La Matematica nella Società e nella Cultura

RIVISTA DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Daniele Molinini, Marco Panza

Sull'applicabilità della matematica

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **7** (2014), n.3 (Matematica e filosofia. Contributi al dialogo interdisciplinare), p. 367–395.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2014_1_7_3_367_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI

http://www.bdim.eu/

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2014.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. VII, Dicembre 2014, 367-395

Sull'applicabilità della matematica

DANIELE MOLININI - MARCO PANZA

1. – Che cosa c'entrano gli elefanti con la borsa di New York?

Non vi sono dubbi sul fatto che la matematica si applichi con successo al mondo che ci circonda e ci aiuti a ragionare sui fenomeni empirici, tanto naturali che sociali. Molte teorie scientifiche, non solo della fisica, sono altamente matematizzate e impiegano in modo cruciale diversi strumenti matematici che risultano spesso indispensabili per l'ottenimento dei loro risultati. Pochi esempi saranno sufficienti. Le geometrie non-Euclidee si applicano con successo nella teoria della relatività generale. La teoria dei gruppi – nata entro la teoria delle equazioni algebriche (Lagrange, Ruffini, Abel, Galois, ecc.) – è stata successivamente applicata alla meccanica classica e quantistica, soprattutto dopo la scoperta, da parte di Emmy Noether, di una connessione intima fra gruppi di simmetria e leggi di conservazione. Il calcolo differenziale, in alcuni dei suoi aspetti più sofisticati (quali la teoria delle equazioni alle derivate parziali, gli integrali stocastici, ecc.) sta alla base delle principali teorie finanziarie.

Il problema (filosofico) dell'applicabilità della matematica appare immediatamente quando ci si confronta con questi esempi (e con molti altri simili). Gli oggetti di studio delle geometrie non euclidee non sono dei fatti cosmologici, quelli della teoria dei gruppi non sono dei sistemi fisici conservativi, quelli del calcolo differenziale e stocastico non sono delle transazioni finanziarie. La matematica utilizzata per studiare il moto dei pianeti ci dirà che alle undici di sera di domenica prossima il pianeta Venere si troverà, con buona approssimazione, in quel punto del cielo. Sarà quindi facile puntare un telescopio e verificare che la predizione ottenuta matematicamente è confermata da un fatto empirico. In questo, come in tutti gli altri casi citati o che potremmo citare, la matematica non solo si applica, a dispetto dell'eterogeneità del suo oggetto rispetto a quello che le teorie scientifiche in questione studiano, ma lo fa con successo. Che cosa rende questo possibile? Ecco quindi la questione: come possiamo spiegare il fatto che la matematica si applichi con successo nelle scienze?

Molti filosofi hanno cercato di rispondere a questa domanda in modi molto diversi, e negli ultimi anni questo tema è stato al centro di intense discussioni in diverse aree della filosofia della matematica e della scienza. I pochi esempi precedenti presentano il problema come esso appare a chi guardi il funzionamento della scienza. Tuttavia, agli occhi di un filosofo, illuminati (o offuscati) dall'abitudine di ragionare in astratto, il problema si presenta un po' diversamente. La matematica tratta di entità prive di efficacia causale, senza localizzazione spaziotemporale (essa tratta di "oggetti astratti", come si dice in filosofia). Le scienze empiriche trattano di entità causalmente attive e spaziotemporalmente determinate, anzi studiano proprio le connessioni causali che hanno luogo in spazi e/o tempi determinati. Com'è possibile, allora, che le proprietà delle prime fra queste entità ci dicano qualcosa sulle proprietà delle seconde, o siano almeno utili nello scoprire queste proprietà? Diciamolo diversamente e in modo più diretto. Quando studiamo matematicamente un fenomeno empirico abbiamo l'impressione di richiamarci a risultati che, come tali, hanno poco o nulla a che fare con l'oggetto delle nostre ricerche. Eppure le predizioni che otteniamo sono spesso confermate. È come se impiegassimo le nostre conoscenze sull'anatomia o sull'evoluzione degli elefanti per prevedere l'andamento della Borsa di New York, decidere su che titoli investire, e questo ci permettesse di ottenere ottimi guadagni. Com'è possibile?

Ma vi è di più. Tra le tante entità astratte con cui abbiamo giornalmente a che fare, solo quelle matematiche intervengono in modo tanto pervasivo, fondamentale e di successo nella nostra pratica scientifica. Non si registrano casi in cui gli eventi del Paese delle Meraviglie, la struttura semantica di certe proposizioni, la classificazione dei legami di parentela o i valori etici di un credo religioso ci aiutino a capire dei fenomeni empirici. E se è vero che ogni scienza utilizza delle particolari entità astratte, quali le traiettorie di un moto, lo spin di un elettrone o i prezzi di un'opzione, queste entità non sembrano, in generale, giocare un ruolo al di fuori delle scienze che le riguardano e sono spesso determinate, a loro volta, ricorrendo a nozioni o oggetti matematici.

Quest'ultima considerazione ci aiuta a precisare meglio il problema. Esso non riguarda tanto il ruolo di entità, per così dire, matematicamente forgiate entro le teorie scientifiche, quali le traiettorie, gli spin o i prezzi. Riguarda piuttosto il modo in cui certe proprietà di entità puramente matematiche, definite entro delle teorie matematiche pure (se vi sono tali teorie; va osservato infatti che sostenere che non ve ne sono è già un modo di rispondere al problema), quali le geodetiche di una superficie a curvatura costante, i gruppi di simmetria, gli integrali stocastici o più semplicemente i numeri e gli insiemi, partecipano al funzionamento delle teorie scientifiche, permettendo, fra le altre cose, di definire e impiegare appropriate entità astratte proprie a queste teorie. Pare quindi più corretto parlare di applicabilità delle teorie matematiche (pure), anche se è più comune parlare, come abbiamo fatto finora (e, per semplicità, faremo in seguito) di applicabilità della matematica.

Indipendentemente dal modo in cui lo si concepisca, il problema dell'applicabilità non è, né è stato, di solo appannaggio dei filosofi. Il Nobel per la fisica Eugene Paul Wigner, per esempio, ne ha fornito una formulazione molto nota, parlando di "irragionevole efficacia della matematica nelle scienze naturali" (Wigner 1960). Molti altri fisici hanno preceduto e seguito Wigner nell'insistere sul carattere "irragionevole" (ovvero non spiegato, almeno apparentemente, da ragioni plausibili) di tale efficacia. Fra gli altri potremmo citare Heinrich Rudolf Hertz (su cui si veda Dyson 1964) o Richard Feynman, che si è espresso così: "Trovo piuttosto sorprendente che sia possibile predire ciò che accadrà attraverso la matematica, che consiste nel seguire regole che non hanno niente in comune con l'oggetto di studio originale" (Feynman 1967, p. 171). Ma lo stesso interrogativo ha percorso anche molti matematici. Per esempio David Hilbert, che durante un corso tenuto nel 1919 ha osservato che "ci confrontiamo con il fatto peculiare che la materia sembra conformarsi bene e in maniera fedele al formalismo della matematica", e ciò fa sorgere "un unisono imprevisto di essere e di pensiero, che oggi dobbiamo accettare come un miracolo" (Hilbert 1992, p. 69).

Dietro questo stupore si nascondono concezioni e attitudini diverse. Così, mentre Wigner sembra difendere una posizione antirealista rispetto alla matematica e ai suoi oggetti (Wigner, 1960, p. 2), altri fisici come Paul Davies e Roger Penrose ritengono che il successo della matematica nelle scienze fornisca evidenza per sostenere una qualche forma di realismo matematico (Davies, 1992, pp. 140-60; Penrose, 1989, pp. 556-7), adottando una posizione che si riflette fra molti filosofi nel cosiddetto argomento di indispensabilità (su cui si veda l'articolo di Andrea Sereni nel presente volume).

Queste posizioni diverse dipendono anche dall'insistere su aspetti diversi del problema. Ci si può chiedere, per esempio, in che modo la matematica intervenga nelle teorie scientifiche, permettendoci di scoprire nuove leggi. Oppure quali siano le caratteristiche che rendono efficace un modello matematico di un certo fenomeno empirico. O si può sostenere che la matematica non potrebbe applicarsi con successo alle scienze empiriche se non trattasse di oggetti che esistono indipendentemente da noi (ciò che porta a posizioni come quelle di Davies e Penrose), e domandarsi, quindi, come questa esistenza possa essere spiegata, o concepita, o perfino quale ne sia la natura (se si pensa che il significato di 'esistere' non sia univoco). Simmetricamente, si può pensare che la matematica non potrebbe applicarsi con successo alle scienze empiriche se le teorie di queste ultime avessero una valenza descrittiva di una realtà esterna e indipendente, e vedere, quindi, nell'applicabilità della matematica un sintomo del fatto che queste teorie non sono altro che costrutti atti a "salvare i fenomeni", strumenti "empiricamente adeguati", privi di valenza ontologica relativa a un presunto mondo esterno.

