vista logico (Padoa), matematico (Peano e Burali-Forti), ma anche filosofico e scientifico (Vailati). ([15]) Vailati in particolare insiste sul rapporto tra pragmatismo filosofico e pragmatismo logico-matematico, mentre i progetti di una lingua universale (Peano, Couturat) manifestano un nuovo interesse per il rapporto tra linguaggio ordinario e linguaggio simbolico. ([16])

4. – Due opposte forme di razionalità nell'uso di definizioni e argomenti

La ricerca delle definizioni è da sempre un'attività specificamente filosofica, iniziata con la domanda socratica *ti esti*? e proseguita con la ricerca aristotelica della differenza specifica tra genere e specie. Generalmente si ritiene che le definizioni ricercate dalla filosofia siano definizioni essenziali, vale a dire definizioni che riguardano l'essenza delle cose cui i termini fanno riferimento e che pertanto hanno non solo la funzione di chiarire o precisare il discorso ma anche lo scopo di estendere la conoscenza, fornendo ad esempio soluzioni a problemi epistemologici. Alla matematica, invece, soprattutto nella sua versione assiomatica, si attribuiscono definizioni che hanno il valore di abbreviazioni terminologiche, o convenzioni tipografiche, vale a dire definizioni nominali di un nuovo termine tecnico. Tuttavia questa contrapposizione viene meno non appena si pensi alle riflessioni filosofiche sviluppate dai matematici nella ricerca della definizione di numero (per esempio da Dedekind, da Frege o da Peano) o ai tentativi di fornire definizioni implicite di un concetto mediante una caratterizzazione assiomatica delle sue proprietà fonda-

([14]) Cfr. Schröder (1890), Frege (1884), Russell (1903).

([15]) Cfr. i saggi di Padoa, Peano, Burali-Forti, Pieri e Vailati inclusi negli atti del Congresso Parigino di Filosofia (AA.VV. 1901, pp. 279-404, 609-632); si veda anche Vailati (1901), presentato al Convegno Parigino di Psicologia.

([16]) Cfr. Peano (1903), Couturat e Leau (1903).

mentali (Hilbert). ([17]) Anche la contrapposizione tra definizioni reali, che sarebbero prevalenti in filosofia, e definizioni nominali, tipiche della matematica, è progressivamente tramontata (da John Stuart Mill in avanti), perché in entrambe le discipline le definizioni sono oggi considerate nominali e la dimostrazione dell'esistenza dell'oggetto cui il concetto si riferisce deve essere provata indipendentemente con argomenti o costruzioni. ([18]) Pur non potendo entrare qui in particolari sulle diverse tipologie di definizione presenti in matematica e in filosofia, è tuttavia certo che da un lato non si possono isolare delle definizioni che occorrono specificamente o esclusivamente in un campo disciplinare, dall'altro si può osservare come l'attività "tipicamente filosofica" di ricerca delle definizioni è invece compiuta continuamente anche dai matematici stessi, soprattutto quando introducono una nuova teoria o ne modificano una preesistente: si ha dunque uno spazio che la filosofia si ritaglia all'interno della pratica matematica. ([19])

Un'altra tipica forma di contrapposizione tra matematica e filosofia concerne il tipo di argomenti usati nelle due discipline per giustificare la verità o la plausibilità di un'asserzione: dimostrazioni deduttive in matematica, argomenti di varia tipologia in filosofia. L'incrinarsi della tendenza dogmatica a escludere gli argomenti non deduttivi è uno degli effetti più interessanti dell'incunearsi della filosofia all'interno della pratica matematica negli ultimi due secoli. Da un lato il concetto di dimostrazione è stato oggetto di studi sempre più approfonditi in contemporanea con lo sviluppo dell'assiomatica ipotetico-deduttiva e con lo sviluppo della logica matematica, studi incentrati su temi quali la capacità esplicativa, la purezza, la trattabilità delle dimostrazioni matematiche. ([20]) D'altro lato si è messa in questione la natura meramente deduttiva della matematica, dando origine a numerosi studi sugli argomenti

([17]) Cfr. Dedekind (1888), Frege (1884), Peano (1889), Hilbert (1899).

([18]) Cfr. Mill (1843), p. 92.

([19]) Cfr. Tappenden (2008).

