La Matematica nella Società e nella Cultura

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Matteo Plebani

Sull'ontologia della matematica

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **7** (2014), n.3 (Matematica e filosofia. Contributi al dialogo interdisciplinare), p. 319–342.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2014_1_7_3_319_0>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2014.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. VII, Dicembre 2014, 319-342

Sull'ontologia della matematica

MATTEO PLEBANI

Il dibattito che contrappone le prospettive cosiddette platonista e nominalista è paradigmatico di come le questioni ontologiche entrino di prepotenza nella filosofia della matematica. Il modo migliore per farsi un'idea a riguardo è entrare subito nel vivo. Tutto quello che serve sapere è che il seguente dialogo ruota attorno alla domanda: esistono oggetti matematici astratti come numeri e insiemi?

PLATONISTA: Io dico di sì.

NOMINALISTA: E io dico di no.

SCETTICO: Prima di rispondere *sì* o *no* ad una domanda, bisognerebbe assicurarsi che la domanda abbia senso. E la domanda se il numero 17 esista davvero non mi pare più sensata della domanda se il mese d'Aprile esista davvero.

ONTOLOGO: Ma la domanda se il mese di Aprile esista o meno è sensata!

SCETTICO: Come, prego?

ONTOLOGO: Un mese è un certo intervallo di tempo. E ci sono buone ragioni per pensare che gli intervalli di tempo esistano. Per esempio, questa conversazione ha già preso un certo intervallo di tempo.

PLATONISTA: Pienamente d'accordo. In fondo, perché non ammettere l'esistenza degli intervalli temporali? Un intervallo di tempo è semplicemente un insieme di istanti di tempo.

NOMINALISTA: Parzialmente in disaccordo: visto che non credo all'esistenza di oggetti come gli insiemi, non credo nemmeno all'esistenza di insiemi di istanti di tempo. Questo non mi vieta di credere all'esistenza di intervalli di tempo, pensati come entità concrete. A differenza del platonista, io non definisco gli intervalli di tempo come insiemi di istanti di tempo. Faccio il contrario: definisco gli istanti come intervalli di tempo di un certo tipo (di lunghezza nulla). Quindi: sì, i mesi esistono, ma gli insiemi no.

SCETTICO: Un altro interessantissimo dibattito....

ONTOLOGO: Che sia interessante o meno non ci riguarda. Il punto è se il dibattito sia sensato o meno. E lo è. Può non apparire evidente dal modo in cui si sono espressi, ma tanto il nominalista quanto il platonista concordano nel ritenere che esista una *strategia* per decidere se un certo tipo di entità (i mesi dell'anno, gli insiemi, gli angeli, i neutrini...) esistano o meno. Le loro argomentazioni fanno implicitamente riferimento a questa strategia.

SCETTICO: Ti riferisci alla strategia di Quine?

ONTOLOGO: Esattamente. Dal 1948 (anno di pubblicazione del suo articolo 'On what there is') l'ontologia è diventata un programma di ricerca rispettabile. Non più un ricettacolo di fumose considerazioni sull'essere e il nulla, ma il serio tentativo di stilare un catalogo di cosa esiste. La cosa più interessante è che l'operazione è intellettualmente rispettabile proprio perché è condotta con metodo. Il metodo è questo: noi tutti facciamo delle affermazioni, in contesti più o meno seri - dalle conversazioni ordinarie alle nostre migliori teorie scientifiche. È una richiesta ragionevole chiedere a chi fa un'affermazione di esprimerla in un linguaggio il più preciso possibile. Questo perché tanto più preciso è il linguaggio in cui ci si esprime, tanto più facile è stabilire le implicazioni di quello che si dice. In particolare, una volta che le nostre affermazioni sono formulate con sufficiente precisione, diventa possibile stabilire se queste affermazioni implicano l'esistenza di un certo tipo di cose.

SCETTICO: E cosa vorrebbe dire "formulare le nostre affermazioni con sufficiente precisione"?

ONTOLOGO: Parafrasarle in quella che Quine chiamava la 'notazione canonica'. Possiamo dire che un enunciato è formulato con sufficiente precisione quando per tradurlo completamente nel linguaggio della logica del primo ordine basterebbe sostituire i predicati del linguaggio naturale con costanti predicative. Per esempio, "ci sono rose rosse" è formulato con sufficiente precisione quando è reso come '$\exists x$ (x è una rosa $\wedge$ x è rossa)'.

SCETTICO: E in che modo questo dovrebbe contribuire a rendere una disputa ontologica sensata?

ONTOLOGO: Supponi che qualcuno faccia una serie di affermazioni in linguaggio naturale: rifermiamoci a T come questo insieme di affermazioni.

NOMINALISTA: Insieme?

ONTOLOGO: Per il momento passami il termine; sei libero di riformulare il tutto nel linguaggio che più ti aggrada in un secondo tempo. Dunque, dicevo, T è un certo insieme di affermazioni. Supponi inoltre che la stessa persona sia disposta a parafrasare quelle affermazioni in un insieme di enunciati in notazione canonica T*. Ora, T* a tutti gli effetti può essere trattato come un insieme di enunciati al primo ordine: ha quindi senso chiedersi se da T* segua o meno '$\exists x$ (x è un F)'. Supponi che segua, ovvero che 'T* $\rightarrow \exists x$ (Fx)' sia effettivamente un teorema della logica del primo ordine. Come dobbiamo interpretare la situazione, secondo Quine? Visto che per lui "l'esistenza è ciò che esprime la quantificazione esistenziale. Ci sono cose di genere F se e solo se $\exists x$ (Fx)" (Quine 1969, p. 97 trad. it.), e visto che T* dovrebbe essere semplicemente un modo preciso di esprimere T, dire che T* implica $\exists x$ (Fx) significa che T implica che esistano degli F. In altre parole, accettare T, accettare di tradurlo con T*, ma rifiutare di ammettere l'esistenza degli F sarebbe incoerente.

SCETTICO: Puoi fare un esempio di come questo funziona in pratica?