Restringendo l'ambito del nostro articolo, ci limiteremo a assumere che una soluzione al problema dell'applicabilità della matematica debba spiegare il modo in cui la matematica si applica con successo nelle scienze empiriche, senza porci ulteriori domande sulla natura degli oggetti matematici e/o delle teorie scientifiche, o sull'esistenza dei primi e/o il potere descrittivo delle seconde.

2. – Alcune posizioni filosofiche classiche sull'applicabilità della matematica

Prima di considerare le principali posizioni dei filosofi della matematica contemporanei, è appropriato ricordare che il problema è tutt'altro che nuovo. Esso ha, anzi, una lunga storia che incomincia, almeno, dal progetto pitagorico di una riduzione di ogni fenomeno fisico a uno schema di relazioni numeriche (un progetto confortato, fra le altre cose, da importanti risultati a proposito della teoria musicale).

La scoperta dell'incommensurabilità fra un lato di un quadrato e la sua diagonale – che in termini moderni equivale alla irrazionalità di $\sqrt{2}$, ma che era concepito, nella matematica antica, come l'impossibilità di trovare due numeri (interi positivi) m e n tali che $m(lato) = n(diagonale)$ – fu di fatto il primo ostacolo all'applicabilità della matematica allo studio del mondo fisico: se i numeri (interi positivi) non potevano bastare a descrivere i rapporti fra gli oggetti geometrici, come sarebbero potuti bastare a descrivere il mondo fisico nel suo insieme?

Posto così, il problema dipende dalla supposizione che la geometria sia in grado di descrivere le forme degli oggetti fisici, ciò che Aristotele spiega tramite la sua teoria dell'astrazione come sottrazione: la matematica sottrae dai corpi fisici la loro materia, permettendoci di rimanere con la sola forma di essi; studia la curva descritta del profilo di un naso camuso, ma non il naso stesso (*Fisica*, 193*b* 31 - 194*a* 12). Ma se questa teoria rende conto dell'applicabilità della matematica alla fisica, essa ne limita anche la portata, posto che la fisica non può occuparsi solo delle forme dei corpi, ma deve studiare i corpi stessi. Così l'astronomia geometrica, che sarà poco più tardi sviluppata de Euclide e Tolomeo, può avvalersi della matematica, anzi essere una vera e propria scienza matematica, solo in quanto non è che una parte della fisica, la quale deve studiare non solo la forma e le traiettorie dei corpi celesti, ma anche i loro attributi essenziali (*ibid.*, 193*b* 22-30).

La teoria dell'astrazione di Aristotele risponde, ribaltandola, alla teoria delle idee di Platone, che concepisce, invece, i corpi terrestri come delle copie degenerate di forme ideali. Platone oppone, per esempio, l'aritmetica praticata dai filosofi, che si occupa dei numeri per se stessi, composti da unità indistinte, a quella praticata dal volgo, che attiene, invece, ai numeri delle cose distinte fra loro (*Teeteto*, 195*e* - 196*a*). Ciò suggerisce che la matematica si applica al mondo fisico in quanto costituisce (la migliore approssimazione possibile di) una scienza delle forme ideali dalle quali il mondo fisico proviene per degenerazione.

Le teorie di Aristotele e Platone rappresentano i due primi tentativi organici (opposti fra loro) di spiegare l'applicabilità della matematica, e non è un caso che essi stiano alla radice della filosofia occidentale (o di derivazione greca, araba e latina, come si dovrebbe dire più precisamente). Ciò mostra quanto tale filosofia sia profondamente pervasa da questo problema. Queste spiegazioni forniscono due paradigmi che, pur sotto innumerevoli varianti, perverranno fino all'epoca moderna. Lo stesso Galileo si ispirerà a esse (significativamente a entrambe) per giustificare la sua nuova scienza, molto più impregnata di matematica di quella a cui intendeva opporsi. In effetti, se da una parte Galileo fa eco a Platone quando afferma che il libro della natura "è scritto in lingua matematica, e i suoi caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola" (*Saggiatore*, Ed. Naz., vol. VI, p. 232), dall'altra egli adotta una concezione aristotelica quando dichiara che se "il filosofo geometra vuol riconoscere in concreto gli effetti dimostrati in astratto, bisogna che difalchi gli impedimenti della materia" (*Dialogo*, Ed. Naz., vol. VII, p. 234), ovvero che faccia astrazione da molti aspetti non rilevanti del fenomeno studiato. È solo a condizione che questi aspetti siano tralasciati che la struttura matematica della natura può manifestarsi ed essere oggetto del nostro studio.

Questa spiegazione, insieme platonica e aristotelica, poteva forse servire a convincere i partigiani del nuovo corso scientifico inaugurato da Galileo, che si limitava a studiare i fenomeni naturali come tali, usando strumenti matematici per descriverne alcuni aspetti, senza avventurarsi, ancora, nell'identificazione di nuovi oggetti di studio che la matematica partecipava a definire (Gingras 2001; Panza 2002). Esso studiava, per esempio, il movimento dei corpi in caduta libera e la variazione della loro velocità, non il moto rettilineo uniforme definito dalla costanza dell'accelerazione. Ma a fronte della costruzione matematica assai più complessa che condusse, solo mezzo secolo più tardi, alla meccanica e alla teoria della gravitazione di Newton, occorreva una risposta diversa, capace di spiegare come nuovi oggetti definiti matematicamente potessero fornirci la chiave per capire e prevedere il corso degli eventi reali.

Com'è possibile una scienza matematica della natura? Ecco il problema che si pose Kant. Questi non fu certo il solo, all'indomani degli spettacolari risultati di Newton, a tornare sul problema dell'applicabilità. Lo fecero, in modi diversi e più legati alla loro pratica scientifica, anche Euler, d'Alembert, Laplace, per non citarne che alcuni. Ma la risposta di Kant, fornita per l'essenziale nella *Critica della Ragion Pura* (1781, 1787) e nei *Prolegomeni a ogni futura metafisica* (1783), fu certamente la più compiuta.

Secondo Kant, abbiamo esperienza quando riempiamo dei concetti con delle intuizioni: i concetti risultano dal lavoro dell'intelletto, le intuizioni da quello della sensibilità, l'esperienza da quello congiunto di entrambi. Avere esperienza significa, per Kant, accedere a degli oggetti, ma questi non sono dei dati originari che recepiamo passivamente. Sebbene possa esistere una realtà ultima, data dalle cose in sé, o noumeni, non è di questa realtà che abbiamo esperienza, e questa neppure partecipa, come tale, al processo che conduce all'esperienza e alla conoscenza che ne risulta. Tale processo comincia dal nostro acceso ai fenomeni, identificati con il contenuto indifferenziato delle intuizioni e essenzialmente distinti dai noumeni per la ragione che indicheremo fra un attimo, procede agli oggetti, tramite l'intervento di appropriati concetti, e culmina nei giudizi che risultano dall'articolazione di tali concetti riempiti dalle relative intuizioni. Perché questa forma di conoscenza, che Kant qualifica come conoscenza *a posteriori*, sia possibile, un insieme complesso di condizioni deve quindi realizzarsi. È proprio dall'identificazione di queste condizioni – le condizioni di possibilità dell'esperienza e, quindi, della conoscenza *a posteriori* – che risulta la risposta di Kant al problema dell'applicabilità della matematica.

Con gli empiristi, Kant condivide l'idea che la scienza della natura non possa che derivare dall'esperienza, e quindi essere frutto di conoscenza *a posteriori*. E è proprio il suo modo di concepire quest'ultima che permette di spiegare come la scienza della natura possa essere matematica. Secondo Kant la matematica è, infatti, costitutiva della conoscenza *a posteriori*. Ciò dipende dal fatto che i fenomeni, che, come abbiamo visto, costituiscono il contenuto stesso della nostra esperienza, si presentano a noi come ordinati nello spazio e nel tempo, i quali non sono ricettacoli esterni e assoluti (come lo erano per Newton), ma forme pure dell'intuizione. Più precisamente, essi sono rispettivamente la forma del senso esterno e la forma del senso interno, ciò che permette alle nostre intuizioni di ordinarsi fuori di noi e in noi ancora prima di essere plasmate da ogni sorta di concetto. Ma, per quanto forme, e quindi prive di esistenza al di fuori di ciò di cui sono tali, spazio e tempo ammettono un'indagine indipendente, resa possibile da una forma di intuizione non sensibile, o "pura", come dice Kant, che si esercita in connessione con concetti altrettanto puri, derivati da concetti fondamentali: le categorie della quantità e della qualità, di cui il nostro intelletto è dotato indipendentemente da ogni esperienza, e da cui il contenuto di quest'ultima dipende. È da questa indagine che risultano, rispettivamente, la geometria (euclidea), scienza pura dello spazio, e l'aritmetica, scienza pura del tempo. Esse danno luogo a una forma di conoscenza indipendente dall'esperienza, e quindi *a priori*, ma pur sempre sintetica (o meglio costituita da giudizi sintetici) in quanto dipendente dall'intuizione pura, ovvero da una fonte che, per quanto pura, non è meramente concettuale (mentre, secondo Kant, la conoscenza analitica dipende solo da relazioni che si instaurano fra concetti, indipendentemente dalle intuizioni che li riempiono). Tale conoscenza è costitutiva del contenuto stesso della conoscenza *a posteriori*, e quindi della scienza della natura, non solo perché dipende dalle categorie della quantità e della qualità, ma anche perché forgia altri concetti che intervengono, insieme a tali categorie, nella costituzione del contenuto della nostra esperienza e, quindi, degli oggetti di tale scienza. Ciò non solo spiega l'applicabilità della matematica a questa scienza, ma mostra il carattere inevitabilmente matematico di quest'ultima.

