La Matematica nella Società e nella Cultura

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Andrea Sereni

L'argomento di indispensabilità

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **7** (2014), n.3 (Matematica e filosofia. Contributi al dialogo interdisciplinare), p. 343–366.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2014_1_7_3_343_0>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2014.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. VII, Dicembre 2014, 343-366

L'argomento di indispensabilità

ANDREA SERENI

> Of course, the logical connections, one might say *the rigid skeleton in the mathematical organism*, must remain, in order to give it its peculiar trust-worthiness. But [...] to banish applications from mathematics would be comparable to seeking the essence of the living animal in the skeleton alone, without considering muscles, nerves and tissues, instincts, in short, the very life of the animal.
>
> (Felix Klein, *Elementary mathematics from an advanced standpoint*, 1924; Dover, New York, 2004, pp. 15-16)

1. – Matematica e platonismo: a chi serve l'argomento di indispensabilità?

Il filosofo americano W.V.O. Quine scrisse una volta (1) che il problema dell'ontologia che ha afflitto la filosofia per millenni è riassumibile in una domanda di una semplicità disarmante, "Che cosa vi è?", alla quale si può rispondere in maniera altrettanto semplice: "Tutto". Come nota Quine, tuttavia, affermare che vi è tutto ciò che vi è non è particolarmente informativo. Il vero problema è piuttosto valutare caso per caso se determinate entità esistono, e, se esistono, qual è la loro natura. Nonostante sembrino esserci pochi dubbi sul fatto che $7 + 5 = 12$, che vi sono infiniti numeri primi, che il rapporto tra il lato e la diagonale di un quadrato è uguale a $\sqrt{2}$, il problema dell'esistenza di oggetti matematici è – come si può leggere nel contributo di Matteo Plebani a questo volume – uno di quelli su cui sembra esservi meno consenso.

(1) Cfr. Quine (1948).

Le preoccupazioni metafisiche hanno spesso fatto caratterizzare la filosofia come una disciplina lontana dalla pratica e dal senso comune, e può sembrare futile dubitare dell'esistenza di oggetti matematici in un'epoca in cui le nostre teorie scientifiche fanno un uso pervasivo di matematica e in cui si arriva suggerire – come sostiene il cosmologo Max Tegmark ([2]) – che la realtà fisica esterna non sia altro che una struttura matematica. Nel caso che ci interessa, preoccupazioni sull'esistenza e la natura di oggetti matematici (preoccupazioni che vanno al di là di ciò che in certe teorie matematiche sembra legittimo dire sulla base di una data presentazione assiomatica, o di appropriate definizioni) possono sembrare estranee al mondo della matematica per come essa è praticata, per due ragioni. La prima è che qualunque risposta si dia a queste domande appare come ininfluente da un punto di vista pratico. La seconda è che il tipo di metodologia che si impiega solitamente per rispondere ad esse – fatta di argomenti squisitamente filosofici, spesso *a priori* – viene percepita come distante dalla metodologia che caratterizza la disciplina di cui ci si vuole occupare. Della prima ragione non ci occuperemo qui (un filosofo sarà probabilmente pronto a controbattere non solo che domande filosofiche possono avere una loro legittimità teorica indipendentemente dalle loro eventuali ricadute pratiche, ma anche rimandando almeno all'esempio della concezione della matematica di L. E. J. Brouwer e di come essa ha gettato le basi per la matematica costruttiva). Per quanto riguarda la seconda ragione, va invece notato che vi sono argomenti filosofici che, pur avendo come obiettivo la risposta alle stesse domande, sembrano tenere in maggiore considerazione l'evidenza che ci viene da come la matematica è di fatto praticata e, in particolare, applicata. Il cosiddetto "argomento di indispensabilità" è, almeno nelle intenzioni, di questo tipo. Ma che cos'è, perché vi si arriva, e a chi può essere più congeniale difenderlo?

Supponiamo di voler determinare se un certo tipo di entità esista o meno. Un modo di procedere può essere il seguente. Si dovrebbero prima identificare un certo numero di asserti che sembrano parlare del

([2]) Cfr. Tegmark (2008, 2014).

tipo di entità in questione. Si dovrebbe offrire una buona analisi semantica di questi asserti per determinare precisamente, attraverso una chiarificazione della loro forma logica, ciò che essi dicono. E si dovrebbero poi considerare le ragioni che ci spingono a considerarli veri. Se in base all'analisi semantica risulta inoltre che, se essi sono veri, lo sono perché esistono certi oggetti, possiamo dire di avere ragioni per credere che quegli oggetti esistono. Il modo in cui essi sono stati definiti ci dirà poi quali sono le loro condizioni di identità (o, in termini più accattivanti, la loro natura).

Ammettiamo che un ragionamento di questo tipo possa offrire una plausibilità iniziale per la tesi che questi oggetti esistono. Questa plausibilità iniziale potrebbe scontrarsi con evidenza contraria. Per esempio, la natura di questi presunti oggetti potrebbe risultare talmente aliena ai nostri processi cognitivi e conoscitivi da farci dubitare che essi possano esistere. In fondo, noi pretendiamo di rendere conto della nostra *conoscenza* di asserti matematici: e se questi sono resi veri da oggetti che ci sono inconoscibili, questa conoscenza ci è di fatto preclusa. L'evidenza semantica per la loro esistenza si scontra qui con una evidenza epistemica contraria. Come procedere?

Prendiamo un semplice esempio aritmetico ([3]). Consideriamo l'asserto "Ci sono almeno tre numeri perfetti maggiori del numero 17". Questo asserto è facilmente dimostrabile all'interno di una determinata assiomatizzazione dell'aritmetica, e costituisce un buon esempio delle conoscenze matematiche di cui vogliamo rendere conto. Una analisi semantica piuttosto naturale di questo asserto ci dirà che esso è vero solamente se esistono almeno tre oggetti che sono numeri perfetti e che stanno nella relazione "essere maggiore di" con un quarto oggetto, il numero 17. Se questa analisi semantica è corretta, questi oggetti devono esistere, e devono essere numeri.

Ma che tipo di oggetti sono i numeri? Almeno secondo una concezione, condivisa da molti filosofi e matematici (tra i quali, solo per citare alcuni nomi illustri, possiamo menzionare Alain Connes o

([3]) Cfr. Benacerraf (1973).

Godfrey H. Hardy (4)), i numeri sono oggetti astratti. La tesi secondo cui esistono oggetti matematici astratti (o, meglio, secondo cui gli assiomi e i teoremi delle nostre teorie matematiche vere vertono su un dominio di tali oggetti) va sotto il nome di "platonismo" (la tesi che nega la loro esistenza va invece sotto quello di "nominalismo"). Stabilire cosa sia un oggetto astratto è un problema spinoso, ma vi è un certo consenso nel ritenere gli oggetti astratti aspaziali, atemporali, e privi di efficacia causale. Capire come possiamo avere conoscenza di questi oggetti (o, come si dice, avere accesso epistemico ad essi) è tutt'altro che semplice. Molti pensano che semplicemente non si possa. Se è così, allora non ci è possibile conoscere ciò che rende vero l'asserto "esistono almeno tre numeri perfetti maggiori del numero 17", o qualunque altro asserto matematico. Di fronte a questo scetticismo nei confronti della conoscenza matematica ci sono alcune strade che si possono prendere.