ONTOLOGO: Certamente. Supponi che qualcuno affermi che esistono rose rosse, ma che non esistono rose. Questo sarebbe incoerente, visto che è naturale parafrasare l'affermazione che esistono rose rosse come:

T* $\exists x$ (x è una rosa $\wedge$ x è rossa)

da cui segue che

C* $\exists x$ (x è una rosa)

Ma quello che C* esprime è semplicemente che le rose esistono. Questo esempio può apparire banale, ma è formalmente molto vicino ad uno che banale non è. Considera l'affermazione 'esistono numeri primi', un'affermazione che tutti noi ci sentiremmo di sottoscrivere. Sembra naturale renderlo in notazione canonica come:

T* $\exists x$ (x è un numero $\wedge$ x è primo)

da cui segue che

C* $\exists x$ (x è un numero)

Ma la lettura naturale di C* è che i numeri esistono, una affermazione che non tutti sottoscriverebbero.

NOMINALISTA: Io no di certo.

ONTOLOGO: Ecco quindi il problema. Se si segue la strategia di Quine, i nominalisti hanno solo due opzioni disponibili:

1. Rifiutarsi di sottoscrivere l'affermazione che 'esistono numeri primi'.
2. Rifiutarsi di rendere in notazione canonica 'esistono numeri primi' come '$\exists x$ (x è un numero e x è primo)'.

Se entrambe queste opzioni sembrano impraticabili, si può scegliere invece di rinunciare al nominalismo (come finì per fare Quine) e abbracciare una terza opzione:

3. Accettare l'esistenza dei numeri.

Ora, a prima vista sia 1 che 2 possono apparire opzioni poco allettanti, ma questo non deve indurre a pensare che siano impraticabili. Concentrandoci per il momento su 2, è importante notare che parafrasare un enunciato ordinario in notazione canonica non è un procedimento meccanico. Il cosiddetto 'criterio di Quine per l'impegno ontologico', ovvero la strategia che ho appena descritto, non è un modo per prendere nota o svelare le implicazioni di quello che diciamo. È un modo per cercare di precisare il contenuto delle nostre affermazioni testando via via le loro implicazioni. Un dibattito ontologico andrebbe visto come una sfida: se rifiuti di impegnarti ad un certo tipo di entità, come parafrasi quelle affermazioni che sembrano implicare l'esistenza di quelle entità?

MATEMATICO: Scusate se mi intrometto, ma non ho potuto fare a meno di ascoltare la vostra conversazione. Volevo ringraziare l'ontologo per le sue chiarificazioni, ma io ho ancora un dubbio e vorrei chiarirlo prima di andare avanti con la discussione. Mi piace questa idea dell'ontologia come un gioco. Capisco anche perché i filosofi siano interessati a giocarlo. Ma mi riesce difficile capire perché questo gioco dovrebbe risultare interessante per noi *matematici*.

ONTOLOGO: Penso converrai con me che la formalizzazione delle teorie matematiche resa possibile dallo sviluppo della logica formale sia stata interessante *anche* da un punto di vista *matematico*. Una volta formalizzate, le teorie stesse posso essere trattare come oggetti matematici e studiate da un punto di vista meta-matematico. Le questioni sui legami inferenziali tra insiemi di enunciati (cosa si può e cosa non si può dimostrare in una certa teoria, se un certo gruppo di insiemi siano o meno indipendenti, ecc.) divengono finalmente *trattabili*. Fin dai tempi in cui testavano le potenzialità di squadra e compasso, i matematici si sono chiesti *cosa si può fare con cosa*. Lo studio matematico delle teorie formali (cioè la meta-matematica) può essere inserito all'interno di questa linea di ricerca ed essere visto come una ricerca che nasce da un'esigenza interna alla matematica.

MATEMATICO: Benissimo, ma cosa c'entra l'ontologia con la meta-matematica?

ONTOLOGO: C'entra perché anche l'ontologia, come la meta-matematica, è uno studio di nessi inferenziali, reso possibile dall'esistenza di linguaggi formali in cui parafrasare le nostre teorie. Solo, in questo caso l'interesse è indirizzato ad un certo sotto-insieme di teoremi di una teoria: i suoi teoremi esistenziali, ossia quelli della forma '$\exists x$ (...x...)'. Si parla a questo proposito di impegni esistenziali o ontologici. Per chi non crede all'esistenza dei numeri, per esempio, il problema è formulare l'aritmetica (pura e applicata) in modo tale che non implichi '$\exists x$ (x è un numero)'. In altre parole: è possibile, con mezzi accettabili al nominalista, riformulare una parte delle nostre teorie matematiche? Di nuovo una questione di cosa si può fare con cosa.

NOMINALISTA: Naturalmente con alcuni enunciati semplici è possibile. Prendi per esempio l'affermazione che il numero delle lune di Marte è due. Questo enunciato sembra far riferimento al numero due, ma naturalmente esiste un modo di parafrasarlo alternativo:

(1) $\exists x\, \exists y$ (x è una luna di Marte $\wedge$ y è una luna di Marte $\wedge$ $x \neq y$ $\wedge$ $\forall z$ (z è una luna di Marte $\rightarrow z = x \vee z = y$))

(1) dice che *esiste* una luna di Marte x, *esiste* una luna di Marte y distinta da x e tutte le lune di Marte sono o x oppure y. (1) implica l'esistenza delle lune di Marte, ma sostanzialmente di nient'altro. Naturalmente quello che vale per il numero 'due' vale per tutti i numeri. Si possono addirittura definire dei quantificatori numerici $\exists_n x$

Fx in maniera ricorsiva:

$\exists_0 x\ (\mathrm{F}x) =_{\mathrm{def}} \neg \exists x\ \mathrm{F}x$;
$\exists_{\mathrm{n+1}} x\ (\mathrm{F}x) =_{\mathrm{def}} \exists y\ (\mathrm{F}y) \wedge \exists_{\mathrm{n}} x\ (\mathrm{F}x \wedge x \neq y)$

Ecco quindi un primo frutto dell'analisi degli impegni esistenziali di una teoria: abbiamo scoperto che quello che a prima vista sembrava un nesso ovvio (dal fatto che ci siano n cose segue che esiste un oggetto astratto, il numero n, che le numera) ovvio non è.