Ma Kant vuole andare più in là. Egli vuole anche mostrare il carattere inevitabile della teoria di Newton: questa non fornisce per Kant solo una forma possibile che la scienza della natura (inevitabilmente matematica) può assumere; ne fornisce la sola forma possibile. Questo aspetto della soluzione kantiana del problema dell'applicabilità, articolato nei *Primi principi metafisici della scienza della natura* (1786), è naturalmente il più caduco, e possiamo qui lasciarlo da parte, anche se è difficile capire come l'impianto teorico della *Critica della Ragion Pura* e dei *Prolegomeni* possa, senza modificazioni profonde, aprire lo spazio per una concezione pluralista della matematica e della scienza, la quale possa ammettere che tanto la prima quanto la seconda prendano forme diverse da quelle che questa soluzione considera.

Questa difficoltà è la ragione principale dell'abbandono di tale soluzione, la cui idea fondamentale è tuttavia sopravvissuta e sopravvive ancora oggi in molte altre soluzioni, per quanto diverse da questa: si tratta dell'idea di ribaltare la relazione di dipendenza fra oggetto della scienza e scienza stessa, pensando la scienza come costitutiva (in un modo e nell'altro) del suo oggetto, piuttosto che come specchio (più o meno fedele) di questo.

È proprio quest'idea quella che distingue più profondamente la soluzione di Kant dalla concezione empirista, con cui egli si accorda, come abbiamo detto, nel ritenere che la scienza della natura debba trarre origine dall'esperienza. Ma se quest'ultima idea è mantenuta e la prima negata, come possiamo risolvere il problema, se non facendo fede, in un modo più sofisticato, alla teoria aristotelica dell'astrazione come sottrazione? Una risposta venne, pochi decenni dopo la morte di Kant, dal *System of Logic* di John Stuart Mill (1843). Secondo Mill, la matematica è essa stessa empirica poiché le verità matematiche non sono che generalizzazioni derivate dall'esperienza. La matematica tratta, infatti, di regolarità fisiche, come la combinazione di più oggetti concreti, e i numeri non sono altro che proprietà di aggregati di tali oggetti (così, ad esempio, il numero 3 è una proprietà di ogni aggregato costituito da tre oggetti concreti). Questo permette, secondo Mill, non tanto di risolvere quanto di dissolvere il problema dell'applicabilità. Infatti, tra il contenuto della matematica e quello delle scienze naturali non vi è, per Mill, alcuna discontinuità essenziale.

Anche ammesso che l'idea che la matematica sia una scienza empirica possa considerarsi plausibile, la dissoluzione del problema della sua applicabilità che essa porta con sé non può che rimanere parziale. Per capirlo basta richiamarsi a una distinzione introdotta da Mark Steiner (2005): quella fra applicazioni canoniche e non canoniche di una teoria matematica. Le prime sono quelle che riguardano teorie che sono state (storicamente) sviluppate appositamente per descrivere le regolarità empiriche che sono oggetto di tali applicazioni; le seconde quelle che riguardano teorie sviluppate indipendentemente da esse. Vi sono molti casi limite, difficilmente classificabili da una parte o dall'altra, ma in molti altri casi la distinzione è chiara. Il caso dell'applicazione dell'aritmetica elementare al conteggio di oggetti concreti è il più semplice fra i casi dubbi. Un altro è quello dell'applicazione del calcolo differenziale nella descrizione del moto accelerato, che Steiner considera, invece, come un esempio ovvio di applicazione canonica (sulla base della tesi storica assai dubbia che Newton abbia sviluppato questo calcolo proprio per tale proposta: *ibid.*, p. 627). Un caso sicuro di applicazione canonica è quello dell'applicazione delle serie trigonometriche allo studio della diffusione del calore (suggerita da Fourier nella sua *Théorie Analytique de la Chaleur*, 1822). Un caso sicuro di applicazione non canonica è invece dato dall'applicazione della teoria dei gruppi in molte branche della fisica. Un altro è offerto dall'applicazione della teoria delle sezioni coniche allo studio delle orbite planetarie. È chiaro che la soluzione proposta da Mill può, al più, valere per le applicazioni canoniche, a meno che non si intenda accettare un assai dubbio postulato di uniformità matematica della natura. Inoltre, come osservato da Steiner stesso (*ibid.*, p. 647), solo la considerazione di applicazioni (intese come) canoniche (o la supposizione che ogni applicazione non canonica sia preceduta da una canonica) può suggerire che la matematica sia empirica.

L'empirismo aritmetico di Mill è stato severamente criticato da Gottlob Frege, considerato come l'iniziatore tanto della logica moderna quanto di una filosofia della matematica di orientamento analitico. Egli osserva (Frege 1884, § 9) che questo dipende dall'attribuzione alle verità aritmetiche di un senso che non è il loro, il che deriva, a sua volta, dal fatto di confonderle con delle loro interpretazioni particolari: prese come tali, queste verità sono, infatti, chiaramente universali e per nulla empiriche o induttive (*ibid.* § 10). Tuttavia Frege (*ibid.* § 99 e 1893-1903, §§ II.86-137) critica in modo altrettanto feroce anche una concezione formalista della matematica che riduce quest'ultima a un puro sistema di segni senza contenuto, come un gioco le cui regole non posseggono, al pari dei segni che esso impiega, alcun significato esterno (non si confonda questa posizione con quella assunta più tardi da Hilbert, anche se quest'ultima posizione filosofica è spesso, purtroppo, travisata e identificata con la prima). Al contrario, per Frege la matematica ha un contenuto preciso e, almeno nel caso dell'aritmetica e dell'analisi reale, che egli studia in modo più attento nelle sue due opere maggiori (1884 e 1893-1903), questo contenuto le è esterno, in quanto appartiene alla logica.

Quest'idea non comporta, tuttavia, né un diniego dell'applicabilità dell'aritmetica e dell'analisi reale né una particolare difficoltà a spiegarla. Per Frege la logica si caratterizza, infatti, per la sua generalità. E sostenere, come egli sostiene, che tanto i numeri naturali quanto i numeri reali sono oggetti logici (sia pure non esattamente nello stesso senso; una differenza, però, su cui qui non possiamo che sorvolare), va di pari passo con l'assegnare alle teorie che trattano di essi questa generalità, che è la generalità stessa del pensiero (una posizione che, in modo diverso, è sostenuta anche da Dedekind nella stessa epoca). Ma vi è di più. Infatti Frege assume come principio fondamentale quello che i filosofici analitici odierni chiamano "requisito dell'applicabilità" [*application constraint*] o anche "requisito di Frege" [*Frege's constraint*]: "Una fondazione soddisfacente di una teoria matematica deve in qualche modo incorporare le sue applicazioni, attuali e potenziali, nel suo nucleo centrale, nel contenuto che essa ascrive agli asserti della teoria" (Wright 2000, p. 324). Per Frege i numeri naturali sono oggetti associati a concetti sortali (concetti sotto cui cadono oggetti fra loro distinguibili), e devono essere definiti come tali, ovvero come cardinali di tali concetti (ovviamente, in maniera tale che due concetti abbiano lo stesso cardinale se e solo se essi sono equinumerosi, ovvero se e solo se gli oggetti che cadono sotto di essi sono in biiezione; un principio oggi noto come "principio di Hume"). Ne segue che fare un'affermazione su tali numeri, tanto nell'aritmetica pura quanto al di fuori di essa, equivale a fare un'affermazione intorno a questi concetti: dire che la carrozza dell'imperatore è trainata da quattro cavalli significa assegnare il numero quattro al concetto CAVALLI CHE TRAINANO LA CARROZZA DELL'IMPERATORE. D'altra parte, i numeri reali sono rapporti fra grandezze, e come tali devono essere definiti, non estendendo l'aritmetica dei naturali, ma sulla base di una teoria generale (e logica) delle grandezze (ciò che porta Frege a opporsi alle definizioni di Dedekind e Cantor, e a proporre una sofisticata definizione logica dei domini di grandezze). Trattare con questi numeri, in ogni contesto, significa quindi trattare con ciò che resta invariato quando si passa dal considerare un paio di grandezze di un certo tipo al considerare un paio di grandezze di altro tipo che stanno fra loro nello steso rapporto delle prime. Proprio per questo aritmetica e analisi reale si applicano alle nostre teorie scientifiche: perché tanto la prima teoria quanto la seconda trattano di questi numeri per quello che essi effettivamente sono, ovvero cardinali di concetti sortali, invarianti al variare di tali concetti sotto equinumerosità, e rapporti di grandezze, invarianti al variare delle grandezze sotto proporzionalità.