Primo, si può pensare che la corretta analisi semantica di un asserto matematico sia diversa da quella che ci appare a prima vista, e che vada determinata attraverso una opportuna parafrasi che ne mostri la forma logica. Per esempio, un asserto come "$3 < 5$" non direbbe che vi sono due oggetti, il 3 e il 5, che stanno tra loro in una determinata relazione: potrebbe invece dire che in un determinato sistema di assiomi intesi come iscrizione concrete è possibile derivare attraverso opportune trasformazioni l'iscrizione concreta "$3 < 5$" (5); oppure potrebbe dire che in qualunque sistema di oggetti (qualunque natura essi abbiano) che soddisfa una certa struttura, determinata da un insieme di assiomi, vale che l'oggetto che occupa la posizione che indichiamo con "3" sta nella relazione che indichiamo con "$<$" con l'oggetto che occupa la posizione che indichiamo con "5" (6).

In secondo luogo, si potrebbe accettare la conclusione scettica, e rifiutare che vi sia conoscenza matematica: gli oggetti matematici non esistono, e dal momento che un asserto matematico è vero solo se essi esistono, non vi sono asserti matematici veri (se non vacuamente veri,

(4) Cfr. Changeux, Connes (1989); Hardy (1940).
(5) Cfr. Chihara (1990).
(6) Per due versioni diverse di questa idea, cfr. Hellman (1989) e Shapiro (1997).

per esempio quando hanno la forma di un condizionale con antecedente falso), e quindi non vi è affatto conoscenza matematica, o se vi è, non è conoscenza che riguardi oggetti matematici ([7]).

In terzo luogo, si potrebbe cercare di garantire la nostra conoscenza matematica grazie a una qualche facoltà mentale dedicata, una sorta di intuizione che ci permetterebbe di avere un accesso diretto agli oggetti della matematica e alle sue verità ([8]).

Infine si potrebbe sostenere, tramite argomenti *a priori*, che le nostre capacità raziocinative sono in grado di fornirci conoscenza matematica senza il bisogno di postulare alcuna facoltà dedicata ([9]).

Tutte queste opzioni hanno conseguenze importanti. La prima comporta che si rinunci a una lettura molto naturale degli asserti matematici (una lettura, fra l'altro, che rende la semantica di tali asserti uniforme con quella di molti altri asserti ordinari). La seconda opzione, che sostiene che gli asserti della matematica sono falsi, comporta non solo rinunciare alla conoscenza matematica, ma anche attribuire un errore pervasivo a chiunque (inclusi matematici e scienziati) creda alla verità di un asserto matematico. La terza postula una facoltà mentale dedicata la cui esistenza è alquanto discutibile. La quarta potrebbe non andare bene a chi ritiene che argomenti *a priori* siano inadeguati o illegittimi – per esempio perché assume una posizione empirista e ritiene che tutte le nostre conoscenze debbano in qualche modo basarsi sull'evidenza empirica, o perché in generale cerca di spiegare le nostre capacità conoscitive nel quadro delle scienze naturali.

Supponiamo di essere convinti da queste obiezioni (chi scrive non necessariamente lo è): vogliamo garantire la possibilità di conoscenza matematica, accettiamo una interpretazione naturale della semantica degli asserti matematici, non vogliamo postulare alcuna sospetta facoltà dedicata, e non accettiamo come legittimi argomenti *a priori*. Che

([7]) Cfr. Field (1980) e (1989).

([8]) Come in parte sostenuto da Kurt Gödel (1947/64) e oggi difeso da Charles Parsons (1979-80; 2008).

([9]) Per esempio secondo le linee del progetto logicista inaugurato da Gottlob Frege, oggi ripreso in una versione modificata dalla scuola neo-logicista; cf. Hale e Wright (2001).

possiamo fare allora per garantirci l'esistenza di quegli oggetti che dovrebbero rendere veri gli asserti della matematica?

Un modo potrebbe essere quello di sostenere che un qualche accesso diretto agli oggetti matematici ci è dato per via empirica. Aristotele può forse essere visto come un precursore di questa idea, anche se in tempi più recenti il principale autore di riferimento è senz'altro John Stuart Mill, che nel suo *System of Logic* (1843) proponeva di considerare le verità della matematica alla stregua di generalizzazioni induttive proprie delle scienze empiriche, e le definizioni matematiche come asserti che vertono su dati di fatto osservabili (per esempio, la definizione di un certo numero naturale affermerebbe la possibilità di scomporre una determinata collezione concreta di oggetti, per es. $^{\circ\circ\circ}$, in modi conformi alla definizione, per es. $^{\circ\circ}\ ^{\circ}$). La proposta empirista di Mill sembra però difficile da portare avanti (10) (come altrettanto difficile sembra una sua revisione su base cognitivista per un certo tempo suggerita da Penelope Maddy 1990, secondo la quale saremmo dotati di un particolare "set detector" che ci consentirebbe di avere un accesso diretto e empirico a determinati insiemi di cardinalità molto piccola).

Se non possiamo avere un accesso empirico diretto agli oggetti della matematica, però, è forse possibile ottenere, sempre per via empirica, una adeguata evidenza indiretta per la loro esistenza. Questo è lo scopo dell'argomento di indispensabilità. L'idea fondamentale alla sua base è la seguente. Supponiamo che vi siano teorie scientifiche vere, o almeno sufficientemente giustificate. Supponiamo, come non è difficile fare, che alcune di queste teorie utilizzino una certa teoria matematica, e che questo utilizzo sia indispensabile: non è possibile riformulare queste teorie scientifiche senza utilizzare questa determinata teoria matematica. Possiamo pensare che se queste teorie scientifiche sono vere (o sufficientemente giustificate), lo sarà anche la teoria matematica che non possiamo non utilizzare nella loro formulazione. Se supponiamo che gli asserti di questa teoria siano veri solo se esistono gli oggetti matematici

(10) Sebbene possa servire di ispirazione per posizioni più elaborate, come quella avanzata da Philip Kitcher (1983).

di cui essa parla (secondo l'analisi semantica appropriata che ne avremo dato), allora potremo concludere che essi esistono (o che siamo sufficientemente giustificati a ritenere che esistano). L'argomento di indispensabilità, se corretto, ha come conclusione che il platonismo è vero.