E la cosa non finisce qui. Considera un'eguaglianza aritmetica di base, tipo '$2 + 3 = 5$'. Tramite l'uso dei quantificatori numerici possiamo parafrasarla così:

(2) $(\exists_2 x\ (\mathrm{F}x) \wedge \exists_3 x\ (\mathrm{G}x) \wedge \neg \exists x\ (\mathrm{F}x \wedge Gx)) \rightarrow \exists_5 x\ (\mathrm{F}x \vee \mathrm{G}x)$

Si tratta ovviamente di un'affermazione schematica: la validità di (2) non dipende in alcun modo da quali predicati prendano il posto di 'F' e 'G'. Accettare (2) vuol dire accettare ogni *possibile* sostituzione di 'F' e 'G' con un predicato qualsiasi (cfr. McGee 1997, si veda anche la sezione 'Chi è chi'). I quantificatori numerici, come abbiamo visto, sono definibili nella logica del primo ordine. Quello che possiamo notare è che (scritta per intero) ogni istanza dello schema (2) è una *verità logica*: un enunciato vero in tutte le interpretazioni. Siamo di fronte ad una forma di logicismo nominalista (cfr. Hodes 1984; Yablo 2002), secondo cui le verità aritmetiche, in quanto verità logiche, non dipendono dall'esistenza di *nessun* oggetto particolare, tanto meno dall'esistenza di oggetti astratti. Questo è molto interessante, perché spiega come sia possibile la conoscenza matematica: se le verità matematiche sono verità logiche, allora c'è una spiegazione di come possiamo conoscere delle verità matematiche, ossia attraverso le nostre capacità logiche. Se invece le cose stessero come vuole il platonista, la conoscenza matematica risulterebbe molto più misteriosa: se '$2 + 3 = 5$' vertesse sulle relazioni tra un gruppo di entità astratte (i numeri 2, 3, 5), ci sarebbe risultato ben difficile acquisire una tale informazione, visto che nessuno di noi ha mai visto, né toccato, né odorato un oggetto astratto come un numero.

Platonista: Se è per questo nessuno ha mai visto né toccato un elettrone o un buco nero. Questo non ci impedisce di sapere molte cose sugli elettroni e i buchi neri.

NOMINALISTA: Vero, ma elettroni ed altre particelle inosservabili, pur essendo appunto inosservabili, lasciano delle tracce visibili della loro esistenza: influenzano ciò che accade, hanno cioè dei poteri causali. Questi poteri causali fanno sì che ci sia una correlazione tra le nostre credenze sulle particelle subatomiche e le particelle stesse: il passaggio degli elettroni lascia delle tracce su alcune lastre di rame che io vedo, giustificando la mia credenza nell'esistenza degli elettroni. Nulla del genere è vero nel caso di oggetti astratti come numeri o insiemi: essendo completamente privi di poteri causali, risulta difficile capire come sia possibile collegare le credenze che noi abbiamo su di loro e i fatti matematici che rendono queste credenze vere. Questo genere di dubbi sulla capacità da parte del platonismo di rendere conto della conoscenza matematica è una delle motivazioni principali per il progetto nominalista (cfr. Benacerraf 1973).

MATEMATICO: Molto interessante, ma vorrei tornare al problema di parafrasare gli enunciati matematici in un modo che sia nominalisticamente accettabile. Mettiamo che si possano parafrasare enunciati semplici come '$2 + 3 = 5$' o 'il numero delle lune di Marte è due'. Questi sono esempi abbastanza banali. Come ve la cavate con enunciati più complessi, come per esempio 'Esistono infiniti numeri primi?'

NOMINALISTA: Ci sono varie strade. Una prima strategia, resa celebre da Charles Chihara, è quella di interpretare gli enunciati sui numeri come enunciati sui *numerali*, pensati come entità concrete, iscrizioni fatte di gesso, inchiostro, pixel, etc. L'affermazione che esistono infiniti numeri (dimentichiamoci per il momento l'aggettivo 'primi') viene resa dicendo che è sempre possibile, dato un numerale n, scrivere un numerale m piu' lungo di n (i numerali sono pensati nella notazione a stanghette: |, ||, |||, ||||, ...). In formule (indicando solo la parte con i quantificatori):

$\Box\forall$ (numerale n) $\Diamond\exists$ (numerale m) ....

Il box modale '$\Box$' e il diamante '$\Diamond$' sono due operatori modali, rispettivamente della necessità e della possibilità. E sono fondamentali per una parafrasi nominalista del tipo che stiamo considerando ora. Senza le locuzioni modali, la parafrasi direbbe che per ogni numerale *esiste* un numerale più lungo, il che molto probabilmente non è vero, se i numerali sono intesi come iscrizioni concrete: potrebbe non esserci abbastanza inchiostro o gesso nel mondo per scrivere un numero infinito di stanghette. L'alternativa sarebbe trattare i numerali come *tipi astratti*, pure forme geometriche, ma è chiaro che questo un nominalista non può accettarlo. Meglio quindi parlare di ciò che *è possibile costruire* invece che di ciò che *esiste*. Questo, naturalmente, vuol dire utilizzare un linguaggio più ricco di quello della logica del primo ordine.

PLATONISTA: Ecco che finalmente emergono i costi del nominalismo. Certo, la vostra ontologia sarà pure più economica di quella platonista, ma il vostro linguaggio (la vostra *ideologia*, come la chiamava Quine) usa risorse che vanno ben oltre la semplicità della logica del primo ordine. E non è un problema banale: la logica modale (che formalizza le regole per usare gli operatori citati poco prima) è diventata rispettabile proprio quando le si è trovata una semantica insiemistica, cioè matematica. Allo stesso modo, nella matematica moderna è comune interpretare locuzioni modali come 'è costruibile' 'è dimostrabile' 'è derivabile' ... come un modo per dire che esistono rispettivamente costruzioni, dimostrazioni, derivate... Ora voi proponete di invertire la rotta: non spiegare le nozioni modali in termini di esistenza di oggetti matematici, ma spiegare la matematica in termini di nozioni modali, che a questo punto andranno prese come primitive. Mi sembra un costo considerevole.