La posizione di Frege è insieme logicista e realista; per lui i numeri sono oggetti logici e, come tali, esistono indipendente dalle teorie che trattano di essi e anche da noi stessi. Il suo logicismo ha avuto un'influenza importante sul Positivismo Logico, il movimento filosofico sviluppatosi tra il terzo e il sesto decennio dello scorso secolo per rivendicare il primato della logica nella scienza e dell'esperienza nella conoscenza. Ma il suo realismo matematico non poteva far presa fra empiristi così radicali come gli adepti di tale movimento. Ciò portò a una perdita di centralità per il problema dell'applicabilità della matematica (Wilholt 2006). Per i positivisti logici la matematica, in quanto disciplina non empirica, non può avere contenuto. I suoi teoremi sono, come per Frege, delle verità logiche. Ma, a differenza che per Frege, essi non sono tali perché trattano di oggetti logici, ma perché sono pure tautologie: sono veri in base alla loro forma logica, e quindi indipendentemente da ciò che esiste (null'altro che oggetti empirici) o non esiste (fra cui vi è ogni tipo di presunto oggetto non empirico). La matematica non può quindi che fornirci un *framework* linguistico per parlare di ciò che esiste ed è, quindi, oggetto possibile di esperienza (un'idea articolata per la prima volta da Hahn 1929, poi ripresa in vari modi da altri positivisti logici, per esempio da Carnap 1930 e Ayer 1936). È questo, e solo questo, che ne garantisce l'applicabilità: un'applicabilità puramente linguistica, che è indipendente da ogni contenuto specifico.

3. – Dibattito contemporaneo

Il tramonto del Positivismo Logico e della sua influenza sulla filosofia della matematica, e il progressivo allontanarsi di questa da un'attenzione quasi esclusiva al problema dei fondamenti della matematica (su cui si veda l'articolo di Gabriele Lolli nel presente volume), hanno coinciso con un rinnovato interesse da parte dei filosofi della matematica verso il problema dell'applicabilità. Paradossalmente, uno dei fattori che hanno maggiormente contribuito al risveglio di questo interesse è stata la pubblicazione, nel 1973, del celebre articolo di Paul Benacerraf, "Mathematical Truth" (Benacerraf 1973), il cui scopo principale era piuttosto quello di partecipare a una discussione metafisica, priva di un diretto rapporto con la pratica matematica e scientifica.

L'argomento avanzato da Benacerraf, e il modo in cui esso ha orientato buona parte della discussione più recente in filosofia analitica della matematica, sono illustrati nell'articolo di Matteo Plebani nel presente volume (ma si veda anche Panza e Sereni, 2010). Qui è sufficiente osservare che il punto principale di Benacerraf è che una posizione Platonista in filosofia della matematica, secondo la quale la matematica tratta di oggetti astratti che esistono come tali, indipendenti da noi, deve saper rendere conto del modo in cui noi abbiamo conoscenza di questi oggetti, mentre una posizione nominalista, secondo la quale la matematica non possiede nessun contenuto obiettivo che le sia fornito da una realtà esterna, deve saper spiegare com'è possibile che i suoi asserti siano veri in un senso sufficientemente forte di 'vero', lo stesso senso in cui è vero che la terra è (approssimativamente) sferica o che l'Italia è una Repubblica.

Avanzare questa seconda richiesta può essere inteso come un modo di porre il problema dell'applicabilità: se i due asserti 'Ci sono 11 satelliti americani e 10 satelliti russi che orbitano attorno alla Terra' e '$11 + 10 = 21$' non sono veri nello stesso senso di 'vero', e se, in essi, i termini '10', '11' e '21' non hanno lo stesso significato, com'è possibile che da essi segua l'asserto 'Ci sono 21 satelliti che orbitano attorno alla Terra'? Così, per garantire la validità di tale inferenza, senza la quale nessuna applicazione dell'aritmetica sarebbe possibile, occorre fornire un'interpretazione del vocabolario dell'aritmetica che possa valere tanto per il suo impiego in contesti puramente matematici, quanto per il suo impiego in contesti extra-matematici. Se da una parte ciò suggerisce che solo una posizione platonista può sperare di rendere conto dell'applicabilità della matematica, resta, d'altra parte, che tale posizione cade sotto il primo dei problemi sollevati da Benacerraf. Come uscire, allora, dalla difficoltà? Ecco come il problema dell'applicabilità riappare, sullo sfondo dell'argomento di Benacerraf, sotto forma di un problema semantico.

Una possibile soluzione di questo problema, compatibile con una posizione nominalista, è stata offerta da Hartry Field (1980, 1982), su cui si veda ancora l'articolo di Matteo Plebani. Field ha negato che esistano oggetti matematici, pur mantenendo che gli asserti matematici ammettano l'abituale semantica, secondo la quale 'a è P' può essere vero solo se esiste un oggetto di cui 'a' è il nome, pervenendo così alla conclusione che nessun asserto matematico è vero (o lo è solo vacuamente, ovvero come lo è 'per ogni x, se $P(x)$ allora $Q(x)$' qualora '$P(x)$' sia falso per ogni x). Per conciliare questa conclusione con l'impiego della matematica nella scienza, Field ha sostenuto che ogni asserto scientifico che fa uso di un vocabolario matematico può essere riformulato in modo da eliminare ogni ricorso a tale vocabolario. Per mostrare come ciò sia possibile, egli ha descritto come questa riscrittura possa aver luogo nel caso degli asserti della teoria newtoniana della gravitazione, trasformando ogni asserto in cui è questione di numeri reali in un asserto in cui è unicamente questione di punti o regioni dello spazio-tempo – che Field considera come oggetti concreti –, richiamandosi, inoltre, all'ovvia possibilità di riformulare degli asserti in cui sia questione di numeri interi, quali 'Vi sono n P', senza menzionare tali numeri, ovvero rendendo 'Vi sono 0 P' con 'Nessun x è un P' e 'Vi sono k P' con 'Vi è un x che è un P, e vi sono $k-1$ y che sono dei P e sono diversi da x' (sulla proposta di Field si veda anche Malament 1982).

Una volta concessa la possibilità di tale riformulazione, rimarrebbe comunque da spiegare come l'impiego della matematica nella scienza possa condurre a risultati soddisfacenti, ovvero, secondo Field, a delle conseguenze vere. La sua risposta è che la "buona" matematica (ovvero quella che non potrebbe venir falsificata da alcun fatto empirico) è "conservativa" sulle teorie "nominaliste" consistenti. Una teoria (o un asserto) è detta(o) 'nominalista' se impiega un vocabolario che non fa alcuna menzione di entità astratte (o delle loro proprietà, relazioni o funzioni); una teoria matematica M è conservativa su una teoria nominalista N se (e solo se) $M+N$ è un'estensione conservativa di N, ovvero, ogni asserto nominalista φ è una conseguenza di $M+N$ solo se è una conseguenza di N. Basta osservare che, così intesa, la conservatività di M su N non richiede affatto la verità (non vacua) di M, per vedere come questo serva a spiegare, nel contesto della posizione di Field, come l'impiego della (buona) matematica nella scienza possa condurre a risultati soddisfacenti: per quanto i suoi teoremi non siano affatto veri (o lo siano solo vacuamente), il suo impiego entro una teoria empirica può aiutare a trarre da tale teoria delle conseguenze nominaliste vere che, pur potendo, in principio, venir tratte da essa anche senza la matematica, non potrebbero esserlo se non in modo molto più laborioso, o perfino praticamente inaccessibile.

Vi è un senso chiaro in cui la soluzione di Field al problema dell'applicabilità è una soluzione negativa: essa si riduce a sostenere che la matematica si applica con successo alle scienze perché queste potrebbero, in linea di principio, fare a meno di essa. Gli argomenti che Field porta a favore di quest'ultima affermazione sono molto discutibili. E se questa affermazione è negata, ovvero se si ammette che vi sono teorie scientifiche (che non siamo disposti a abbandonare) che ricorrono a delle teorie matematiche in modo indispensabile, allora il problema richiede una soluzione positiva. Una tale soluzione sembra più facilmente identificabile se si assume dal principio un atteggiamento genericamente kantiano: non è tanto il modo in cui il mondo è fatto, ma piuttosto il modo in cui noi consideriamo appropriato studiarlo, che spiega perché la matematica si applica nelle scienze empiriche. Non si tratta necessariamente di negare che tali scienze possano usare la matematica per descrivere il mondo, ma di insistere sul fatto che se di descrizione si tratta, questa non possa essere puramente passiva.