A differenza di altri argomenti, la sua forza si deve al fatto che le premesse da cui parte sono apparentemente accettabili sia da un platonista che da un nominalista, compreso quel particolare tipo di nominalista che vuole basare le nostre conoscenze interamente sull'evidenza empirica. Che vi siano teorie scientifiche che impiegano teorie matematiche è un dato di fatto empiricamente verificabile che sarebbe assurdo negare. Che queste teorie matematiche siano indispensabili alla formulazione di teorie scientifiche sembra poter essere determinato su basi altrettanto empiriche, sulla base della possibilità effettiva o meno di riscrivere queste teorie senza utilizzare matematica in maniera tale che esse mantengano determinate proprietà (potere espressivo, capacità predittiva, potere esplicativo, ecc.) ([11]). A partire da premesse disponibili tanto a un nominalista quanto a un empirista abbiamo concluso che esistono oggetti astratti, aggirando il problema dell'accesso epistemico diretto, preservando una adeguata analisi semantica degli asserti matematici, e salvando la possibilità della conoscenza matematica attraverso un argomento che si preoccupa di considerare come di fatto la matematica venga applicata nelle scienze empiriche. Un situazione che molti riterrebbero ideale.

2. – L'indispensabilità si dice in molti modi

Dietro alla semplice idea appena abbozzata si nasconde però una serie complessa di nodi teorici. Lo testimonia la varietà di argomenti

([11]) Per rigettare l'argomento di indispensabilità, per esempio, Hartry Field (1980) cerca di mostrare come sia possibile riformulare la teoria della gravitazione newtoniana senza utilizzare numeri reali, e impiegando invece solamente un linguaggio in cui termini per proprietà e relazioni sono definiti su punti (e regioni) dello spazio-tempo, che Field considera come oggetti concreti. In un altro contesto, si può considerare il progetto di riformulazione della teoria della relatività nel linguaggio della teoria degli insiemi ZF al primo ordine portato avanti da Andréka, Madarász e Németi (2002) come tentativo di mostrare la dispensabilità di una particolare teoria matematica in favore di un'altra.

che vengono fatti ricadere sotto la stessa categoria come argomenti di indispensabilità. Vediamone i più noti.

2.1 – *Le teorie e il loro potere espressivo*

L'idea di fondo dell'argomento si trova suggerita in vari passi di Quine, ma la sua prima formulazione esplicita si deve a Hilary Putnam:

> PUTNAM A.I.
> [L]a quantificazione su entità matematiche è indispensabile per la scienza [...]; quindi dobbiamo accettare tale quantificazione; ma questo ci impone l'accettazione dell'esistenza delle entità matematiche in questione. (12)

Il ruolo della quantificazione rimanda alla corretta analisi semantica degli asserti in questione. Era idea di Quine (poi adottata da molti) che per determinare ciò di cui una teoria parla, o meglio ciò che essa dice che esiste (il cosiddetto "impegno ontologico" di una teoria), si dovesse riformulare la teoria in un linguaggio del primo ordine (con identità), tramite opportune definizioni che individuino un vocabolario di base attraverso il quale tutte le nozioni della teoria possano essere definite, per andare poi a vedere quali (tipi di) oggetti debbano esistere affinché risultino veri gli asserti esistenziali correttamente deducibili all'interno della teoria. Possiamo allora precisare l'argomento di Putnam come segue: l'indispensabilità di una teoria matematica M per la formulazione di una teoria scientifica T vera (o confermata) è condizione sufficiente per la verità di M; in M vi sono opportuni asserti quantificati tali che è una condizione necessaria per la loro verità che le variabili vincolate che occorrono in essi prendano oggetti matematici come valori; ne segue che è una condizione necessaria per la verità di T che esistano gli oggetti matematici su cui tali asserti quantificano. Questo argomento si basa sostanzialmente su due ingredienti: un determinato criterio per determinare l'impegno ontologico di una teoria, e una appropriata nozione di indispensabilità. Affinché esso funzioni è inol-

(12) Putnam 1971, p. 347.

tre necessario non solamente che vi siano teorie matematiche indispensabili per certe teorie scientifiche; è anche necessario sostenere una qualche forma di realismo scientifico ([13]), secondo cui vi sono teorie scientifiche vere, o adeguatamente giustificate (e che, possibilmente, alcune di queste teorie scientifiche vere corrispondano a teorie scientifiche mature e sufficientemente confermate).

2.2 – *L'indispensabilità nella ragnatela di Quine*

Entrambe queste tesi vengono condivise sia da Putnam che da Quine. L'argomento di indispensabilità è però talmente congeniale alla filosofia di Quine che altre due tesi sostenute dal filosofo americano sono a volte ritenute assunzioni essenziali dell'argomento: il naturalismo e l'olismo della conferma. Su entrambe queste tesi si può dibattere a lungo, ma le possiamo riassumere brevemente come segue.

Il naturalismo consiste, nello slogan di Quine (1981, p. 72), nell'abbandono dell'idea che vi sia una "filosofia prima", un punto di vista esterno e superiore all'impresa scientifica da cui giudicarla e giustificarla. Qui possiamo intendere il naturalismo come la tesi secondo cui l'unica fonte legittima su cui basare le nostre conoscenze (tanto che riguardino il mondo empirico, quanto che riguardino oggetti astratti) sono le scienze empiriche, o al massimo teorie che in esse ricorrono in maniera indispensabile.

L'olismo della conferma è una tesi (già suggerita da Pierre Duhem 1906) a proposito del modo in cui l'evidenza empirica conferma una teoria scientifica. Con le parole di Quine (1951, p. 59), la tesi è che "i nostri asserti sul mondo esterno affrontano il tribunale dell'esperienza non individualmente ma come un corpo unitario". Supponiamo di testare sperimentalmente una certa ipotesi H di una teoria T. Supponiamo che un test sperimentale confermi l'ipotesi H. Secondo l'olista, il test non conferma H in isolamento, ma assieme a un corpo molto più ampio di ipotesi (tutte quelle che costituiscono la teoria T,

([13]) Per una introduzione, cfr. Psillos (1999).

così come quelle che riguardano l'affidabilità delle nostre capacità cognitive e degli apparati strumentali utilizzati, ecc.). Se T impiega indispensabilmente (cioè contiene come sua parte gli assiomi e i teoremi di) una teoria matematica M, allora l'esperimento conferma anche M (e, assumendo un qualche criterio di impegno ontologico, conferma la credenza nell'esistenza degli oggetti di M).

Uno dei principali sostenitori dell'argomento di indispensabilità, Mark Colyvan, ritiene che queste tesi siano assunzioni importanti per l'argomento, almeno nella formulazione che egli ne dà (cfr. Colyvan 2001, p. 11):

COLYVAN A.I.

(i) Dovremmo ritenerci ontologicamente impegnati verso tutte e sole quelle entità che sono indispensabili per le nostre migliori teorie scientifiche.
(ii) Le entità matematiche sono indispensabili per le nostre migliori teorie scientifiche.

(iii) Dovremmo ritenerci ontologicamente impegnati verso entità matematiche.