NOMINALISTA: In realtà non è detto che un nominalista debba per forza far appello a nozioni modali per ricostruire le nostre migliori teorie scientifiche e matematiche in una maniera per lui soddisfacente. Prendiamo un esempio di 'enunciato matematico applicato' ('matematico' perché apparentemente fa riferimento ad entità matematiche):

Il numero dei gatti = Il numero dei cani

Bene, un modo naturale per parafrasarlo è sfruttare i quantificatori numerici introdotti sopra. Se il numero dei gatti è identico al numero dei cani, vuol dire che una delle seguenti alternative si verifica:

Non ci sono né gatti né cani, ossia $\exists_0 x\ \mathrm{G}x \wedge \exists_0 x\ \mathrm{C}x$

C'è un solo gatto e un solo cane, ossia $\exists_1 x\ \mathrm{G}x \wedge \exists_1 x\ \mathrm{C}x$

Ci sono esattamente due gatti e due cani, ossia $\exists_2 x\ \mathrm{G}x \wedge \exists_2 x\ \mathrm{C}x$

Ci sono esattamente tre gatti e tre cani, ossia $\exists_3 x\ \mathrm{G}x \wedge \exists_3 x\ \mathrm{C}x$

...

Si può provare a esprimere il tutto come una disgiunzione:

$(\exists_0 x\, \mathrm{G}x \wedge \exists_0 x\, \mathrm{C}x) \vee (\exists_1 x\, \mathrm{G}x \wedge \exists_1 x\, \mathrm{C}x) \vee (\exists_2 x\, \mathrm{G}x \wedge \exists_2 x\, \mathrm{C}x) \vee (\exists_3 x\, \mathrm{G}x \wedge \exists_3 x\, \mathrm{C}x) \ldots$

Cosa c'è che non va in una ricostruzione del genere? Forse il fatto che non è una formula compiuta? Ma lo è, se i puntini '...' sono un elemento del nostro vocabolario logico (e a dir la verità a me l'espressione '... e così via' sembra proprio essere parte del vocabolario italiano). E in alcuni linguaggi formali lo sono: si può dare un senso preciso alla locuzione '...' all'interno di un frammento di un linguaggio infinitario, che ammette *alcune* disgiunzioni e congiunzioni infinite (quelle che esibiscono un *pattern* regolare, come in questo caso).

Una volta ricostruita l'aritmetica in questo modo, utilizzando nuovamente una risorsa espressiva del tutto simile alla controparte formale dei puntini si può ottenere quella che è conosciuta come 'analisi predicativa', una porzione di matematica più che sufficiente per gli scopi delle nostre attuali teorie scientifiche.

PLATONISTA: Caro matematico, ti prego di notare l'atteggiamento puritano dei nominalisti: per loro, meno matematica c'è, meglio è. Sia mai che tu abbia qualche idea originale in un'area della matematica che non ha ancora trovato applicazioni empiriche e parafrasi nominalisticamente accettabili: potresti portare a grandi progressi per l'umanità (tra cui *applicazioni inaspettate* di quella che si credeva in primo tempo matematica 'pura'), ma turberesti il sonno del nominalista!

NOMINALISTA: Non essere ridicolo! La pratica matematica è una cosa, ma il tentativo di renderla comprensibile è un altro. E i nominalisti hanno più frecce al loro arco di quante si creda. Per esempio, possono rendere conto di due aspetti centrali della pratica matematica: il primo è che la matematica sia più uno studio di ciò che è *possibile* che non di ciò che *esiste attualmente*; il secondo è che la matematica non studia propriamente *oggetti*, ma *strutture*.

MATEMATICO: La seconda idea mi pare molto stimolante. Ricordo di aver letto una volta un passo di Poincaré:

> I matematici non studiano oggetti, ma relazioni tra oggetti; per loro è dunque indifferente sostituire questi oggetti con altri, purché le relazioni non cambino. La materia non importa loro, li interessa unicamente la forma. (Poincaré 1968, p. 41)

NOMINALISTA: Esatto. L'intuizione contenuta in questo passo è un'altra importante motivazione per il nominalismo. Se i matematici non studiano oggetti, ma studiano i numeri, allora forse i numeri non sono oggetti, contrariamente a quanto vuole il platonista. E c'è ragione per pensare che i numeri non siano oggetti, ragionando, diciamo così, per assurdo. Supponiamo che i numeri siano oggetti. La domanda spontanea è: *quali* oggetti? Insiemi? Benissimo, supponiamo pure che sia così (sorvolando sul fatto che secondo me non esistono nemmeno gli insiemi). Ma quali, tra le sequenze di insiemi qui sotto, contiene i *veri* numeri naturali?

$\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$ (Von Neumann: $n = \{m: m < n\}$)

$\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\{\{\varnothing\}\}\}$ (Zermelo: $0 = \varnothing$; $m + 1 = \{m\}$)

(Cfr. Benacerraf 1965.) Ma poi perché fermarci agli insiemi? Perché non identificare la serie dei numeri naturali con la progressione dei numerali:

$|, ||, |||, ||||, \ldots$

La scelta sembra irrilevante ai fini aritmetici. Qualunque sia il sistema di oggetti con cui si rappresentano i numeri, resta sempre vero che:

STR compiendo l'operazione 'somma' tra l'oggetto che si trova al terzo posto e quello che si trova al secondo posto, si ottiene l'oggetto che si trova al quinto posto.