Un modo per articolare quest'idea è di sostenere, come fa Mark Steiner (1989, 1998), che il ruolo della matematica nelle scienze dipende dal nostro uso, in esse, di analogie matematiche, insistendo sul fatto che, spesso, tali analogie non hanno alcuna base empirica, ovvero non dipendono dal fatto che "certe proprietà matematiche sono 'equivalenti' a qualche proprietà fisica" (Steiner 1989, p. 453), o più generalmente empirica, ma sono piuttosto "formali", ovvero sono motivate da proprietà degli strumenti matematici impiegati, dal fatto che tali strumenti si rivelano convenienti in a base ai nostri standard cognitivi. Questa'idea riecheggia il ben più noto convenzionalismo geometrico di Poincaré: l'idea che noi descriviamo (localmente) il mondo fisico impiegando la metrica euclidea per mere ragioni di comodità. Ma Steiner va molto più in là di Poincaré, arrivando a sostenere che le applicazioni scientifiche della matematica dipendono dall'adozione di una "strategia antropocentrica", la quale adatta la scienza a "standard umani di bellezza e convenienza" (1998, p. 7).

Anche Giorgio Israel (1996, 2002) ha insistito, sia pure in un senso diverso, sul ruolo dell'analogia nelle applicazioni scientifiche della matematica, in particolare nella "modellizzazione matematica". Israel definisce un modello matematico come uno "schema concettuale che è inteso rappresentare un insieme di fenomeni usando il linguaggio della matematica", aggiungendo, tuttavia, che un tale modello "non rispecchia un fenomeno esattamente", né pretende di fornire "la sola possibile rappresentazione" di esso, o di rappresentare un solo fenomeno: lo stesso fenomeno può essere rappresentato da diversi modelli, che sono spesso atti a offrire delle "prospettive diverse ma compatibili" di esso, e lo stesso modello "può essere impiegato per rappresentare fenomeni diversi, fra cui stabilisce una sorta di 'omologia' strutturale" (Israel, 2002, p. 244). È proprio quando fenomeni diversi possono venir rappresentati (per uno dei loro aspetti) da uno stesso modello che si manifesta una "analogia matematica" che il modello esprime e permette di studiare. Secondo Israel, d'altra parte, è proprio l'attenzione agli aspetti di un fenomeno che lo rendono analogo ad altri in questo senso che permette di ottenere un "modello matematico" di tale fenomeno. Ma quella della modellizzazione matematica è una pratica scientifica relativamente recente. In tempi precedenti, l'attenzione della scienza verteva piuttosto su "analogie fisiche" che la matematica poteva, al più, aiutare a descrivere convenientemente.

Se da una parte ciò implica che il problema dell'applicabilità della matematica si presenta in modo diverso nella pratica scientifica recente, dall'altra ciò suggerisce che, almeno per il modo in cui il problema si presenta oggi, la sua soluzione non possa che dipendere dalla considerazione del modo in cui appropriati strumenti matematici permettono di identificare, isolare, e, quindi, studiare come tali, degli aspetti strutturali (o formali, nella terminologia di Steiner) comuni a diversi fenomeni empirici. Pur senza implicare né la concezione realista, insita nell'idea di astrazione come separazione, né, tanto meno, la marginalizzazione del ruolo della matematica, insita nella convinzione che la scienza debba studiare l'intrinseca materialità del suo oggetto empirico, questa visione del problema ci porta, quindi, a favorirne una soluzione in linea con quella aristotelica.

È questa l'idea fondamentale che sta alla base della soluzione del problema dell'applicabilità proposta entro la "teoria della misura" [*measurement theory*] promossa da Patrick Suppes e dalla sua scuola (Krantz, Luce, Suppes, e Tversky 1971-1990). Secondo tale teoria, l'applicazione delle matematica allo studio di un certo fenomeno è giustificata dalla dimostrazione di un "teorema di rappresentazione" che stabilisce che un certo dominio di oggetti (appropriatamente identificati e isolati) soddisfa certe condizioni che permettono di assegnare loro delle misure che soddisfano, a loro volta, certe opportune proprietà matematiche.

Una generalizzarne di tale idea sta alla base della soluzione proposta, molto più recentemente, da Christopher Pincock (2004, 2007a, 2007b, 2012), secondo la quale l'applicabilità della matematica nelle scienze empiriche è dovuta alla possibilità di correlare attraverso un appropriato morfismo (*mapping*) certi sistemi che sono oggetto di queste scienze – i cosiddetti sistemi *target* – e certi modelli matematici, in modo che i secondi preservino alcune caratteristiche dei primi (in particolare delle proprietà strutturali), pur ignorandone altre. L'idea di Pincock è che sia possibile rendere conto dell'applicabilità della matematica identificando il tipo di morfismo matematico che correla un certo sistema *target* a un certo modello, ciò che rende anche possibile stabilire in che senso si possa dire che un asserto "misto", quale 'Il satellite a ha una massa di n Kg', è vero. Ogni applicazione si basa, in effetti, su un morfismo appropriato che deve essere identificato come tale. Quest'idea è oggi usualmente richiamata parlando di *mapping account*.

Per illustrarla, consideriamo un caso tanto semplice quanto noto: il problema dei setti ponti di Königsberg, affrontato (e risolto) da Euler nel 1736: è possibile passeggiare per Königsberg (l'attuale Kaliningrad) attraversando una e una sola volta ognuno dei suoi setti ponti, che collegano fra loro quattro zone di terraferma, tornando infine al punto di partenza? Per rispondere a questa domanda possiamo considerare le quattro zone di terraferma come dei vertici di un grafo e i sette ponti come delle connessioni fra questi vertici, così da ottenere una rappresentazione diagrammatica della nostra città. Lo studio di tale grafo rileva che esso possiede la struttura di un multigrafo connesso. Possiamo allora richiamarci a un teorema della teoria dei grafi che stabilisce che un multigrafo connesso ammette un percorso che inizia e finisce sullo stesso vertice se e solo se non include vertici di valenza dispari, e concludere che la risposta alla domanda precedente è negativa. In questo caso il morfismo rilevante è un isomorfismo. La sua esistenza permette di studiare il sistema *target* studiando il suo modello.

L'idea non è affatto nuova. Gli studi di Israel citati sopra ne fanno, per esempio, un ampio uso, anche se non limitano le relazioni possibili fra sistema studiato e modello matematico a casi in cui sia identificabile un preciso morfismo. Il merito di Pincock non è tanto quello di avere studiato diverse varianti di tale idea, come d'altra parte ha fatto lo stesso Israel, quanto quello di aver riportato quest'idea al centro della discussione filosofica, identificandone puntigliosamente presupposti e conseguenze di ordine generale, in un linguaggio facilmente accessibile all'attuale comunità dei filosofi analitici della matematica e della scienza. Ciò ha dato luogo a un'ampia discussione.

Otávio Bueno e Mark Colyvan (2011), ad esempio, hanno proposto di raffinare il *mapping account* di Pincock in ottemperanza a una "concezione inferenziale" dell'applicazione della matematica. Essi hanno proposto che ogni applicazione dalla matematica include tre fasi: una prima fase di "immersione", in cui si stabilisce un morfismo – sia esso, per esempio, un monomorfismo, un epimorfismo o un isomorfismo – tra il sistema *target* e una certa struttura matematica; una fase di "derivazione", in cui otteniamo dei risultati lavorando su tale struttura; un'ultima fase di "interpretazione", in cui tali risultati sono interpretati sul sistema *target*, attraverso un morfismo, che non è necessariamente né identico al, né dettato dal, primo. La scelta dei morfismi nella prima e terza fase dipende dal tipo di domande che sono poste sul sistema *target*, e questo permette al resoconto di incorporare fattori contestuali. D'altra parte, la relativa indipendenza del secondo morfismo dal primo permette di render conto del ruolo di considerazioni pragmatiche. Per vederlo, consideriamo un esempio portato dagli stessi Bueno e Colyvan: le varie interpretazioni che Paul Dirac diede delle soluzioni a energia negativa nell'equazione che oggi porta il suo nome (*ibid.*, pp. 364). Inizialmente, Dirac considerò tali soluzioni come "non-fisiche"; in un secondo momento, alla luce di alcuni risultati teorici (in particolare del principio di esclusione di Pauli), ipotizzò che esse corrispondessero a dei " 'buchi' in un mare di elettroni". Infine, affinché la sua interpretazione non contraddicesse alcuna evidenza empirica e fosse compatibile con i risultati teorici accettati circa la massa del protone e dell'elettrone, egli considerò che esse corrispondano a dalle nuove particelle, i positroni. È chiaro che nessuna di tali interpretazioni è imposta dal morfismo iniziale, o da qualche considerazione di natura strutturale riguardo al modello matematico utilizzato. Esse sono piuttosto dettate da considerazioni pragmatiche.