([20]) Cfr. Arana (2014) and Detlefsen (2008) sulla purezza in matematica. Si vedano anche Mancosu (2008b) e Molinini (2012) sulla capacità esplicativa delle dimostrazioni. Cfr. anche Cellucci (2008) e più in generale Lupacchini e Corsi (2008) sul rapporto tra dimostrazioni formali e dimostrazioni reali.

non-deduttivi usati nella pratica matematica e sulle dimostrazioni sviluppate con l'ausilio dei computer. ([21]) Infine, l'analisi di casi specifici ha messo in luce varie tipologie di prova con proprietà epistemologiche distinte (dimostrazioni caso per caso, dimostrazione per assurdo, dimostrazioni di unicità, dimostrazioni per induzione, ecc.) ([22]) e varianti di una stessa dimostrazione basate sull'uso di logiche differenti. ([23])

In questo senso non solo la filosofia è venuta a giocare un ruolo fondamentale nell'analisi dell'argomentazione matematica, ma si può anche dire che è venuta meno la contrapposizione tra due modi di pensare tradizionalmente opposti: da un lato si è sviluppata una tendenza rigorosamente deduttiva in filosofia (vedi alcune correnti di filosofia analitica), d'altro lato si è accentuata la tendenza a considerare la matematica come una scienza quasi-empirica. ([24]) Lo studio delle definizioni e degli argomenti effettivamente usati dai matematici ha così rivelato alcune somiglianze e la netta separazione tra logica formale e logica informale tipica della seconda metà del Novecento si è stemperata, anche grazie ad una complessa dialettica tra argomentazione, intelligenza artificiale e teoria della computabilità, che hanno fatto emergere diverse nozioni di argomento e di algoritmo. ([25])

([21]) Si vedano ad esempio Aberdein e Dove (2013) sullo studio dei rapporti tra argomentazione e matematica, Giaquinto (2007) sul ragionamento diagrammatico, Baker (2008) sulla caratterizzazione della matematica sperimentale e McEvoy (2008) per una discussione filosofica sulla natura a priori o a posteriori delle dimostrazioni ottenute con l'ausilio del calcolatore.

([22]) Per una discussione di forme non deduttive di prova cfr. Baker (2009) e Cellucci (2002); per una fenomenologia di diversi stili dimostrativi e una breve descrizione di diverse logiche utilizzabili nelle dimostrazioni cfr. Lolli (2005), p. 137 ss.

([23]) A tal fine è importante confrontare i diversi sistemi logici in un'ottica pluralistica (logica classica, intuizionistica, rilevante, modale, paraconsistente, logiche libere o anche combinazioni delle precedenti): in questa direzione vanno le ricerche di logica dialogica (Rückert 2001) o gli studi basati sul metodo dei tableaux semantici (D'Agostino *et al.* 1999). Per comprendere quanta logica serve nelle dimostrazioni matematiche di specifici teoremi è stato sviluppato l'approccio noto come *reverse mathematics*, che permette di valutare le differenze tra diversi programmi fondazionali, come il riduzionismo finitista di Hilbert, il costruttivismo di Bishop, il predicativismo di Weyl e il riduzionismo predicativo di Feferman e Friedman (Simpson 2009).

([24]) Cfr. Lakatos (1976).

([25]) Cfr. Cantù e Testa (2012).

5. – La filosofia nella pratica matematica: cosa sono i numeri e le grandezze?

Un problema centrale nel dibattito matematico e filosofico tra Ottocento e Novecento riguarda la definizione di che cos'è un numero e di che cos'è una grandezza. La filosofia della matematica ha spesso affrontato questo problema separando la domanda sulla natura dei numeri dalle questioni relative alla definizione di numero reale e di grandezza. Larga parte delle mie ricerche ai confini tra storia e filosofia della matematica mi ha invece portato a credere che l'indagine sulla definizione di numero naturale non possa essere disgiunta dall'indagine sulla nozione di grandezza geometrica (in una terra di confine tra geometria proiettiva, teorie del continuo e analisi assiomatica del concetto di misura) e sui modi di intendere la generalizzazione in matematica.

5.1 – *La geometria proiettiva*

Nell'Ottocento lo sviluppo della geometria proiettiva induce a interrogarsi sulla possibilità di definire il concetto di grandezza indipendentemente dalla coordinalizzazione numerica – ad esempio, per Grassmann una grandezza a tre dimensioni può essere studiata senza essere ridotta, tramite le coordinate cartesiane, a una terna di numeri reali – e dalla misura – nei lavori di Poncelet e di Chasles le proprietà proiettive dello spazio sono definibili senza introdurre il concetto di distanza tra due punti). (26) La questione filosofica centrale riguarda la possibilità di indagare la geometria con un metodo sintetico anziché analitico, vale a dire senza tradurre i problemi geometrici in equazioni. La procedura analitica, basata sulla rappresentazione su assi cartesiani, permette di trovare la soluzione a molti problemi geometrici, ma 1) non è pura perché utilizza dei metodi non geometrici (nel processo di risoluzione delle equazioni) e 2) presuppone che un sistema numerico privilegiato (i numeri reali) sia in grado di rap-