Perché non considerare STR come il vero contenuto di un enunciato aritmetico come '$2 + 3 = 5$'? Non c'è neppure bisogno che il sistema di oggetti che stiamo considerando esista davvero. Quello che importa è che *necessariamente*, in tutti i *possibili* sistemi di oggetti di un certo tipo, gli oggetti che occupano certe posizioni stiano in determinate relazioni tra di loro. Per tornare all'esempio di poco fa, l'affermazione che i numeri primi sono infiniti può essere parafrasata dicendo che nessuna possibile *omega-sequenza* (ovvero nessun sistema di oggetti che esibisca la struttura dei numeri naturali) contiene un numero primo massimo. E invece di dire che i numeri esistono, come farebbe il platonista, diremo che nessuna possibile *omega-sequenza* è vuota. Ecco un'altra strategia, diversa da quella vista prima (in cui si sfruttavano i quantificatori numerici), per parafrasare enunciati aritmetici di base.

PLATONISTA: A onor del vero, anche da una prospettiva platonista si *può* dar senso all'idea che la matematica sia innanzitutto uno studio di strutture. In fondo, sembra naturale pensare ad una struttura come ad un oggetto astratto, visto che una struttura è qualcosa di comune a diversi sistemi di oggetti: qualcosa di simile ad una proprietà universale, quindi. Allo stesso modo si può pensare ai numeri come a *posti in una struttura*: oggetti le cui uniche proprietà interessanti sono le proprietà strutturali.

MATEMATICO: Hmm, questa idea di definire un numero in base alle sue proprietà strutturali mi sembra sospetta.

ONTOLOGO: Ricorda un po' l'idea Leibniziana dell'Identità degli Indiscernibili, secondo cui a e b sono identici se godono delle stesse proprietà. Si tratta di un principio controverso (Black 1952), ma qui si sta dicendo qualcosa di ancora più controverso: l'ente matematico a e l'ente matematico b sarebbero identici a condizione di godere delle stesse proprietà *strutturali* (cfr. Keinan 2006, Shapiro 2006).

MATEMATICO: L'idea di caratterizzare univocamente un ente matematico in base alle relazione che intrattiene con gli altri membri della sua struttura mi sembra non funzionare per tutte le strutture matematiche. Nel caso dei numeri naturali, può funzionare: si definisce lo zero come l'unico numero che non è il predecessore di nessun numero; il numero 1 come il successore di zero, ecc... In generale, fin che abbiamo a che fare con strutture *rigide*, in cui l'unico automorfismo (isomorfismo da un insieme in se stesso) è l'identità, la strategia può funzionare. E alcune importanti strutture matematiche sono rigide: oltre all'insieme dei numeri naturali, anche il campo dei reali è una struttura rigida.

Ci sono tuttavia anche strutture *non-rigide*, che ammettono automorfismi diversi dall'identità. Questo vuol dire che nel dominio ci sono due oggetti distinti (quelli che l'automorfismo scambia fra loro) che tuttavia soddisfano le stesse proprietà. Una cosa del genere avviene nel gruppo degli interi additivi $(\mathbf{Z}, +)$ con 1 e -1, nel caso dei numeri complessi con i e $-i$: ogni formula $\Phi(x)$ nel linguaggio dell'analisi complessa che è soddisfatta da i è soddisfatta anche da $-i$. Se fossero oggetti, i e $-i$ dovrebbero quindi essere oggetti distinti, ma senza che ci sia nessuna proprietà strutturale a distinguerli. Un esempio ancora più drammatico è il piano euclideo, che è *omogeneo*: ogni punto è in un certo senso indistinguibile da ogni altro, visto che, per ogni coppia di punti, c'è un automorfismo che li inverte. Ma il problema sorge anche con "strutture" meno complesse, come per esempio la struttura astratta associata a tutte le coppie, la struttura della cardinalità due. Si tratta di una struttura molto basilare e molto facile da caratterizzare: i posti nella struttura sono costituiti da un x, da un y diverso da x e da null'altro. Si tratta di un caso in cui ci sono due posti distinti in una struttura, ma non ci sono relazioni a distinguerli (perché non c'è proprio alcuna relazione tra di loro). Volendo rappresentare una tale struttura, potremmo farlo così:

$$\bullet \qquad \bullet$$

L'unica cosa che sappiamo, riguardo a ciascuno dei due punti, è che è diverso dall'altro, ma non c'è modo di dire quale sia quale. Quello che è vero di uno, è vero dell'altro. Il problema ovviamente si generalizza anche alla struttura comune a tutte le triplette, quadruple ecc. Si tratta in fatti di strutture *cardinali*, in cui ci sono n oggetti distinti, ma che, a differenza delle strutture *ordinali*, non permettono di distinguere tra essi un primo membro, un secondo, ecc... Non si sottovaluti l'importanza matematica di queste strutture elementari: come giustamente sottolineano Leitgeb e Ladyman (2008), la struttura della pura cardinalità quattro, per esempio, è isomorfa ad un *grafo*, una struttura matematica a tutti gli effetti.

PLATONISTA: Questo, in effetti, è un problema interessante. Una prima risposta potrebbe consistere nell'immergere una struttura di per sé non-rigida in una struttura rigida. Per esempio, si possono immergere i numeri complessi o il piano euclideo in una struttura rigida come R^2, associando ad ogni numero complesso (ad ogni punto) una coppia di numeri reali. Così i e $-i$ diventano distinguibili: una è la coppia $(0, 1)$, l'altra la coppia $(0, -1)$. È vero che ad alcuni (per esempio Shapiro 2008, p. 295) una proposta del genere non piace (perché, tra le altre cose, dubitano sia sempre praticabile). In ogni caso, nota che non ho mai detto che i posti in una struttura sono oggetti *definiti* dalle loro proprietà strutturali. Possono benissimo esserci *due* radici quadrate di -1 *senza che ci sia nulla a distinguerle. Il punto è che proprio perché non c'è nulla che le distingue, possiamo trattare* i come *la* (singolare) radice quadrata di meno uno, anche se in realtà ce ne sono due. C'è una differenza tra i e $-i$, ma non ha alcuna importanza matematica. Se vuoi, la mia idea è che gli oggetti matematici esistano, ma che l'unica cosa a cui i matematici sono interessati siano le loro relazioni.