A questo punto si potrebbe pensare che, se impiegato in modo generalizzato per risolvere il problema dell'applicabilità, il *mapping account* dipenda dall'idea che a ogni fenomeno empirico rilevante corrisponde una certa struttura matematica tramite un appropriato morfismo (per un argomento contro la generale applicabilità del *mapping account* per rendere conto delle diverse forme di applicazione della matematica, cfr. Rizza 2013). Questo presupposto è tuttavia opinabile, come è messo in luce dal ruolo delle idealizzazioni nelle scienze (cfr. Batterman 2010). Solitamente, nelle scienze empiriche rappresentiamo un sistema reale al netto di alcune deliberate alterazioni delle sue caratteristiche effettive. Questo serve, semplicemente, a rendere il problema matematicamente trattabile, e dipende dall'ipotesi che tali alterazioni non abbiano conseguenze rilevanti sul risultato finale che si intende ottenere. Per esempio, nello studio del moto della Terra attorno al Sole, consideriamo che la prima abbia una forma perfettamente sferica e che la sua massa sia concentrata nel suo centro; nel modello del moto oscillatorio di un pendolo, assumiamo l'uniformità della forza gravitazionale; per studiare il movimento di un fluido che scorre in un tubo, utilizziamo le equazioni di Navier-Stokes, che trattano il fluido come un mezzo continuo anziché come un sistema di molecole. Non si tratta solo di semplificazioni, o di considerazioni relative solo ad alcuni aspetti dei fenomeni studiati a discapito di altri. Si tratta di distorsioni che nessun morfismo potrebbe far corrispondere ad aspetti reali di tali fenomeni (Cartwright 1989). Tuttavia, il formalismo matematico che applichiamo alla luce di tali distorsioni funziona e ci permette di raggiungere buoni risultati.

Vi sono diversi modi di affrontare questo problema senza abbandonare una concezione strutturalista dell'applicabilità. Benché anche Pincock abbia prospettato una soluzione nel contesto della sua proposta (cfr. Pincock 2007b, 2012, 2014), una strategia alternativa dipende dall'adozione di una forma di "realismo strutturale". Si tratta di una posizione, usualmente fatta risalire a un influente articolo di John Worrall (1989), secondo la quale le nostre teorie scientifiche descrivono correttamente la struttura dei fenomeni empirici che studiano (i quali possiedono, quindi, tale struttura come tali), senza che da questo debba seguire che esse descrivono correttamente anche la natura delle entità che soddisfano tale struttura. Contro questa posizione non vale il cosiddetto argomento della meta-induzione pessimistica, secondo il quale il solo fatto che nel corso della storia della scienza molte teorie largamente accettate si siano rivelate scorrette, o siano almeno state abbandonate con buone ragioni, rende poco plausibile che le attuali teorie scientifiche siano descrizioni corrette della realtà (o, come si dice, siano vere o, almeno, approssimativamente vere). L'idea è infatti che, per quanto alternative fra loro e/o scorrette a proposito dell'esistenza o della natura di certe entità, le principali teorie del passato si siano susseguite fra loro mantenendo invariata una certa struttura che esse assegnano ai fenomeni o trasformando questa struttura secondo una logica di progresso, in maniera continua (vedremo fra poco perché questo è rilevante per la nostra questione).

Questa posizione è stata negli ultimi anni al centro di una viva discussione che ha coinvolto moltissimi filosofi della scienza che qui non possiamo citare. Basterà dire che due diverse versioni di essa, chiaramente distinte da James Ladyman (1998), sono venute affermandosi. Secondo la prima, il "realismo strutturale epistemico" (posizione sostenuta, per esempio, da Mauro Dorato; cfr. Dorato 2000), se le nostre teorie descrivono correttamente solo la struttura dei fenomeni è perché tale struttura è tutto ciò che noi siamo in grado di conoscere, e di cui la scienza si interessa, o almeno dovrebbe interessarsi. Secondo l'altra versione, il "realismo strutturale ontico" (sostenuta, per esempio, da Steven French e dallo stesso James Ladyman; cfr. French e Ladyman 2011), se le nostre teorie non descrivono correttamente che la struttura dei fenomeni è perché tale struttura è tutto ciò che vi è nella realtà.

Ora, quest'ultima posizione si accompagna spesso (si vedano, per esempio, French 2000, 2014 e French *et al.* 2002) all'idea che le teorie scientifiche si differenziano fra loro in base ai loro modelli (nel senso che questo termine ha in logica) e siano quindi "rappresentate", per ciò che è rilevante nella discussione filosofica, da tali modelli. Parlando della struttura dei fenomeni empirici ci si riferisce proprio (e solo) a tali modelli, e dire che una teoria descrive correttamente tale struttura significa dire che i suoi modelli sono parzialmente isomorfi o omomorfi a un modello che si identifica con il fenomeno (o meglio la struttura) reale. D'altra parte, dire che nella storia della scienza la struttura che si assegna ai fenomeni si trasforma con continuità significa dire che le successive teorie di un certo fenomeno hanno (o sono rappresentate da) modelli legati fra loro da appropriati morfismi parziali. Ma cosa vuol dire che un morfismo è parziale, che due modelli sono parzialmente isomorfi o che uno è parzialmente omomorfo a all'altro? È proprio a questo punto che la posizione filosofica qui esaminata permette di affrontare la questione delle alterazioni teoriche che stavamo discutendo più sopra.

In questo contesto, il termine 'struttura' ha un significato logico (o, meglio, algebrico) preciso. Una struttura è identificata con una coppia ordinata $\langle D, R_i \rangle_{i \in I}$, dove D è un insieme non vuoto di individui che fornisce il dominio della struttura e $(R_i)_{i \in I}$ una famiglia di relazioni

n_i-arie, concepite estensionalmente come degli insiemi di n_i-uple di elementi di D per qualche $n > 0$. Una struttura e le corrispondenti relazioni sono dette 'parziali', se le seconde si identificano con delle triple $\langle R_{i,1}, R_{i,2}, R_{i,3}\rangle$ di insiemi di n_i-uple (di elementi di D) mutamente disgiunti, e tali che $R_{i,1} \cup R_{i,2} \cup R_{i,3} = D^n$, dove $R_{i,1}$ è l'insieme di n_i-uple che appartengono (o di cui sappiamo che appartengono) a R_i, $R_{i,2}$ l'insieme di n_i-uple che non appartengono (o di cui sappiamo che non appartengono) a R_i, e $R_{i,3}$ l'insieme di n_i-uple per cui non è determinato (o per cui non sappiamo) se appartengono o no a R_i (si noti che, per qualche i, $R_{i,3}$ può essere vuoto, ciò che comporta che R_i si identifichi con $R_{i,1}$, che sarà un'usuale relazione n_i-aria; se questo è il caso per ogni i in I, la relativa struttura parziale si riduce a una struttura usuale). Date due strutture parziali $\langle D, R_i\rangle_{i\in I}$ e $\langle D', R'_i\rangle_{i\in I}$ diciamo che $f : D \to D'$ è un isomorfismo o un omomorfismo parziale se le condizioni che lo caratterizzano come isomorfismo o omomorfismo si applicano a $R_{i,1}$ e $R_{i,2}$, ma non a $R_{i,3}$. Per esempio, f è un omomorfismo parziale se per ogni $x_1, \ldots, x_{n_i}$ in D e ogni i in I, $R_{i,1}[x_1, \ldots, x_{n_i}] \Rightarrow R'_{i,1}[f(x_1), \ldots, f(x_{n_i})]$ e $R_{i,2}[x_1, \ldots, x_{n_i}] \Rightarrow R'_{i,2}[f(x_1), \ldots, f(x_{n_i})]$.

È proprio il carattere parziale delle strutture e dei morfismi, nonché l'inessenzialità della natura specifica degli elementi del dominio di tali strutture, che, secondo questo modo di pensare, permettono di render conto delle alterazioni dei fenomeni empirici che le teorie scientifiche portano con sé. Se una certa struttura parziale $\langle D, R_i\rangle_{i\in I}$ è identificata con la struttura reale del fenomeno, un'altra struttura $\langle D', R'_i\rangle_{i\in I}$ parzialmente isomorfa o omomorfa a essa può fornirne una descrizione corretta anche se gli elementi di D', o alcuni di essi, non sono identici a quelli di D, e non stanno fra loro esattamente nelle stesse relazioni in cui questi ultimi elementi sono supposti stare. Allo stesso modo, due teorie scientifiche aventi due strutture $\langle D, R_i\rangle_{i\in I}$ e $\langle D', R'_i\rangle_{i\in I}$ come modelli, ovvero rappresentate da, o perfino identificate con tali strutture (o con appropriate famiglie di tali strutture a cui esse appartengono, se le teorie non sono categoriche) possono dirsi entrambi corrette, e evolvere l'una nell'altra con continuità, anche se sono essenzialmente distinte (ovvero non totalmente isomorfe, e neppure totalmente omomorfe, e tali che gli elementi di D e D' sono supposti avere una diversa natura), posto che siano legate da appropriati morfismi parziali.