(26) Cfr. Grassmann (1844), Poncelet (1822), Chasles (1837).

presentare adeguatamente tutte le proprietà geometriche della retta (Dedekind). ([27]) I testi di Poncelet, Chasles, Pasch, Klein, Veronese, Hilbert, Enriques sono trattati matematici che contengono numerosissime riflessioni filosofiche su questi temi così come sul problema dell'intuizione geometrica: l'intuizione spaziale da un lato viene espunta dalle dimostrazioni (Pasch, Hilbert), dall'altro viene salvaguardata come elemento caratterizzante la geometria rispetto all'aritmetica (Veronese, Klein, Enriques). ([28])

5.2 – *L'assiomatizzazione dell'aritmetica*

L'assiomatizzazione dell'aritmetica ad opera di Dedekind e di Peano mette in evidenza la centralità del concetto di successore nella definizione di numero naturale e solleva alcuni interrogativi relativi alla possibilità di fornire una definizione assiomatica univoca e coerente dei numeri naturali (problemi di categoricità e consistenza della teoria). Questo problema è tanto più urgente quanto più si insiste sulla possibilità di ridurre tutti gli altri sistemi numerici ai numeri naturali (per esempio i razionali sono definiti come coppie di naturali, i reali come sezioni di razionali, i complessi come coppie di reali) e sulla possibilità di dimostrare la consistenza delle altre teorie matematiche attraverso una dimostrazione relativa (dimostrando cioè che una teoria è consistente tanto quanto la teoria dei numeri naturali). È interessante notare che la maggior parte delle riflessioni filosofiche *philosophy-driven* si concentra sull'aritmetica: da un lato perché indaga principalmente i numeri tra i possibili oggetti della matematica (sia quando ne afferma l'esistenza sia quando la nega); dall'altro perché, anche quando si occupa più in generale di insiemi, finisce con il rivolgere l'attenzione soprattutto alle applicazioni aritmetiche, come ad esempio la questione dei numeri naturali e dei numeri cardinali transfiniti (tra-

([27]) Cfr. Dedekind (1872).

([28]) Cfr. Poncelet (1822), Chasles (1837), Pasch (1882), Klein (1893), Veronese (1891), Hilbert (1899), Enriques (1901), (1906).

scurando troppo spesso altri ambiti esprimibili nella teoria degli insiemi, come gli spazi vettoriali, le strutture algebriche astratte, le strutture topologiche). (29)

5.3 – *Lo studio del continuo numerico e geometrico*

L'indagine sulla natura del continuo matematico porta nell'Ottocento a soluzioni divergenti. Dedekind riduce il continuo geometrico al continuo dei numeri reali, di cui fornisce una definizione mediante il concetto di sezione di numeri razionali (altre definizioni come successioni di numeri razionali e come classi di equivalenza di successioni di numeri razionali sono fornite nell'Ottocento da Cauchy e da Cantor rispettivamente). Cantor definisce il continuo geometrico come un insieme di punti. Veronese definisce il continuo geometrico come un sistema di segmenti il cui obiettivo è rappresentare il più adeguatamente possibile la nostra concezione intuitiva ed empirica del continuo, in maniera totalmente indipendente dai numeri. In particolare, mentre Cantor tenta a più riprese di dimostrare l'impossibilità dell'esistenza di grandezze infinitesime, Veronese contempla la possibilità di segmenti infiniti e infinitesimi, introducendo una nozione di continuo più generale di quella di Dedekind. (30)

L'indagine sulla continuità dei numeri si interseca dunque nell'Ottocento con i concetti di infinitamente grande ed infinitamente piccolo, cui rimarrà legata anche nel Novecento. La costruzione di grandezze infinite e infinitesime è stata sviluppata negli anni Cin-

(29) Ciò avviene forse perché l'aritmetica, essendo uno dei rami più elementari della matematica, è più interessante per affrontare le questioni sui fondamenti e più accessibile ai filosofi di mestiere, che non sempre sono anche matematici. Tuttavia è probabile che la scelta dei temi sia anche un portato storico delle ricerche sviluppate nella tradizione *philosophy-driven*: uno dei compiti dell'approccio *practice-driven* dovrebbe allora essere proprio quello di riportare l'attenzione su altri ambiti della matematica, che poi potranno essere indagati in maniera feconda anche nell'approccio *philosophy-driven*.