NOMINALISTA: L'alternativa è ovviamente abbandonare completamente la nozione di oggetto *matematico*. I posti in una struttura possono benissimo essere occupati da oggetti concreti. Ovviamente, non tutte le proprietà di questi oggetti saranno interessanti da un punto di vista matematico: solo quelle strutturali lo sono. Questo non vuol dire che stiamo studiando oggetti di un tipo particolare. È il *modo* in cui li studiamo (il focalizzarci unicamente sulle proprietà strutturali) ad esserlo.

ONTOLOGO: Abbandoniamo per un attimo il problema dello strutturalismo. Per quanto interessante, la proposta del nominalista di avere uno 'strutturalismo senza strutture' fa appello a nozioni modali: potrebbero non esserci abbastanza oggetti concreti per formare anche una semplice omega-sequenza, il che vuol dire che quando parliamo di *sistemi di oggetti concreti* con la struttura dei numeri naturali stiamo parlando di sistemi di oggetti *possibili*. E torna il problema di prima: un linguaggio in cui si introducono operatori modali primitivi è un linguaggio più ricco di quello della logica del primo ordine, ovvero della notazione canonica di Quine. Mi domandavo se esistessero ricostruzioni nominalistiche della matematica che non fanno ricorso a risorse espressive che vadano oltre la logica del primo ordine, siano esse operatori modali o qualche forma di quantificazione non standard.

NOMINALISTA: In effetti una strategia del genere esiste, ed è stata esplorata nel lavoro di uno dei grandi nominalisti contemporanei, Hartry Field. L'idea di Field è di rinunciare a parafrasare le teorie matematiche, e perseguire invece due sotto-obiettivi:

1. Trovare una ricostruzione nominalisticamente accettabile delle nostre migliori teorie scientifiche, *in primis* della fisica. Questo vuol dire trovare, per ogni teoria scientifica T, una traduzione

nominalistica N di T che ne esprima il contenuto non-matematico. Se ad N si aggiunge una teoria matematica M si ottiene l'originale T.

2. Mostrare come M sia conservativa rispetto ad N: in $M + N$ non è dimostrabile nessun teorema nel linguaggio originario di N che non fosse già dimostrabile in N.

Ovviamente il primo passo del programma di Field è comunque molto ambizioso: anche ammesso che nominalizzare la fisica sia più facile che nominalizzare la matematica, resta comunque un'impresa titanica - Field stesso si limita ad illustrare le sue idee nominalizzando unicamente la fisica newtoniana.

Ma è il secondo passo ad essere molto interessante, perché mostra la possibilità di una giustificazione della matematica in ottica nominalistica diversa da quelle consuete. L'idea di Field è che la matematica 'non deve essere vera per essere buona'. Field non cerca di nominalizzare la matematica perché secondo lui, a rigore, gli enunciati matematici sono o vacuamente veri (non esistendo i numeri, è vero che non esiste un numero primo più grande di tutti gli altri) o falsi (non esistendo i numeri, è falso che esiste un numero primo più piccolo di tutti gli altri). E tuttavia la matematica è utilissima perché permette di facilitare la derivazione di verità nominalistiche in modo molto più facile e veloce di quanto non avverrebbe in una teoria nominalistica come N. Abbiamo già avuto un esempio molto semplice di questo fenomeno quando abbiamo incontrato una versione nominalistica dell'aritmetica poco sopra. Sebbene i quantificatori esistenziali permettano di tradurre un enunciato come '$2 + 3 = 5$' nel linguaggio della logica del primo ordine, certamente derivare quest'ultimo come un teorema logico è molto più faticoso che sommare due e tre nel modo usuale.

L'idea che una certa teoria possa svolgere un'importante funzione, pur non essendo letteralmente vera, non è una novità assoluta. Il confronto con la meta-matematica torna utile anche qui. L'idea di Field di giustificare la matematica dimostrando che è conservativa rispetto alla fisica nominalista ricorda l'idea di Hilbert di giustificare la matematica infinitaria dimostrando la sua conservatività sulla matematica finitista. Di nuovo, un'idea filosofica in grado di ispirare un programma di ricerca formale.

Ironicamente, un altro riferimento ad Hilbert può aiutare a comprendere il progetto di Field. Nei suoi *Fondamenti della Geometria* Hilbert propone una assiomatizzazione della geometria detta *sintetica*, molto diversa dalla geometria *analitica* a cui siamo abituati. Gli unici predicati della geometria sintetica sono un predicato ternario Tra(x, y, z), che intuitivamente esprime il fatto che il punto x si trova tra i punti y e z, e il predicato a quattro posti Cong(x, y, z, w), la cui lettura intuitiva è che il segmento compreso tra x e y è congruente a quello compreso tra z e w. (Naturalmente questa "lettura intuitiva" serve solo a farsi un'idea circa il significato di tali predicati. In realtà, essendo predicati fondamentali della teoria, o non sono definiti, o sono definiti implicitamente dagli assiomi che li governano.) A differenza della geometria analitica, che la distanza tra a e b sia il doppio di quella tra c e d non viene qui espresso tramite l'uso di una funzione distanza che colleghi coppie di punti e numeri reali ($\mathrm{d}(a, b) = 2\,\mathrm{d}(c, d)$), ma dicendo che c'è un punto x, nel mezzo di a e b (cioè ax è congruente a xb), tale che il segmento ax è congruente al segmento cd:

$$\exists x\,(\mathrm{Tra}(x, a, b) \wedge \mathrm{Cong}(a, x, x, b) \wedge \mathrm{Cong}(a, x, c, d))$$

Applicazioni leggermente più elaborate di questa strategia permettono al nominalista di fare affermazioni come 'Padova dista 39 km da Venezia' senza quantificare sui numeri. Naturalmente la cosa non finisce qui: il lavoro di Hilbert mostra come una teoria tanto ricca quanto la geometria euclidea sia traducibile in questo linguaggio. In più, è interessante notare che se una geometria sintetica e nominalista come quella appena abbozzata viene incorporata in una teoria matematica classica, in cui si è disponibile una funzione distanza d che leghi coppie di punti a numeri, diventa possibile dimostrare i seguenti *teoremi di rappresentazione*:

i. $\mathrm{d}(x, y) + \mathrm{d}(y, z) = \mathrm{d}(x, z)$ se e solo se $\mathrm{Tra}(y, x, z)$.

ii. $\mathrm{d}(x, y) = \mathrm{d}(z, w)$ se e solo se $\mathrm{Cong}(x, y, z, w)$.

iii. La funzione d che soddisfa i. e ii. è unica modulo la scelta di una costante moltiplicativa (come quella che esprime il rapporto tra metri e pollici).