Secondo Colyvan, il naturalismo dovrebbe servire per sostenere la direzione del "sole" nella prima premessa, mentre l'olismo della conferma dovrebbe servire a sostenere la direzione del "tutte". L'idea, intuitivamente, è la seguente. Il naturalismo ci vieta di trarre conseguenze ontologiche da argomenti *a priori*, e limita invece la possibilità di trarre queste conseguenze alla disponibilità di argomenti che si basano in qualche modo sulla formulazione o l'efficacia di scienze empiriche: solo delle entità che sono indispensabili alle scienze empiriche (vere, o almeno sufficientemente confermate) è legittimo sostenere che esistano. Questo comporta che, rispetto all'argomento di Putnam, quello di Colyvan intende fornire non solo una condizione sufficiente per il platonismo, ma anche una condizione necessaria: è necessario, affinché si possa dire che certi oggetti matematici esistono, che essi siano gli oggetti di una teoria matematica indispensabilmente impiegata in una teoria scientifica vera (o adeguatamente giustificata).

D'altra parte, si potrebbe sostenere che anche se siamo legittimati a ritenere che esistano alcune delle entità di cui parlano le scienze empiriche (per esempio solo quelle concrete e osservabili come i corpi fisici, o anche le entità teoriche non osservabili – almeno tramite l'osservazione diretta – come neutrini, super-stringhe, ecc.), potremmo rifiutarci di accettare l'esistenza di altre entità: per esempio degli oggetti della matematica. L'olismo servirebbe a vietare questa mossa, e a impegnarci all'esistenza di tutte le entità su cui verte una teoria scientifica (tramite una appropriata analisi semantica dei suoi asserti, inclusi quelli che impiegano matematica).

2.3 – *Le assunzioni indispensabili dell'argomento di indispensabilità*

Al di là di questa idea intuitiva, non è affatto scontato che per raggiungere una conclusione platonista attraverso un argomento che si basa sull'indispensabilità sia necessario adottare queste tesi. Il seguente argomento (che è di fatto uno schema di argomenti esemplificabile con particolari teorie scientifiche e matematiche) suggerisce che non sia così (cfr. Panza e Sereni 2013, cap. 6):

A.I. MINIMALE
(i) Vi sono teorie scientifiche vere [T è una teoria scientifica vera].
(ii) Fra queste, alcune sono tali da ricorrere a teorie matematiche in modo indispensabile [T ricorre a M in modo indispensabile].
(iii) Queste teorie scientifiche sono vere solo se lo sono tali teorie matematiche [T è vera solo se lo è M].

(iv) Queste teorie matematiche sono vere.
(v) Una teoria matematica è vera solo se esistono i suoi oggetti matematici [M è vera solo se esistono gli oggetti di M].

(vi) Esistono gli oggetti delle teorie matematiche menzionate in (ii) e (iii) [gli oggetti di M esistono].

Questa versione dell'argomento dovrebbe servire a fare chiarezza su alcuni punti.

In primo luogo, anche se una qualche forma di realismo scientifico è anche in questo caso necessaria per difendere la premessa (i), l'argomento non fa leva sul naturalismo. Da nessuna parte è detto che le sole entità che siamo legittimati a ritenere esistenti (o i soli asserti che siamo legittimati a ritenere veri) siano quelle (quelli) su cui vertono (di cui sono costituite) le scienze empiriche.

In secondo luogo, anche l'olismo della conferma non sembra giocare alcun ruolo: la premessa (iii) non ha bisogno, per essere difesa, di una tesi così forte. Tanto più che l'olismo è, appunto, una tesi sulla conferma empirica, e il ruolo della conferma empirica non è affatto chiaro in un argomento di questo tipo. Non è affatto chiaro come la conferma di una teoria possa implicare (se lo può affatto) la sua verità. Se anche modificassimo l'argomento, indebolendolo attraverso l'uso di nozioni epistemiche, per esempio riformulando le premesse in maniera che non dicano che ci sono teorie (matematiche o scientifiche) vere, ma solo che siamo giustificati a ritenerle tali, il ruolo della conferma non sarebbe ancora chiaro: anche se fosse vero che siamo giustificati a ritenere vera una teoria matematica solamente se essa è usata indispensabilmente in una teoria scientifica che siamo giustificati a ritenere vera, resta il fatto che (*a*) una teoria scientifica è solitamente giustificata anche sulla base di criteri che poco hanno a che vedere con la conferma empirica (semplicità, parsimonia ontologica, capacità unificatrice, fruttuosità, ecc.), e (*b*) la tesi espressa nella premessa (iii) è ben più debole di quanto richiede l'olismo della conferma, secondo cui la conferma è trasferita non solamente a una determinata teoria, ma all'intera rete delle nostre credenze. Come ha sottolineato Penelope Maddy (1992) l'olismo della conferma sembra poi essere in conflitto con la pratica scientifica, nella quale è comune parlare di teorie come vere o giustificate anche quando vi siano idealizzazioni esplicitamente false e riconosciute tali (la continuità o l'infinità di un liquido in fluidodinamica ([14]), o l'assenza di attrito in meccanica, ecc.). Da ultimo, si può ritenere che una condizione affinché una teoria possa essere confermata è che essa possa anche, almeno in linea di principio, essere disconfermata, e che la matematica sia invece in un certo senso isolata rispetto alla conferma e alla disconferma, come ha per esempio so-

([14]) Per un esempio del secondo caso, cfr. Pincock (2012, p. 100).

stenuto Eliot Sober (1993). È facile citare in questo contesto il caso della geometria euclidea. Il fatto che con l'avvento della teoria della relatività le nostre migliori teorie fisiche abbiano abbandonato la geometria euclidea non ha comportato una disconferma di questa teoria. Certo, si è cessato di credere che la geometria euclidea sia letteralmente vera dello spazio fisico (per quanto ne dia una approssimazione adeguata in molti contesti), ma lo statuto di tale geometria in quanto teoria matematica non è stato messo in discussione. In generale, la disconferma di una teoria scientifica che usa in maniera indispensabile una teoria matematica non comporta la disconferma di quest'ultima (si parla in questi casi di "*Euclidean rescue*"). In generale, dunque, non è chiaro come la conferma empirica possa essere rilevante per teorie matematiche, né tanto meno come una concezione olista della conferma possa essere rilevante o necessaria per l'argomento di indispensabilità.

Un terzo aspetto messo in luce dall'argomento minimale è che l'apparente generalità delle premesse e della conclusione delle versioni comuni dell'argomento può essere uno specchietto per le allodole. Di fatto, affinché si possa sostenere di avere una conclusione platonista, è necessario considerare un caso particolare di teoria scientifica e un caso particolare di teoria matematica. La considerazione in cui i sostenitori dell'argomento sembrano tenere le applicazioni specifiche della matematica alle scienze empiriche cade nel vuoto se non si considerano casi particolari di applicazioni (e non è detto che, una volta fatte le dovute specificazioni, vi siano istanze corrette dell'argomento ([15])).