(30) Cfr. Cantor (1887-88), Veronese (1891), Cantù (1999), cap. 2, e Cantù (2010), pp. 4-5.

quanta dall'approccio *non standard* di Robinson, che fa uso di numerosi teoremi logici ed è dunque radicalmente diverso rispetto alla costruzione di un continuo di grandezze. (31)

5.4 – *Lo studio delle grandezze misurabili*

L'indagine sulla natura dei numeri non può prescindere da uno studio delle nozioni di grandezza e di misura, di cui viene fornita una prima caratterizzazione assiomatica a inizio Novecento. Emerge così una distinzione tra il concetto di grandezza estensiva e il concetto di quantità estensiva: la prima, determinata dalla somma, è indipendente dalla misurazione (Giuseppe Veronese, Rodolfo Bettazzi), mentre la seconda, determinata dall'ordine, è di necessità misurabile (Otto Hölder). (32) Il ruolo preponderante assunto dalla relazione d'ordine rispetto all'operazione di somma nella definizione di grandezza spiega la sua parentela con la nozione di numero e anche la natura privilegiata dei numeri reali rispetto ad altri sistemi numerici possibili (per esempio i numeri non archimedei, che non hanno lo stesso tipo d'ordine, o altri sistemi di numeri ipercomplessi). La relazione d'ordine garantisce, infatti, la misurabilità e, dunque, l'applicabilità dei numeri alle grandezze fisiche – requisito che già Frege formulava nei termini di quello che oggi viene chiamato *application constraint*: l'applicabilità dei numeri deve essere interna alla definizione stessa di numero reale e non un risultato esterno e indipendente dalla definizione. (33)

5.5 – *La generalizzazione dei concetti matematici*

Non solo lo studio degli sviluppi delle diverse discipline, ma anche alcune riflessioni metodologiche che si possono enucleare dalla pratica matematica sono fondamentali per comprendere "che cosa sono i

(31) Cfr. Robinson (1966).
(32) Cfr. Cantù (2013).
(33) Cfr. Hale (2000), p. 122.

numeri". A grandi linee, si possono individuare due modi differenti di concepire la relazione tra le diverse teorie numeriche. Autori quali Gauss, Dedekind e Cantor, ma anche Hilbert, insistono spesso sulla nozione di generalizzazione di una teoria data per mezzo di una estensione del suo dominio con l'obiettivo di garantire la chiusura delle diverse operazioni, come se si potessero aggiungere elementi ad esso senza modificare sostanzialmente la teoria precedente. ([34]) Così i numeri negativi sarebbero stati aggiunti ai numeri naturali, i numeri razionali ai numeri interi, i numeri reali ai razionali, i numeri complessi ai numeri reali. Questa lettura continuista della teoria dei numeri, che ben si presta a fondare concezioni riduzioniste della matematica, è molto lontana sia dalla storia dello sviluppo concreto dei numeri (i numeri reali sono emersi come un mezzo adatto a rappresentare le grandezze continue e non come estensione dei razionali), sia dall'interpretazione che ne è stata data da diversi matematici discontinuisti, come i membri della scuola di Peano (Peano stesso, ma anche Cesare Burali-Forti e Sebastiano Catania) e i già citati Bettazzi e Veronese. Lo stesso Hilbert, quando discute diversi modi di estendere una stessa teoria e analizza filosoficamente l'introduzione degli elementi ideali in geometria o in analisi interrogandosi su che cosa viene conservato nella trasformazione da una teoria all'altra, ammette la presenza di discontinuità e la necessità di ancorare la domanda su che cosa siano i numeri alla ricerca degli obiettivi per cui le diverse teorie vengono introdotte. ([35])

L'analisi della definizione dei numeri non può allora prescindere da una riflessione filosofica sul concetto di generalizzazione all'opera nello sviluppo delle teorie matematiche stesse: che cosa significa estendere una teoria per avere una struttura più generale? In che misura un sistema "più ampio" di numeri può essere considerato come una generalizzazione di altri sistemi? Come è possibile che qualcosa che non era neppure considerato come numero (lo zero, i numeri negativi, i numeri fracti, ecc.) diventi ad un certo

([34]) Cfr. Cantù, in preparazione.
([35]) Cfr. Hilbert (1926), pp. 373-74.

punto non solo un numero, ma un numero "reale" contrapposto ai numeri "immaginari"?