Field legge questi teoremi di rappresentazione come un'illustrazione dell'utilità di una teoria matematica M come strumento per derivare nuove conseguenze di una teoria nominalistica N. I teoremi di rappresentazione permettono di tradurre un enunciato di N in uno di T (cioè $M + N$), derivare da quest'ultimo una qualche conclusione e poi ridiscendere da quest'ultima all'enunciato nel linguaggio di N ad essa associato. La conservatività di M rispetto ad N ci garantisce che la conclusione così raggiunta poteva essere derivata anche all'interno di N.

ONTOLOGO: Penso che il nominalista abbia fatto abbastanza per convincerci che il suo programma non ha solo un aspetto negativo, la classica critica alla possibilità di conoscere gli oggetti astratti, ma anche un lato generativo: lo studio delle potenzialità espressive di alcuni linguaggi e delle loro relazioni logiche. Questo in sé potrebbe forse bastare a dare un'idea del perché il dibattito ontologico in filosofia della matematica sia interessante e ricco di spunti. Ma per *par condicio* dobbiamo dare anche al platonista la possibilità di dire qualcosa circa il suo programma di ricerca.

PLATONISTA: Grazie. Direi che ci sono due grandi programmi di ricerca platonisti attualmente attivi. Uno consiste in uno studio sempre più approfondito del ruolo della matematica nelle scienze empiriche, in particolare del ruolo che alcuni risultati matematici possono avere nel formulare una *spiegazione* di alcuni fatti empirici. Per prendere un esempio famoso, sembra che il motivo per cui non riusciamo a compiere un percorso circolare attraversando ciascun ponte di Königsberg un'unica volta sia che il grafo di Königsberg non è euleriano (si noti che il *grafo* di Königsberg è un oggetto matematico astratto, proprio come il *numero* degli apostoli). Ma gli esempi possono essere moltiplicati, mostrando quanto essenziale sia il contributo della matematica alla scienza e quindi quanto difficile sia il tentativo di Field di formulare versioni nominalisticamente accettabili delle nostre migliori teorie scientifiche.

Allo spettro opposto si incontrano dei tentativi di sviluppare una risposta alla sfida epistemologica del nominalista mostrando che la conoscenza matematica sia in qualche senso conoscenza logica. Una delle proposte che hanno suscitato maggior interesse in tempi recenti prende spunto da un'idea di Frege. L'idea di base è riformulare il problema della nostra conoscenza di oggetti astratti come i numeri in termini linguistici: come *comprendiamo* il senso di enunciati di identità del tipo 'Il numero dei .... = il numero dei__'? Il punto non è capire come *riformulare* enunciati del genere, ma come *chiarirne il senso*. Frege illustra una risposta possibile a questa domanda considerando come acquisiamo il concetto di direzione, e cosa ci permette di comprendere enunciati come "la direzione della linea a = la direzione della linea b". La proposta di Frege è che il concetto di direzione venga introdotto attraverso la stipulazione del seguente bicondizionale ('Dir' sta per direzione, '//' per la relazione '...è parallela a...'):

DIR Dir(a) = Dir(b) se e solo se a // b

DIR è solo un esempio di un tipo particolare di bicondizionali, detti *principi di astrazione*, la cui forma generale è la seguente:

AP $\Sigma(x) = \Sigma(y) \leftrightarrow E(x, y)$.

dove 'Σ...' è un operatore per formare termini (denotanti oggetti su cui variano le variabili al primo ordine) e '$E(x, y)$' è una relazione di equivalenza. La funzione dei principi di astrazione sarebbe di rendere comprensibili nuovi concetti (quelli che compaiono nel lato sinistro del biconzionale) in termini di una relazione già intellegibile (quella che compare nel lato destro). Nel caso dei numeri, il principio di astrazione pertinente è il cosiddetto principio di Hume, secondo cui il numero degli F è identico al numero dei G se e solo se c'è una corrispondenza biunivoca tra gli F e i G:

HP Num(F) = Num(G) se e solo se $1 - 1$(F, G)

La differenza cruciale tra HP e DIR è che mentre la relazione '...essere parallelo a...' è una relazione tra *oggetti* (linee) ed è quindi esprimibile nella logica del primo ordine, la relazione chiamata in causa in HP ('essere in corrispondenza $1 - 1$') sembra una relazione tra *concetti* ed è quindi più naturale esprimerla al secondo ordine, con una formula come

$$\exists \mathrm{R} \forall x(Fx \rightarrow \exists ! y\ (Gy \wedge Rxy)) \wedge (Gx \rightarrow \exists ! y\ (Fy \wedge Ryx))$$

(si noti la quantificazione in quella che è detta *posizione predicativa*: '∃R...').