Infine, un altro aspetto che emerge da questa formulazione dell'argomento è che l'argomento di indispensabilità può essere usato per sostenere una tesi più debole del platonismo, che chiameremo qui "realismo semantico", e che è espressa nella conclusione parziale (iv): la tesi cioè che gli asserti della matematica (o di una particolare teoria matematica considerata) siano veri (indipendentemente da ciò che li rende veri). Questo aspetto può essere particolarmente rilevante per la seguente ragione. Prendiamo l'argomento di

([15]) Cfr. Panza e Sereni (di prossima pubblicazione).

Colyvan. Esso si basa sulla premessa che vi siano determinate applicazioni indispensabili della matematica. Per concludere da questo (assieme alle altre premesse) che esistono determinati oggetti matematici, sembra necessario assumere che affinché una teoria matematica sia applicabile, i suoi oggetti debbano esistere. Questa era anche l'idea di Putnam (1971). Per esempio, una misurazione consisterebbe nel determinare che esiste una particolare relazione tra una certa grandezza fisica e un determinato oggetto astratto, nello specifico un numero reale. Ma questa concezione dell'applicabilità della matematica non è l'unica possibile (sul problema dell'applicabilità si veda il contributo di Daniele Molinini e Marco Panza in questo volume). Si può per esempio sostenere, come ha sostenuto Chris Pincock (2004, 2012) – in consonanza con la teoria standard della misura canonizzata da Luce, Krantz, Suppes e Tversky (1971-1990), e con l'impiego di teoremi di rappresentazione nelle scienze empiriche – che molte applicazioni procedono attraverso l'istituzione di particolari morfismi (o *mappings*) tra sistemi fisici e modelli matematici. Se non si concepiscono questi modelli come sistemi di oggetti astratti esistenti (anche se questa concezione va comunque argomentata e difesa), allora da queste applicazioni della matematica, anche se indispensabili, non segue l'impegno all'esistenza di oggetti matematici. Questo non implica necessariamente che gli asserti della matematica non possano essere veri. Al contrario, l'argomento di indispensabilità potrebbe servire a supportare una tesi di realismo semantico su di essi, senza però che da questa si possa o si debba derivare una tesi platonista.

2.4 – *Matematica, cicale e alveari*

Abbiamo finora dato per scontato che sia chiaro che cosa si intende per indispensabilità. Quello che abbiamo implicitamente assunto – quello che molti sostenitori o detrattori dell'argomento hanno assunto in varie occasioni – è che si possa parlare di indispensabilità sostanzialmente in due sensi (cfr. Field 1980). Da una parte la matematica può essere *teoricamente* indispensabile: essa può essere cioè indispensabile per formulare le leggi fondamentali di una determinata teoria scientifica (per esempio, l'analisi reale può essere indispensabile per formulate le leggi della meccanica classica). Altrimenti, essa può essere *deduttivamente* indispensabile, indispensabile cioè a trarre da tali leggi quelle conseguenze che riteniamo essere le predizioni della teoria. Vi è però un terzo senso in cui la matematica può essere indispensabile. Oltre che a garantire il potere espressivo e il potere deduttivo o predittivo di una teoria scientifica, essa può essere *esplicativamente* indispensabile, indispensabile cioè a garantirne il potere esplicativo. Sulla scorta di questa idea, Alan Baker ([16]) ha sostenuto che l'argomento di Colyvan dovrebbe essere opportunamente migliorato come segue:

BAKER A.I.

(i) Dovremmo credere razionalmente nell'esistenza di qualunque entità svolga un ruolo esplicativo indispensabile nelle nostre migliori teorie scientifiche.
(ii) Gli oggetti matematici svolgono un ruolo esplicativamente indispensabile nella scienza.

(iii) Dovremmo credere razionalmente nell'esistenza di oggetti matematici.

Questo argomento ha il pregio di tenere nella giusta considerazione il ruolo che la matematica svolge nel partecipare alle spiegazioni fornite dalle teorie scientifiche. Ma solleva allo stesso tempo un problema enorme. Esso si basa infatti sull'idea che vi siano spiegazioni genuinamente matematiche di fenomeni empirici. Non quindi semplicemente spiegazioni scientifiche la cui maneggiabilità, o comunicabilità, o semplicità, dipendono dall'impiego di un opportuno armamentario matematico; ma spiegazioni che si possono fornire solamente perché vi è un fatto genuinamente matematico che spiega un fenomeno empirico. Gli esempi che vengono forniti possono essere di vario genere. Essi si collegano al più ampio problema sulla

([16]) Cfr. Baker (2005, 2009); si veda anche Field (1989, Introduction).

spiegazione matematica e hanno dato luogo a un vasto dibattito ([17]). Possiamo sintetizzare i due più discussi.

Magicicada (cfr. Baker 2009, p. 614): come mai una particolare sotto-specie di cicala diffusa nel Nord America ha un ciclo vitale di 13 e 17 anni? La spiegazione comporta due fatti empirici (biologici), e cioè (a) che l'avere un ciclo di vita che minimizza l'intersezione con altri periodi di vita di altri predatori e di sottospecie aventi cicli vitali simili è evoluzionisticamente vantaggioso, e (b) che quelle particolari cicale hanno un vincolo biologico dovuto all'ecosistema di appartenenza che limita i loro possibili cicli di vita a un determinato *range* di anni. A questo si aggiunge un fatto puramente matematico, e cioè che (dato il particolare *range* ammesso di anni), 13 e 17 in quanto periodi primi di vita minimizzano l'intersezione con altri cicli di vita rispetto a possibili periodi non primi.

Teorema dell'alveare (Lyon and Colyvan 2008, p. 230): perché gli alveari sono strutturati in sezioni esagonali? Vi è una parte biologica della spiegazione: la selezione naturale favorisce api che minimizzano la quantità di cera necessaria a costruire un alveare. Vi è poi un fatto matematico, la cosiddetta *honeycomb conjecture* (dimostrata da Hales 2001): una griglia esagonale fornisce il modo migliore per dividere una superficie in regioni di area uguale con il minor perimetro totale.

Che questi (o altri simili) siano casi genuini di spiegazione matematica di fatti empirici è oggetto di dibattito.