Lo studio delle diverse definizioni di numero (per esempio le diverse definizioni dei numeri naturali come insiemi, o le definizioni dei numeri razionali ora come coppie di numeri interi ora come classi di equivalenza di coppie di numeri interi) e degli argomenti che vengono avanzati per dimostrare che è legittimo introdurre nuovi elementi in matematica sono particolarmente interessanti per vedere i complessi rapporti tra matematica e filosofia tra Ottocento e Novecento. La filosofia entra in gioco per comprendere che cosa cambia nella sostituzione di una definizione ad un'altra (per esempio nello sviluppo di nuovi sistemi di numeri), quali concetti fondamentali entrano in gioco (ordine, misura, chiusura delle operazioni), quale è la legittimità degli argomenti a favore o contro l'introduzione di nuovi elementi (infiniti e infinitesimi), quali differenze concettuali e teoriche emergono dall'uso di metodi diversi (sintetico o analitico), ecc.

6. – Conclusione

Nella prospettiva analizzata nella sezione precedente, la filosofia raramente stabilisce l'agenda dei problemi rilevanti da analizzare, e ancora più raramente si trova in condizione di fornire indicazioni normative alla matematica, che legittimamente rivendica la massima libertà possibile rispetto alla filosofia. Così, per non fare la fine di Gauss che aveva evitato di pubblicare i suoi risultati sulle geometrie non euclidee intimorito dalla possibile reazione dei seguaci della filosofia kantiana, Dedekind rivendica esplicitamente la libertà di creazione dei matematici. Questo non significa ovviamente che i singoli matematici non possano essere influenzati dalle proprie convinzioni filosofiche: Cantor, ad esempio, era ispirato da una certa nozione trascendente di infinito sia nella costruzione dei numeri transfiniti sia nel rifiuto preconcetto della possibilità di grandezze infinitesime. La riflessione filosofica è essenziale alla matematica stessa, che non può farne a meno senza rinunciare a indagare in maniera rigorosa sulla propria metodologia, oltre che sull'origine, sullo sviluppo e sulla funzione dei propri oggetti teorici. L'interscambio tra filosofia e matematica avviene talvolta all'interno dell'opera dei matematici stessi, talvolta attraverso il confronto con filosofi di mestiere, talvolta ad opera degli storici della matematica. Le distinzioni tra queste discipline vengono necessariamente meno nella ricerca della soluzione dei principali problemi che la matematica affronta.

Ben diverso è il ruolo riconosciuto alla filosofia nella prospettiva *philosophy-driven*. La filosofia detta l'agenda delle questioni fondamentali da affrontare: che tipo di esistenza hanno i numeri, come li conosciamo, come è possibile fondare la certezza della matematica (individuando eventualmente i suoi limiti conoscitivi). Queste questioni fondazionali continuano ad animare molta filosofia della matematica nelle accademie, ma talvolta perdono il contatto con la matematica: non solo continuano ad occuparsi in prevalenza di un solo oggetto matematico (i numeri, e quasi esclusivamente i numeri naturali), ignorando il fatto che la matematica consiste di moltissimi altri rami, ma lo fanno in una prospettiva (la rivalità tra diversi "ismi") che risale agli inizi del Novecento. ([36]) Nonostante l'interesse intrinsecamente filosofico di questo esercizio di pensiero (che porta in evidenza definizioni e argomenti usati in filosofia, come le definizioni per astrazione nel neologicismo o l'argomento di indispensabilità di Benacerraf), la ricaduta matematica ma anche filosofica di queste indagini sullo sviluppo del sapere matematico è sempre più limitata.

In conclusione, potremmo riassumere il rapporto tra matematica e filosofia negli ultimi due secoli attraverso una pluralità di posizioni, che mostrano come la nascita dei saperi disciplinari abbia portato da un lato ad una radicalizzazione filosofica dell'opposizione tra sapere matematico e filosofico e dall'altro ad un intrecciarsi dei due modelli di ragionamento nella pratica matematica. La filosofia matematica, distinta oggi in *philosophy-driven* e in *practice-driven*, rispecchia questa ambivalenza. L'indagine attenta alla pratica mostra che filosofia e matematica sono intrinsecamente intrecciate, indipendentemente da quale sia l'esperto che si occuperà di studiare le questioni filosofiche inerenti allo sviluppo della conoscenza matematica. La filosofia della

([36]) Cfr. Colyvan (2012).