Tanto il *mapping account* che il realismo strutturale (tanto epistemico che ontico) sembrano dare per scontato che l'applicazione della matematica a un fenomeno empirico dipenda da, o porti almeno con sé, una sorta di comprensione del fenomeno stesso, o anche solo una sua rappresentazione giudicata in qualche modo fedele. Ma siamo sicuri che le cose vadano sempre così? Uno degli autori del presente articolo, in collaborazione con altri due studiosi, ha suggerito che, spesso, la matematica interviene in *data analysis* in un modo che prescinde da questo (Napoletani *et al.* 2011, 2014). L'impiego di algoritmi potenti, implementabili su computer e capaci di operare su immense banche di dati permette infatti, in molti casi, un approccio alla soluzione matematica di problemi empirici che è del tutto indipendente da qualsiasi considerazione relativa alla struttura del fenomeno da cui il problema dipende. È lo stesso algoritmo, scelto in base a considerazioni intra-matematiche, a fornire una classificazione o a far apparire una invariante formale, da cui la soluzione emerge indipendentemente dalla considerazione di tale struttura. Il caso dei DNA *microrray* è sintomatico. Essi permettono lo studio di un altissimo numero di campioni di DNA, ciascuno tratto da un grande numero di soggetti; la matrice di dati che ne risulta è sottoposta ad analisi statistiche che producono classificazioni la cui base biologica non è necessariamente nota, ma che hanno importanti applicazioni pratiche. L'uso delle appropriate tecniche statistiche fornisce quindi un esempio di quello che gli autori identificano come un caso di "*forcing*" di tecniche matematiche su fenomeni empirici: un'idea che richiama, sia pure in un contesto tecnicamente più preciso, quella di analogia formale avanzata da Steiner. Resta tuttavia che questo resoconto non può, di per sé, costituire una riposta al problema dell'applicabilità. Esso rende piuttosto chiaro come, almeno nei casi in questione, una soluzione di tale problema non possa che dipendere dallo studio delle tecniche matematiche rilevanti e dall'identificazione della classe di fenomeni a cui queste tecniche possono applicarsi con successo, fenomeni che gli autori qualificano come "storici" per sottolineare il fatto che il loro sviluppo "può essere vincolato solo localmente", ottimizzando funzioni diverse in tempi diversi (Napoletani *et al*. 2014, p. 486).

Alla luce delle considerazioni precedenti, dovremmo poter guardare con occhi diversi allo stupore di Wigner circa l'"irragionevole efficacia della matematica". Per quanto non si possa certo dire che il problema dell'applicabilità sia stato risolto, si potrebbe almeno sperare che la sensazione di irragionevolezza sia stata attenuata. Tale sensazione sembrerebbe, infatti, derivare dalla sola considerazione del risultato finale di un processo complesso che coinvolge solo alcune parti della matematica, spesso create *ex novo*, o mutuate da tecniche adottate nelle scienze empiriche (cfr. Urquhart 2008), o dalla diretta considerazione di fenomeni empirici (cfr. Azzouni 2000), e, ancora più spesso, impiegate in modo da assorbire, per così dire, i fenomeni studiati dentro di esse, tramite morfismi, modellizzazioni, esclusioni, deformazioni, interpretazioni, forzature (o anche solo rinormalizzazioni: cfr. Steiner 1992 e Maddy 1997, cap. VI).

Qualcuno è andato più in là e ha sostenuto che, a ben guardare le cose da vicino, ci si accorge che questo vale solo per certi pezzi del mondo, che più di altri si prestano a essere matematizzati, e che noi, dopo tutto, affrontiamo solo quei problemi empirici che sono risolvibili con i metodi matematici che conosciamo, non facendo altro che ottenere "quello che stiamo cercando" (Colyvan 2012, p. 105). Si tratta di una concezione che Wilson (2000) ha catalogato come "opportunismo matematico". Essa ritiene che l'applicazione della matematica discenda dalla capacità di identificare quelle speciali condizioni che permettono a una qualche parte di essa di dirci qualcosa di utile circa il comportamento dei sistemi empirici che soddisfano tali condizioni, e che, nonostante questo, spesso ci troviamo di fronte a situazioni in cui la matematica non riesce a applicarsi con successo (il settimo capitolo di Pincock 2012 riporta alcuni esempi sintomatici di questi "fallimenti").

Resta tuttavia che lo spettro delle applicazioni della matematica è oggi così ampio e in rapida estensione (si pensi solo allo sviluppo delle tecniche matematiche in biologia, neurologia, etologia, geologia, sociologia, ecc.) che una tale posizione non sembra poterne reggerne l'impatto. Per quanto la matematica non sia certo onnipotente e non si possa dire onnipresente, l'estensione e l'allargamento costante dei fenomeni ai quali si applica non permettono di spiegare la sua efficacia come un effetto accidentale o anche solo locale. Ciò che invece sembra apparire chiaro è che questa spiegazione non può venire che da un'analisi dettagliata della matematica stessa e dallo studio delle sue diverse e variegate forme di applicazione.

4. – Ramificazioni del problema

Abbiamo cercato, nelle pagine precedenti, di presentare il problema dell'applicabilità della matematica e identificare alcune linee direttive lungo le quali una sua soluzione è stata ritenuta ed è forse possibile. Lo abbiamo fatto tracciando una breve traiettoria storica e riassumendo alcune posizioni recenti. Naturalmente, nella nostra trattazione non siamo potuti entrare in molti dettagli e abbiamo omesso diversi aspetti del problema.

Per esempio, ci siamo focalizzati solo sull'applicabilità esterna della matematica, in particolare nelle scienze empiriche, tralasciando del tutto la questione, forse ancora più complessa, dell'applicabilità interna (su cui cfr. Steiner 1998, 2005): la matematica offre tanto la possibilità di interpretare alcune sue teorie entro altre sue teorie, quanto la possibilità di usare insieme risultati di teorie diverse, facendoli interagire fra loro. Per quanto i due problemi siano essenzialmente diversi, non è difficile vedere come essi siano collegati, soprattutto se si considera che l'applicabilità esterna dipende dall'edificazione di modelli matematici.

Abbiamo anche tralasciato la questione, ancora più legata a quella dell'applicabilità, della spiegazione matematica di fenomeni empirici (per cui rimandiamo a Molinini 2014). Non potrebbe esserci spiegazione matematica di fenomeni empirici se la matematica non si applicasse con successo nelle scienze che trattano di tali fenomeni, ma un'applicazione di successo non è necessariamente una spiegazione. Rendere conto della possibilità della seconda richiede, quindi, di più che giustificare la prima, anche se non si può prescindere da questo (ma, naturalmente, si può anche sostenere che se la matematica è applicabile con successo nelle scienze empiriche, essa non è atta a fornire alcun tipo di spiegazione dei fenomeni che queste studiano e che, anzi, questa è proprio una conseguenza del fatto che la sua applicazione si conformi al *mapping account*).

Ancora, il tema dell'applicabilità gioca un ruolo cruciale anche nel dibattito su ontologia e epistemologia della matematica che si organizza intorno all'argomento d'indispensabilità, a cui è dedicato l'articolo di Andrea Sereni nel presente volume.

Il problema dell'applicabilità ha, infine, molte altre ramificazioni in numerose questioni discusse in filosofia della scienza e della matematica, molte delle quali possono essere esplorate partendo dai lavori che abbiamo citato e da quelli che sono citati in altri articoli inclusi nel presente volume. Il cuore del problema resta tuttavia lo stesso: quando usiamo la matematica per fare previsioni relative a dei fenomeni empirici, o anche solo per studiare certi aspetti di questi fenomeni, o per risolvere problemi che essi presentano, facciamo davvero qualcosa di simile a quello che farebbe qualcuno che provasse a prevedere l'andamento della Borsa di New York studiando l'anatomia degli elefanti? Speriamo di aver mostrato che la risposta è negativa, e che non lo è tanto perché i fenomeni empirici matematizzati si comportano diversamente dalla borsa di New York (sul cui andamento molte sofisticate teorie di matematica finanziaria hanno, d'altra parte, molto da dire), quanto perché la matematica è molto diversa dallo studio dell'anatomia degli elefanti.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

AYER, A. J. (1936), *Language, truth, and logic*, Victor Gollancz, London (trad. it. *Linguaggio, verità e logica*, Feltrinelli, Milano, 1961).

AZZOUNI, J. (2000), 'Applying mathematics: An attempt to design a philosophical problem', *The Monist*, vol. 83, pp. 209-27.

BANGU, S. (2012), *The applicability of mathematics in science: Indispensability and ontology*, Palgrave Macmillan, London.

BATTERMAN, R. (2010), 'On the explanatory role of mathematics in empirical science', *British Journal for the Philosophy of Science*, vol. 61, pp. 1-25.

BENACERRAF, P. (1973) 'Mathematical truth', *Journal of Philosophy*, vol. 70, pp. 661-80.