Affinché lo siano, bisogna per esempio scartare l'ipotesi che ciò che realmente spiega i fenomeni in questione (i cicli di vita delle cicale e la struttura esagonale degli alveari) sono altri fatti puramente empirici (che le cicale nascono e muoiono in un determinato periodo che non si interseca con quello dei predatori; che l'alveare è fatto come è fatto perché questo consente un risparmio di cera) che possiamo però più perspicuamente (e in alcuni casi forse solamente, visti i nostri limiti rappresentazionali) descrivere con l'ausilio di una teoria matematica. Gli autori che presentano gli esempi sembrano semplicemente assumere che

([17]) Su questo si possono vedere gli articoli in Molinini, Pataut e Sereni (di prossima pubblicazione). Sulla spiegazione matematica, si veda anche Molinini (2014).

le spiegazioni possano essere divise in una parte empirica e in una parte matematica, ma questo è discutibile. Per esempio, si potrebbe sostenere che la matematica impiegata negli esempi serve a rappresentare adeguatamente un certo fenomeno, e che da tale rappresentazione noi inferiamo il fenomeno fisico che costituisce il vero *explanans* del nostro *explanandum* (cfr. Saatsi 2011). A queste difficoltà si deve aggiungere che è la nozione stessa di spiegazione che dovrebbe essere preventivamente chiarita. Alcune teorie della spiegazione, per esempio, richiedono che una spiegazione consista nell'individuazione di cause (cfr. per esempio Salmon 1984). Se questa è la nostra teoria della spiegazione, è difficile immaginare come fatti costituiti da oggetti astratti possano mai entrare in connessione causale con fatti empirici. Inoltre, questa formulazione dell'argomento richiede che la spiegazione alla quale esso si applica sia considerata la migliore spiegazione di un determinato fenomeno. La sua bontà resta allora ostaggio di una risoluzione dell'annoso problema della validità della spiegazione all'inferenza migliore come forma legittima di ragionamento (cfr. Lipton 2002): come non è affatto detto che sia legittimo inferire l'esistenza di entità teoriche della fisica da quella che riteniamo essere la miglior spiegazione di un fenomeno (per esempio, come sostiene Van Fraassen 1980, perché siamo giustificati a ritenere vere solo quelle parti della teoria che riguardano il comportamento di entità osservabili), così non è detto che si possa affermare l'esistenza di entità astratte sulla base dello stesso tipo di inferenza. A un livello ancora più generale di difficoltà, va considerato che non è chiaro che la nozione di spiegazione possa supportare il tipo di conclusioni ontologiche che l'argomento di indispensabilità richiede. Ciò che rende buona una spiegazione può dipendere da molti fattori (per esempio la semplicità, la perspicuità, il richiamo a principi familiari, ecc.), anche di natura psicologica, che non necessariamente hanno a che vedere con la verità letterale degli asserti che costituiscono la spiegazione.

2.5 – *Ma che cos'è l'indispensabilità?*

Quello che però l'argomento di Baker può aiutare a mettere in luce (cfr. Panza e Sereni 2013, § 6.3) è che la nozione di indispensabilità è di natura relazionale. Non ha senso dire di una teoria matematica che è indispensabile *tout court* a una teoria scientifica, ma solo relativamente a certi particolari criteri.

Supponiamo di voler considerare se una teoria matematica M sia dispensabile o indispensabile per una teoria scientifica T. La prima cosa da fare è cercare di capire se esiste una riformulazione della teoria T in una teoria T* che sia priva di asserti formulati con l'ausilio di M. Questa condizione, però, ovviamente non è sufficiente. La teoria T* potrebbe semplicemente non essere adeguata; per esempio potrebbe non dire esattamente le stesse cose, o potrebbe essere più limitata nella sua capacità di prevedere fenomeni osservabili, o potrebbe risultare incapace di offrire una spiegazione altrettanto buona di una classe di fenomeni. La nostra teoria iniziale T avrà così certe proprietà che vogliamo preservare: per esempio, potere espressivo, capacità predittiva, potere esplicativo, ecc. Per valutare se davvero M è dispensabile da T, la teoria T* dovrà essere equivalente a T rispetto a uno o l'altro (o tutti) questi criteri. Sarà allora fondamentale stabilire una certa relazione di equivalenza rispetto alla quale valutare T*.

Strettamente parlando, in alcuni casi anche questo potrebbe non bastare, per ragioni formali che hanno a che vedere con il modo in cui possiamo riformulare la nostra teoria T. Supponiamo per esempio di voler ottenere T* in maniera tale che sia empiricamente equivalente a T, cioè equivalente a T rispetto alla possibilità di derivare le stesse conseguenze relative al mondo osservabile. Vi sono strumenti formali per ottenere un risultato simile. Per esempio, il teorema di Craig (1956) stabilisce che data una teoria ricorsivamente assiomatizzabile T, e una partizione del suo vocabolario in un sotto-vocabolario osservativo, *o*, e un sotto-vocabolario teorico, *t*, esiste una teoria ricorsivamente assiomatizzabile T*, il cui unico vocabolario non logico è *o*, che include tutte e sole le conseguenze di T esprimibili in *o*. Dal momento che il teorema non dipende in maniera essenziale dalle caratteristiche dei sotto-vocabolari *t* e *o*, esso comporta anche che è sempre possibile prendere una teoria scientifica (ricorsivamente assiomatizzabile), dividere il suo vocabolario in un sotto-vocabolario matematico e in uno non-matematico, e ottenere una teoria T* che sia priva di vocabolario matematico ma abbia le stesse conseguenze formulabili nel solo vocabolario non-matematico che aveva la teoria di partenza. La teoria risultante rende M dispensabile, ma date le sue proprietà formali, implicate dal teorema, è tuttavia poco interessante da un punto di vista filosofico. Per escludere espedienti formali di questo tipo, bisogna quindi richiedere che la teoria T* che dovrebbe risultare dall'eliminazione di una teoria matematica sia in questo senso sufficientemente interessante, o appropriatamente virtuosa.

Se dunque abbiamo una teoria scientifica T e una teoria matematica M, e non è possibile ottenere una teoria T*, priva di asserti di M, che sia equivalente a T rispetto a una appropriata relazione di equivalenza *e*, e che sia almeno altrettanto virtuosa di T secondo un appropriato criterio di virtuosità, potremo dire che M è indispensabile a T.

3. – Indispensabilità e autonomia della matematica

David Hilbert riteneva che il "criterio della verità e dell'esistenza" in matematica fosse dato dalla consistenza di una teoria ([18]). Molti filosofi riterrebbero questo criterio troppo debole. O almeno, riterrebbero che se la consistenza di una teoria implica una qualche sorta di verità dei suoi asserti e di esistenza dei suoi oggetti, queste sono ben lontane da ciò che intendiamo con "verità" e "esistenza" quando ci preoccupiamo di problemi ontologici. Un criterio come questo sembra offrire un'evidenza eccessivamente arbitraria e esclusivamente intrateorica perché possa supportare versioni sostanziali di realismo semantico e di platonismo ([19]): se alla domanda "Che cosa vi è?" vogliamo davvero poter rispondere "Tutto", questo criterio non aiuta a capire se gli oggetti della matematica sono compresi o meno dalla risposta. Potremmo allora richiedere che vi siano (anche) ragioni esterne alla matematica che ci forniscano un appropriato criterio di verità e esistenza per la matematica.