matematica che si lascia guidare dalla filosofia tende invece a indagare le relazioni tra matematica e filosofia in astratto. È in questa tradizione soltanto, si potrebbe dire, che emerge l'idea di considerare matematica e filosofia come due modelli di ragionamento distinti (basati su definizioni e argomenti diversi) e da mantenere separati con sistemi educativi radicalmente opposti (la questione delle due culture è frutto della frammentazione del sapere sette-ottocentesca e delle classificazioni delle scienze, ma non ha certo ragion d'essere nella ricerca filosofica o matematica). Sempre in questa tradizione si insiste talvolta sulla liberazione della matematica dai problemi metafisici privi di significato (empirismo logico), ([37]) talvolta sulla necessità di ridurre la conoscenza matematica a conoscenza logico-filosofica. Ma né la riduzione né l'opposizione mi paiono essere due buoni modelli di indagine delle relazioni tra filosofia e matematica. È invece da una difficile e complessa ricognizione dei problemi in campo e delle risorse disponibili per risolverli che si misura la relazione tra matematica e filosofia, tanto più in un periodo, come quello tra Ottocento e Novecento, in cui entrambe le discipline si sono trovate in continuo movimento e cambiamento.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

AA.VV. (1901), *Bibliothèque du congrès international de philosophie*, vol. 3, Armand, Paris (rist. Kraus, Nendeln-Liechtestein, 1968).

ABERDEIN, A. e DOVE, I.J. (a cura di) (2013), *The argument of mathematics*, Springer, Dordrecht.

AMPÈRE, A. (1834-38), *Essais sur la philosophie des sciences, ou exposition analytique d'une classification naturelle de toutes les connaissances humaines*, Bachelier, Paris (rist. anast.: Culture et Civilisation, Bruxelles, 1966).

ARANA, A. (2014), 'Purity in arithmetic: Some formal and informal issues', in M. Detlefsen e G. Link, (a cura di), *Formalism and beyond: On the nature of mathematical discourse*, de Gryuter, Boston.

([37]) Si noti qui, per inciso, un'altra differenza rispetto alla distinzione di Shapiro, che include i membri del Circolo di Vienna tra i filosofi che hanno simpatizzato per il *philosophy last-if-at-all principle.* Cfr. Shapiro (1997), p. 29.

BAKER, A. (2008), ‘Experimental mathematics’, *Erkenntnis*, vol. 68, pp. 331-44.

BAKER, A. (2009), ‘Non-deductive methods in mathematics’, in E. N. Zalta (a cura di) *The Stanford encyclopedia of philosophy*.

BOLZANO, B. (1810), *Beyträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik*, Widtman, Prag (rist. anast.: Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1974).

CANTOR, G. (1887–88), ‘Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten’, *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik*, vol. 91, pp. 81-125, e vol. 92, pp. 240-65.

CANTÙ, P. (1999), *Giuseppe Veronese e i fondamenti della geometria*, Unicopli, Milano.

CANTÙ, P. (2003), *La matematica da scienza delle grandezze a teoria delle forme. L'Ausdehnungslehre di H. Grassmann*, tesi di dottorato, Università di Genova, Genova.

CANTÙ, P. (2010), ‘The role of epistemological models in Veronese's and Bettazzi's theory of magnitudes’, in M. D'Agostino *et al.* (a cura di), *New essays in logic and philosophy of science*, College Publications, London, pp. 229-41.

CANTÙ, P. (2013). ‘An argumentative approach to ideal elements in mathematics’, in A. Aberdein e I. J. Dove (a cura di), *The argument of mathematics*, Springer, Dordrecht, pp. 79-99.

CANTÙ, P. (in preparazione), ‘A theory-relative conception of ideal elements and the metaphor of enlargement in mathematics’, comunicazione presentata al *Twelfth Annual Midwest PhilMath Workshop*, 6 novembre 2011, University of Notre Dame, Notre-Dame (IN).

CANTÙ, P. e TESTA, I. (2012), ‘Algoritmi e argomenti. La sfida dell'intelligenza artificiale’, *Sistemi Intelligenti*, vol. 24, pp. 395-414.

CARNAP, R. (1931), ‘Die physikalische Sprache als Universalsprache der Wissenschaft’, *Erkenntnis*, vol. 10, pp. 432-65 (trad. it., ‘Il linguaggio della fisica come linguaggio universale della scienza’, in R. Carnap, *La filosofia della scienza*, a cura di A. Crescini, La Scuola, Brescia, 1964).

CELLUCCI, C. (2002), *Filosofia e matematica*, Laterza, Roma-Bari.

CELLUCCI, C. (2008), ‘Why proof? What is a proof?’, in R. Lupacchini e G. Corsi (a cura di), *Deduction, computation, experiment: Exploring the effectiveness of proof*, Springer, Berlin, pp. 1–27.