BUENO, O. e COLYVAN, M. (2011), 'An inferential conception of the application of mathematics', *Noûs*, vol. 45, pp. 345-74.

CARNAP, R. (1930), 'Die Mathematik als Zweig der Logik', *Blätter für Deutsche Philosophie*, vol. 4, pp. 298-310.

COLYVAN, M. (2001), 'The miracle of applied mathematics', *Synthese*, vol. 127, pp. 265-77.

COLYVAN, M. (2012), *An introduction to the philosophy of mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge.

DAVIES, P. C. W. (1992), *The mind of God*, Penguin Book, London (trad. it. *La mente di Dio*, Mondadori, Milano, 1996)

DORATO, M. (2000), 'Substantivalism, relationism and structural spacetime realism', *Foundations of Physics*, vol. 30, pp. 1605-28.

DYSON, F. J. (1964), 'Mathematics in the physical sciences', *Scientific American*, vol. 211, pp. 128-146.

DUMMETT, M. (1991), *Frege: Philosophy of mathematics*, Harvard University Press, Cambridge (MA).

FEYNMAN, R. P. (1967), *The character of physical law*, MIT Press, Cambridge (MA) (trad. it. *La legge fisica*, Bollati Boringhieri, Torino, 1971).

FIELD, H. (1980), *Science without numbers: A defence of nominalism*, Blackwell, Oxford.

FIELD, H. (1982), 'Realism and anti-realism about mathematics', *Philosophical Topics*, vol. 13, pp. 45-69; anche in H. Field, *Realism, mathematics and modality*, Blackwell, Oxford, 1989, pp. 53-78.

FREGE, G. (1884), *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*, Koebner, Breslau (trad. it. *I fondamenti dell'aritmetica. Un'indagine logico-matematica sul concetto di numero*, in G. Frege, *Logica e aritmetica*, a cura di C. Mangione, Boringhieri, Torino, 1965).

FREGE, G. (1893-1903), *Grundgesetze der Arithmetik*, 2 Voll., Pohle, Jena (trad. it parziale, *I principi dell'aritmetica*, in G. Frege, *Logica e aritmentic*a, a cura di C. Mangione, Boringhieri, Torino, 1965).

FRENCH, S. (2000), 'The reasonable effectiveness of mathematics: partial structures and the application of group theory to physics', *Synthese*, vol. 125, pp. 103-20.

FRENCH, S. (2014), *The Structure of the world: Metaphysics and representation*, Oxford University Press, Oxford.

FRENCH, S., BUENO, O. e LADYMAN, J. (2002), 'On representing the relationship between the mathematical and the empirical', *Philosophy of Science*, vol. 69, pp. 452-73.

FRENCH,. S. e LADYMAN, J. (2011), 'In defence of ontic structural realism', in A. Bokulich e P. Bokulich (a cura di), *Scientific structuralism*, Springer, Berlin, pp. 25-42.

GALILEO GALILEI, *Le opere di Galileo Galilei: edizione nazionale sotto gli auspici di sua maestà il re d'Italia*, a cura di A. Favaro, 20 voll., Barbera, Firenze, 1890-1909.

GINGRAS, Y. (2001), 'What did mathematics do to physics?', *History of Science*, vol. 39, pp. 383-416.

HAHN, H. (1929), 'Empirismus, Mathematik, Logik', Forschungen und Fortschritte, Vol. 5.

HILBERT, D. (1992), *Natur und mathematisches Erkennen: Vorlesungen, gehalten 1919-1920 in Göttingen*, a cura di D.E. Rowe, Birkhäuser, Basel.

ISRAEL, G. (1996), *La visione matematica della realtà,* Laterza, Roma-Bari.

ISRAEL, G. (2002), 'The two faces of mathematical modeling: Objectivism vs subjectivism, simplicity vs complexity', in P. Cerrai, P. Freguglia e P. Pellegrini (a cura di), *The application of mathematics to the sciences of nature. Critical moments and aspects*, Kluwer, New York, pp. 233-243.

KRANTZ, D. H., LUCE, R. D., SUPPES, P. e TVERSKY, A. (1971-1990), *Foundations of measurement,* 3 voll., Academic Press, New York.

LADYMAN, J. (1998), 'What is structural realism?', *Studies in history and philosophy of science*, vol. 29, pp. 409-24.

MADDY, P. (1997), *Naturalism in mathematics*, Oxford University Press, Oxford.

MALAMENT, D. (1982), 'Review of Field's *Science without numbers*', *Journal of Philosophy*, vol. 79, pp. 523-34.

MOLININI, D. (2014), *Che cos'è una spiegazione matematica*, Carocci, Roma.

NAPOLETANI, D., PANZA, M. e STRUPPA, D. (2011), 'Agnostic science. Towards a philosophy of data analysis', *Foundations of Science*, vol. 16, pp. 1-20.

NAPOLETANI, D., PANZA, M. e STRUPPA, D. (2014), 'Is big data enough? A reflection on the changing role of mathematics in applications', *Notices of the American Mathematical Society*, vol. 61, pp. 485-90.

PANZA, M. (2002), 'Mathematization of the science of motion and the birth of analytical mechanics: A historiographical note', in P. Cerrai, P. Freguglia e P. Pellegrini (a cura di), *The application of mathematics to the sciences of nature. Critical moments and aspects*, Kluwer, New York, pp. 253-71.

PANZA, M. e SERENI, A. (2010), *Il Problema di Platone*, Carocci, Roma (ed. inglese aggiornata, *Plato's problem. An introduction to mathematical platonism*, Palgrave Macmillan, Basingstoke, 2013).

PENROSE, R. (1989), *The emperor's new mind: Concerning computers, mind,and the laws of physics*, Oxford University Press, Oxford (trad. it. *La nuova mente dell'imperatore*, Rizzoli, Milano, 1992).

PINCOCK, C. (2004), 'A new perspective on the problem of applying mathematics', *Philosophia Mathematica*, vol. 3, pp. 135-61.

PINCOCK, C. (2007a), 'A role for mathematics in the physical sciences', *Noûs*, vol. 41, pp. 253-75.

PINCOCK, C. (2007b), 'Mathematical idealization', *Philosophy of Science*, vol. 74, pp. 957-67.

PINCOCK, C. (2012), *Mathematics and scientific representation*, Oxford University Press, Oxford.

PINCOCK, C. (2014), 'How to avoid inconsistent idealizations', *Synthese*, vol. 191, pp. 2957-72.

RIZZA, D. (2013), 'The applicability of mathematics: Beyond mapping accounts', *Philosophy of Science*, vol. 80, pp. 398-412.

SHABEL, L. (2005), 'Apriority and application: Philosophy of mathematics in the modern period', in S. Shapiro (a cura di), *The Oxford handbook of philosophy of mathematics and logic*, Oxford University Press, Oxford, pp. 29-50.

SHAPIRO, S. (1983), 'Mathematics and reality', *Philosophy of Science*, vol. 50, 523-48.

STEINER, M. (1989), 'The application of mathematics to natural science', *Journal of Philosophy*, vol. 86, pp. 449-480.

STEINER, M. (1992), 'Mathematical rigor in physics', in Detlefsen, M. (a cura di), *Proof and knowledge in mathematics*, Routledge, New York, pp. 158-70.

STEINER, M. (1998), *The applicability of mathematics as a philosophical problem*, Harvard University Press, Cambridge (MA).

STEINER, M. (2005), 'Mathematics - application and applicability', in S. Shapiro (a cura di), *The Oxford handbook of philosophy of mathematics and logic*, Oxford University Press, Oxford, pp. 625-50.

URQUHART, A. (2008), 'Mathematics and physics: Strategies of assimilation', in P. Mancosu (a cura di), *The philosophy of mathematical practice*, Oxford University Press, Oxford, pp. 417-40.

WIGNER, E. P. (1960), 'The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences', *Communications on Pure and Applied Mathematics*, vol. 13, pp. 1-14.

WILSON, M. (2000), 'The unreasonable uncooperativeness of mathematics in the natural sciences', *The Monist*, vol. 83, pp. 296-315.

WILHOLT, T. (2006), 'Lost in the way from Frege to Carnap: How the philosophy of science forgot the applicability problem', *Grazer Philosophische Studien*, vol. 73, pp. 69-82.

WORRALL, J. (1989), 'Structural realism: The best of both worlds?', *Dialectica*, vol. 43, pp. 99-124.

WRIGHT, C. (2000) 'Neo-Fregean foundation for real analysis: Some reflection on Frege's constraint', *Notre Dame Journal of Formal Logic*, vol. 41, pp. 317-34.

Daniele Molinini
Dipartimento di Filosofia, Comunicazione e Spettacolo,
Università degli Studi Roma Tre (Roma)
e-mail: dmolinini@gmail.com

Marco Panza
Institut d'Histoire et de Philosophie des Sciences et des Techniques,
Université Paris 1 (Paris)
e-mail: marco.panza@univ-paris1.fr