([18]) Lettera di Hilbert a Frege, 29 dicembre 1899 (cfr. Frege 1976, trad. it. p. 51): «se assiomi arbitrariamente stabiliti non sono in contraddizione, con tutte le loro conseguenze, allora essi sono veri, allora esistono gli enti definiti per mezzo di quegli assiomi. Questo è per me il criterio della verità e dell'esistenza».

([19]) Questo non vale per tutti, nemmeno oggi. Balaguer (1998) sostiene una forma di "*platitudinous platonism*" secondo il quale esistono appunto tutti gli oggetti di teorie consistenti.

L'argomento di indispensabilità potrebbe per alcuni fornire il criterio cercato. Come abbiamo ricordato prima, per esempio, Quine e Colyvan sostengono che l'argomento di indispensabilità fornisce condizioni necessarie per le sue conclusioni. Ne segue che solo di quelle teorie che trovano di fatto applicazioni nelle scienze naturali si potrebbe parlare in termini di verità; e solo dei loro oggetti si potrebbe riconoscere l'esistenza. Se l'indispensabilità fosse il criterio di verità ed esistenza in matematica, tuttavia, come dovremmo trattare quella enorme mole di teorie che non trovano applicazioni empiriche?

Quine accettava che di queste teorie non si potesse parlare in termini di verità ed esistenza. Riteneva che esse fossero solo "ricreativi matematici" e che i loro oggetti fossero "privi di diritti ontologici" (cfr. Quine 1986, p. 400). Molti non accetterebbero una posizione così radicale. Non sembrano infatti esserci differenze, nel comportamento linguistico, nella forma logica dei nostri asserti, o nell'atteggiamento con il quale li proferiamo, tra un semplice asserto aritmetico e un asserto sui grandi cardinali.

Ora, è vero che l'argomento minimale presentato sopra sfugge a questa conseguenza (dal momento che offre solo condizioni sufficienti, e non necessarie, per le sue conclusioni). Ma resta il fatto che l'argomento di indispensabilità, in tutte le sue versioni, punta in una certa direzione: le ragioni che adottiamo per determinare verità e esistenza in matematica non hanno a che vedere strettamente con la matematica – con la sua struttura interna, con il suo sviluppo storico, con la sua metodologia intrinseca – ma piuttosto con le scienze empiriche, la loro metodologia, e i loro criteri di adeguatezza. In questa cornice filosofica, la matematica diventa un'ancella della scienza, e demanda ad essa la giustificazione di cui necessita.

Come autori quali Penelope Maddy e John Burgess hanno notato, questo eccesso di deferenza nei confronti delle scienze empiriche non sembra adeguato a rendere conto delle nostre conoscenze matematiche. Non si tratta qui solo di ricordarsi, come fa Maddy (2007, § 4.3; 2008) a partire per esempio dal caso della teoria dei gruppi, quanto è comune che una teoria matematica venga elaborata senza che si abbiano particolari applicazioni in mente. Si tratta piuttosto di ammettere che una corretta analisi filosofica della matematica dovrebbe riconoscere alla disciplina una autonomia metodologica che non può e non dovrebbe essere ridotta a quella delle scienze empiriche.

Sembra così di trovarsi di fronte a una scomoda alternativa. Da una parte si possono avanzare criteri puramente intrateorici che caratterizzano una buona teoria matematica e che sembrano però, per ragioni squisitamente filosofiche, inadeguati a rendere conto della nostra conoscenza matematica. Dall'altra parte vi è un discutibile atteggiamento iper-naturalista che lascia interamente alle scienze empiriche l'ultima parola sulla verità e l'esistenza in matematica. Se l'argomento di indispensabilità ha il merito di connettere problemi filosofici e pratica matematica, esso ha anche lo svantaggio di mettere in secondo piano le ragioni e la metodologia intrinseca della matematica stessa. Senza contare che questo atteggiamento rischia di attribuire alle verità della matematica quella stessa contingenza che hanno le teorie scientifiche, intese come prodotti storicamente determinati dell'attività umana: si rischia così di perdere quel carattere di necessità della matematica che ha fatto più volte e a gradi diversi – e, molto probabilmente, a ragione – avvicinare la certezza della matematica a quella della logica.

Uno dei compiti principali della filosofia della matematica contemporanea è allora quello di trovare una giusta integrazione: rispondere ai problemi filosofici che la matematica solleva – riguardo alla sua verità, ai suoi oggetti, ma anche e più in generale ai suoi fondamenti – in una maniera che sia allo stesso tempo filosoficamente soddisfacente e attenta alle dinamiche interne della disciplina di cui si occupa. Solo in questo modo, nello spirito delle parole di Felix Klein riportate in epigrafe, potremmo spiegare l'essenza della matematica tanto attraverso il suo scheletro, quanto attraverso i suoi muscoli e i suoi nervi.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

ANDRÉKA, H., MADARÁSZ, J. X. e NÉMETI, I. (2002), *On the logical structure of relativity theories*, Alfréd Rényi Institute of Mathematics, Budapest (con contributi di A. Andai, G. Sági, I. Sain e Cs. Toke).

BAKER, A. (2005), 'Are there Genuine Mathematical Explanations of Physical Phenomena?', *Mind*, vol. 114, pp. 223-38.

BAKER, A. (2009), 'Mathematical Explanation in Science', *The British Journal for the Philosophy of Science*, vol. 60, pp. 611-33.

BALAGUER, M. (1998), *Platonism and anti-Platonism in mathematics*, Oxford University Press, Oxford e New York.

BENACERRAF, P. (1973), 'Mathematical truth', *Journal of Philosophy*, vol. 70, pp. 661-79 (anche in Benacerraf e Putnam, 1964, pp. 403-20).

BENACERRAF, P. e PUTNAM, H. (1964), *Philosophy of mathematics. Selected readings*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs (NJ) (2ª ed. Cambridge University Press, Cambridge 1983).

CHANGEUX, J.-P. e CONNES, A. (1989), *Matière à pensée*, Odile Jacob, Paris (trad. it. *Pensiero e materia*, Bollati Boringhieri, Torino 1991).

CHIHARA, C. (1990), *Constructibility and mathematical existence*, Clarendon Press, Oxford.

COLYVAN, M. (2001), *The indispensability of mathematics*, Oxford University Press, Oxford e New York.

CRAIG, W. (1956) 'Replacement of auxiliary expressions', *Philosophical Review*, vol. 65, pp. 38-55.

DUHEM, P. (1906), *La théorie physique. Son objet, sa structure*, Chevalier & Rivière, Paris; 12ª ed. Marcel Rivière et C.ie, Paris 1914 (trad. it. *La teoria fisica*, il Mulino, Bologna 1978).

DUMMETT, M. (1991), *Frege: Philosophy of mathematics*, Harvard University Press, Cambridge (MA).

FIELD, H. (1980), *Science without numbers*, Blackwell, Oxford.

FIELD, H. (1989), *Realism, mathematics and modality*, Blackwell, Oxford.