CELLUCCI, C. (2013), ‘Top-down and bottom-up philosophy of mathematics’, *Foundations of Science*, vol. 18, pp. 93-106.

CHASLES, M. (1837), *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*, Hayez, Bruxelles.

COLYVAN, M. (2012), *An introduction to the philosophy of mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge.

COMTE, A. (1830–42), *Cours de philosophie positive*, 6 voll., Bachelier, Paris (trad. it., *Corso di filosofia positiva*, Paravia, Torino, 1957).

CORFIELD, D. (2003), *Towards a philosophy of real mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge.

COUTURAT, L. e LEAU, L. (1903), *Histoire de la langue universelle*, Hachette, Paris.

D'AGOSTINO, M., GABBAY, D.M., HÄHNLE, R. e POSEGGA, J. (a cura di) (1999), *Handbook of tableau methods*, Springer, Berlin.

DEDEKIND, R. (1872), *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, Vieweg, Braunschweig (trad. it. in R. Dedekind, *Scritti sui fondamenti della matematica*, a cura di F. Gana, Bibliopolis, Napoli, 1982).

DEDEKIND, R. (1888), *Was sind und was sollen die Zahlen?*, Vieweg, Braunschweig (trad. it. in R. Dedekind, *Scritti sui fondamenti della matematica*, a cura di F. Gana, Napoli, Bibliopolis, 1982).

DILTHEY, W. (1883), *Einleitung in die Geisteswissenschaften. Versuch einer Grundlegung für das Studium der Gesellschaft und der Geschichte*, Duncker & Humblot, Leipzig (trad. it. *Introduzione alle scienze dello spirito*, a cura di G. A. De Toni, La Nuova Italia, Firenze 1974).

DU BOIS-REYMOND, E. (1878), *Kulturgeschichte und Naturwissenschaften*, Veit, Leipzig.

ENRIQUES, F. (1901), 'Sulla spiegazione psicologica dei postulati della geometria', *Rivista Filosofica*, vol. 4, pp. 171-95.

ENRIQUES, F. (1906), *Problemi della scienza*, Zanichelli, Bologna.

FERREIROS, J. e GRAY, J. (a cura di) (2006), *The Architecture of modern mathematics: Essays in history and philosophy*, Oxford University Press, Oxford.

FREGE, G. (1884), *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*, Koebner, Breslau (trad. it. *I fondamenti dell'aritmetica. Un'indagine logico-matematica sul concetto di numero*, in G. Frege, *Logica e aritmetica*, a cura di C. Mangione, Boringhieri, Torino, 1965).

GABBAY, D.M., JOHNSON, R., OLBACH, H.G. e WOODS, J. (a cura di) (2002), *Handbook of the logic of arguments and inference: The turn towards the practical*, North-Holland, Amsterdam.

GIAQUINTO, M. (2007), *Visual thinking in mathematics: An epistemological study*, Oxford University Press, Oxford.

GRASSMANN, H.G. (1844), *Die lineale Ausdehnungslehre*, Wigand, Leipzig.

HALE, B. (2000), 'Reals by abstraction', *Philosophia Mathematica*, vol. 8, pp. 100-23.

HEGEL, G.W.F. (1807), *System der Wissenschaft. Erster Theil, die Phänomenologie des Geistes*, Goebhardt, Bamberg-Würzburg (trad. it. *Fenomenologia dello spirito*, La Nuova Italia, Firenze, 1986).

HILBERT, D. (1899), *Grundlagen der Geometrie*, Teubner, Leipzig (trad. it. *Fondamenti della geometria*, Milano, Feltrinelli, 1970).

HILBERT, D. (1926), 'Über das Unendliche'. *Mathematische Annalen*, vol. 95, pp. 161-90 (trad. it. 'Sull'infinito', in D. Hilbert, *Ricerche sui fondamenti della matematica*, a cura di M. V. Abrusci, Bibliopolis, Napoli, 1978).

HORSTEN, L. (2007), 'Philosophy of mathematics', in E. N. Zalta (a cura di), *The Stanford encyclopedia of philosophy*.

HUSSERL, E. (1929), *Formale und traszendentale Logik*, Niemeyer, Halle (trad. it. *Logica formale e trascendentale*, Laterza, Roma-Bari, 1966).

IRVINE, A.D. (a cura di) (2009), *Philosophy of mathematics*, Elsevier/North-Holland, Amsterdam.

KANT, I. (1787), *Kritik der reinen Vernunft*, 2a ed., Hartknoch, Riga (trad. it. *Critica della ragion pura*, Laterza, Roma-Bari, 1991).

KLEIN, F. (1893), 'On the mathematical character of space-intuition and the relation of pure mathematics to the applied sciences', in F. Klein, *Lectures on mathematics (The Evanston Colloquium)*, a cura di A. Zivet, Macmillan, New York-London, pp. 41-50.

LAKATOS, I. (1976), *Proofs and refutations. The logic of mathematical discovery*, Cambridge University Press, Cambridge (trad. it. *Dimostrazioni e confutazioni. La logica della scoperta matematica,* Feltrinelli, Milano, 1979).

LOLLI, G. (2005), *QED: fenomenologia della dimostrazione*, Bollati Boringhieri, Torino.

LUPACCHINI, R. e CORSI, G. (a cura di) (2008), *Deduction, computation, experiment: Exploring the effectiveness of proof*, Springer, Milano.

MANCOSU, P. (2008a), 'Introduction', in P. Mancosu (a cura di) (2008), pp. 1-21.

MANCOSU, P. (2008b) 'Mathematical explanation: Why it matters', in P. Mancosu (a cura di) (2008), pp. 134-150.

MANCOSU, P. (a cura di) (2008), *The philosophy of mathematical practice*, Oxford University Press, Oxford.

MCEVOY, M. (2008), 'The epistemological status of computer-assisted proofs', *Philosophia Mathematica*, vol. 16, pp. 374-87.

MILL, J.S. (1843), *A system of logic, ratiocinative and inductive*, 2 voll., Parker, London; 4ª ed., Longmans, Green and Co., London, 1886 (trad. it. *Sistema di logica deduttiva e induttiva*, UTET, Torino, 1988).

MOLININI, D. (2012), 'Learning from Euler. From mathematical practice to mathematical explanation', *Philosophia Scientiæ*, vol. 16, pp. 105-27.

PASCH, M. (1882), *Vorlesungen über neuere Geometrie*, Teubner, Leibniz.

PEANO, G, (1889), *Arithmetices principia: nova methodo exposita*, Bocca, Torino (rist. Aragno, Torino, 2001).

PEANO, G. (1903), 'De latino sine flexione—lingua auxiliare internationale', *Rivista di matematica*, vol. 8, pp. 74–83.

PONCELET, J.V. (1822), *Applications d'analyse et de géométrie: traité de propriétés projectives des figures*, Bachelier, Paris.

RICKERT, H. (1896-1902), *Die Grenzen der naturwissenschaftlichen Begriffsbildung*, Mohr, Freiburg.

ROBINSON, A. (1966), *Non-standard analysis*, North-Holland, Amsterdam.

RÜCKERT, H. (2001), 'Why dialogical logic?', in E. Wansing (a cura di), *Essays on non-classical logic*, vol. 1, World Scientific, Singapore, pp. 165-85.

SCHRÖDER, E. (1890), *Vorlesungen über die Algebra der Logik: exakte Logik*, vol. 1, Teubner, Leipzig.

Shapiro, S. (1997) *Philosophy of mathematics: Structure and ontology*, Oxford University Press, New York.

Shapiro, S. (a cura di) (2005), *The Oxford handbook of philosophy of mathematics and logic*, Oxford University Press, New York.

Simpson, S.G. (2009), *Subsystems of second order arithmetic*, Cambridge University Press, Cambridge.

Snow, C.P. (1959) *The two cultures*, Cambridge University Press, London (trad. it. *Le due culture*, Marsilio, Venezia, 2005).

Spencer, H. (1864), *The classification of the sciences*, Williams & Norgate, London.

Tappenden, J. (2008), 'Mathematical concepts and definitions', in P. Mancosu (a cura di) (2008), pp. 256-75.

Vailati, G. (1901), 'Sulla portata logica della classificazione dei fatti mentali proposta dal prof. Franz Brentano' (comunicazione presentata al III Congresso Internazionale di psicologia di Parigi, agosto 1900), *Rivista filosofica*, vol. 2, pp. 64-70.

van Kerkove, B., De Vuyst, J. e van Bendegem, J.P. (a cura di) (2010), *Philosophical perspectives on mathematical practice*, College Publications, London.

Veronese, G. (1891), *I fondamenti della geometria*, Tipografia del Seminario, Padova.

Windelband, W. (1894), *Geschichte und Naturwissenschaften*, Heitz, Strassburg; 3ª ed. 1904.

Wundt, W. (1889), *System der Philosophie*, Engelmann, Leipzig.

Paola Cantù
Aix Marseille Université CNRS, CEPERC UMR 7304
e-mail: paola.cantu@univ-amu.fr