FREGE, G. (1884), *Die Grundlagen der Arithmetik: Eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*, Koebner, Breslau (trad. it. *I fondamenti dell'aritmetica. Un'indagine logico-matematica sul concetto di numero*, in G. Frege, *Logica e aritmetica*, a cura di C. Mangione, Boringhieri, Torino 1965, pp. 207-349; nuova trad. in preparazione in G. Frege, *Pensiero, logica e linguaggio*, a cura di C. Penco, E. Picardi, Laterza, Roma-Bari, in corso di stampa).

FREGE, G. (1893-1903), *Grundgesetze der Arithmetik*, 2 voll., Pohle, Jena (trad. it. parziale, *I principi dell'aritmetica*, in G. Frege, *Logica e aritmetica*, a cura di C. Mangione, Boringhieri, Torino 1965).

FREGE, G. (1976), *Wissenschaftlicher Briefwechsel*, Felix Meiner, Hamburg (trad. it. *Alle origini della nuova logica*, Boringhieri, Torino 1983).

GÖDEL, K. (1947/64), 'What is Cantor's continuum problem?', *The American Mathematical Monthly*, vol. 54, pp. 515-25 (trad. it. in K. Gödel, *Opere*, vol. II, Bollati Boringhieri, Torino, 2002, pp. 180-92); versione modificata ed ampliata in Benacerraf e Putnam, 1964, pp. 470-85 (trad. it. in K. Gödel, *Opere*, Vol. II, op. cit., pp. 252-67).

HALE, B. e WRIGHT, C. (2001), *The reason's proper study. Essays towards a neo-Fregean philosophy of mathematics*, Clarendon Press, Oxford.

HALES, T. C. (2001), 'The Honeycomb Conjecture', *Discrete and Computational Geometry,* vol. 25, pp. 1-22.

HARDY, T. (1940), *A mathematician's apology*, Cambridge University Press, Cambridge (trad. it. *Apologia di un matematico*, Garzanti, Milano 2002).

HELLMAN, G. (1989), *Mathematics without numbers*, Oxford University Press, Oxford e New York.

KITCHER, P. (1983), *The nature of mathematical knowledge*, Oxford University Press, Oxford e New York.

LIPTON, P. (2002), *Inference to the best explanation*, Routledge, London e New York; 2ª ed. (ed. or. 1991).

LYON, A. e COLYVAN, M. (2008), 'The explanatory power of phase spaces', *Philosophia Mathematica*, vol. 16, pp. 227-43

MADDY, P. (1990), *Realism in mathematics*, Oxford University Press, Oxford e New York.

MADDY, P. (1992), 'Indispensability and practice', *Journal of Philosophy*, vol. 89, pp. 275-89.

MADDY, P. (2007), *Second philosophy*, Oxford University Press, Oxford e New York.

MADDY, P. (2008,) 'How applied mathematics became pure', *The Review Of Symbolic Logic*, vol. 1, pp. 16–40.

MILL, J. S. (1843), *A System of logic, ratiocinative and inductive*, Longmans, London (trad. it. *Sistemi di logica deduttiva e induttiva*, UTET, Torino 1996).

MOLININI, D. (2014), *La spiegazione matematica*, Carocci, Roma.

MOLININI, D., PATAUT, F. e SERENI, A. (a cura di) (di prossima pubblicazione), *Indispensability and explanation*, numero speciale di *Synthese*.

PANZA, M. e SERENI, A. (2013), *Plato's problem. An historical introduction to the philosophy of mathematics*, Palgrave Macmillan, Basingstoke, 2013 (ed. orig. *Il problema di Platone. Un'introduzione storica alla filosofia della matematica*, Carocci, Roma, 2010).

PANZA, M. e SERENI, A. (di prossima pubblicazione), 'The variety of indispensability arguments'.

PARSONS, C. (1979-80), 'Mathematical intuition', *Proceedings of the Aristotelian Society*, vol. 80, pp. 145-68.

PARSONS, C. (2008), *Mathematical thought and its objects*, Cambridge University Press, Cambridge.

PUTNAM, H. (1971), *Philosophy of logic*, Harper & Row, New York (anche in Putnam, 1975b, pp. 323-57; trad. it. *Filosofia della logica: nominalismo e realismo nella logica contemporanea*, ISEDI, Milano 1975).

QUINE, W.V.O. (1948), 'On what there is', *Review of Metaphysics*, vol. 2, pp. 21-38 (trad. it. 'Su ciò che vi è', in Quine, *Da un punto di vista logico*, Raffaello Cortina, Milano 2004).

QUINE, W.V.O. (1951), 'Two dogmas of empiricism', in *Philosophical Review*, LX, 1, pp. 20-43 (trad. it. 'Due dogmi dell'empirismo', in Quine, *Da un punto di vista logico*, Raffaello Cortina, Milano 2004).

QUINE, W.V.O. (1981), 'Five milestones of empiricism', in Quine, *Theories and things*, Harvard University Press, Cambridge (MA), pp. 67-72.

QUINE, W.V.O. (1986), 'Reply to Charles Parsons', in L. Hahn e P. Schilpp (a cura di), *The Philosophy of W. V. Quine*, Open Court, La Salle (IL), pp. 396-403.

PINCOCK, J. (2004), 'A revealing flaw in Colyvan's indispensability argument', *Philosophy of Science*, vol. 71, pp. 61-79.

PINCOCK, C. (2012), *Mathematcs and scientific representation*, Oxford University Press, Oxford e New York

PSILLOS, S. (1999), *Scientific realism: How science tracks truth*, Routledge, London e New York.

SAATSI, J. (2011), 'The enhanced indispensability argument: Representational versus explanatory role of mathematics in science', *British Journal for the Philosophy of Science*, vol. 62, pp. 143-154

SALMON, W. (1984), *Scientific explanation and the causal structure of the world*, Princeton University Press, Princeton.

SHAPIRO, S. (1997), *Philosophy of mathematics. Structure and ontology*, Oxford University Press, Oxford e New York.

SOBER, E. (1993), 'Mathematics and indispensability', *Philosophical Review*, vol. 102, pp. 35-57.

TEGMARK, M. (2008), 'The mathematical universe', *Foundations of Physics*, vol. 38, pp. 101–50.

TEGMARK, M. (2014), *Our mathematical universe*, Knopf, New York.

LUCE, R. D., KRANTZ, D. H., SUPPES, P. e TVERSKY, A. (1971-1990), *Foundations of measurement*, 3 voll., Academic Press, New York.

VAN FRAASSEN, B. (1980), *The scientific image*, Oxford University Press, Oxford e New York (trad. it. *L'immagine scientifica*, CLUEB, Bologna 1985).

Andrea Sereni
Classe di Scienze Umane, Istituto Universitario di Studi Superiori (Pavia)
Facoltà di Filosofia, Università Vita-Salute San Raffaele (Milano)
e-mail: andrea.sereni@iusspavia.it