Naturalmente, c'è chi pensa che in realtà la logica del secondo ordine non sia altro che teoria degli insiemi mascherata (Quine la pensava così): la quantificazione su relazioni, per esempio, altro non sarebbe che quantificazione su insiemi di coppie ordinate. I difensori della logica del secondo ordine, però, hanno le loro ragioni per dissentire. Sia come sia, la cosa interessante è che aggiungendo agli assiomi logici della logica del secondo ordine HP come unico assioma non logico (ottenendo quella che viene chiamata *l'aritmetica di Frege*), si possono derivare gli assiomi di Peano al secondo ordine. Questo risultato, il cosiddetto *teorema di Frege*, ha riacceso le speranze di fondare l'aritmetica nelle nostra conoscenza di principi logici (la logica del secondo ordine) e definizioni (HP). Naturalmente molto resta da fare: il dibattito sulla logica del secondo ordine è tutt'altro che concluso. Inoltre, l'idea che i principi di astrazione siano un metodo di definizione affidabile è tutt'altro che scontata. Non tutti i principi di astrazione sono infatti accettabili. Per esempio, non è accettabile la famosa *legge fondamentale V* di Frege, secondo cui l'estensione del concetto F e quella del concetto G sono identiche a condizione che tutti gli F siano G e viceversa:

V $\quad e(F) = e(G) \leftrightarrow \forall x(Fx \leftrightarrow Gx)$

Si tratta di un principio di astrazione inaccettabile, perché richiede che nel dominio ci siano tanti oggetti quante sono le estensioni dei concetti, cosa impossibile in base al teorema di Cantor. L'estensione di un concetto è (sostanzialmente) l'insieme di tutti gli oggetti che cadono sotto tale concetto; in un dominio D, quindi, le estensioni dei concetti corrispondono ai sottoinsiemi di D; ma – per il teorema di Cantor – la cardinalità dell'insieme potenza di D è sempre maggiore di quella di D. In nessun dominio è quindi presente una corrispondenza $1 - 1$ tra estensioni di concetti e oggetti, come richiederebbe V. Se le cose stanno così, è naturale domandarsi come distinguere i principi di astrazione accettabili da quelli che non lo sono. La ricerca su questo problema è certamente complessa, ma ha portato risultati interessanti. Detto per inciso, su un piano più metafisico resta poi da capire in che senso un principio di astrazione come HP funga davvero da definizione del concetto di numero: certamente HP ci dice a che condizioni il numero degli F è identico al numero dei G; ma come potremmo, basandoci unicamente su quella definizione, escludere che Giulio Cesare sia un numero? Come potremmo capire che *tipo di cose* sono i numeri?

MATEMATICO: Grazie. Ora mi sembra di avere un quadro un po' più preciso del dibatto. Mi rimane una domanda da fare tanto al platonista quanto al nominalista. Sappiamo tutti che esistono degli enunciati matematici indecidibili nelle nostre teorie matematiche: per fare solo gli esempi più noti, l'ipotesi del Continuo non è decidibile nella teoria degli insiemi standard (ZFC) e ogni teoria aritmetica ricorsivamente enumerabile ha il suo enunciato goedeliano. Immagino che il platonista pensi che questi enunciati siano comunque veri o falsi, indipendentemente dalla nostra capacità di decidere quale sia il caso. Visto che per lui gli insiemi formano un dominio di entità astratte realmente esistenti, le cose devono stare in un modo determinato: o esiste un insieme di numeri reali di cardinalità intermedia tra quella dei naturali e dei reali, oppure un insieme del genere non c'è.

PLATONISTA: In effetti, molti pensano che essere un platonista, cioè un *realista ontologico*, comporti pensare che enunciati indecidibili come quelli citati sopra abbiano un valore di verità definito, cioè siano veri o falsi (corretti/scorretti, se preferite) indipendentemente dalla nostra capacità di stabilire quale sia il caso. Può sembrare in altri termini che essere un realista ontologico comporti essere un *realista sui valori di verità*. In realtà non è così, o almeno non per forza. Si può pensare che l'universo matematico esista indipendentemente da noi, ma che espressioni come 'insieme' o la relazione di appartenenza insiemistica, $\in$, siano indeterminate. In altre parole, ci sarebbero vari modelli della teoria degli insiemi (tutti esistenti), ma non sarebbe determinato a quale facciamo riferimento quando parliamo degli insiemi. Non ci sarebbe un modello *privilegiato*. Nessuno, tra i modelli che soddisfano gli assiomi della teoria, sarebbe *il* modello *inteso* e quindi non ci sarebbe un unico valore di verità per gli enunciati indecidibili (che sono veri in alcuni modelli ed in altri no). Considera questa analogia. L'universo fisico esiste indipendentemente da noi, ma questo non vuol dire che un'espressione come 'pianeta' non possa essere ambigua: potrebbe non essere determinato se certi corpi astronomici siano pianeti oppure no. E il valore di verità di certi enunciati (il numero dei pianeti $=n$) potrebbe dipendere da come si precisa il significato di 'pianeta'.

NOMINALISTA: Viceversa, se è chiaro *come è fatto* un modello, allora gli enunciati indecibili possono avere un valore di verità indipendentemente dalla questione se il modello esista o meno: è sufficiente che sia determinato come starebbero le cose, se una struttura del genere esistesse. Nel caso dell'aritmetica, per esempio, si può pensare che la nostra *concezione* della struttura dei numeri naturali sia sufficiente ad isolare una classe di modelli isomorfi tra di loro. Secondo lo strutturalismo modale che abbiamo incontrato poco sopra questi sistemi di oggetti sono sistemi di oggetti *possibili*, non attuali, ma questo non impedisce che gli enunciati indecidibili siano necessariamente veri o falsi in un sistema di oggetti di quel tipo.

MATEMATICO: Interessante. Mi domando se ci siano altri dibatti ontologici collegati a quello tra platonismo e nominalismo.

ONTOLOGO: Certamente. Un esempio carino è il problema di spiegare come sia possibile la comunicazione tra matematici con vedute filosofiche completamente diverse. Sembra che le divergenze filosofiche non costituiscano una barriera per la comunicazione matematica: mentre fanno teoria dei numeri, Kurt il platonista e Hartry il nominalista si intendono perfettamente. Come è possibile, visto che Kurt interpreta quegli enunciati in un modo che è inaccettabile per Hartry? Si potrebbero fare altri esempi, ma credo che per il momento ci possiamo accontentare. Al di là degli schieramenti, penso sia stato interessante notare come il dibattito di cui ci siamo occupati abbia sollevato delle domande in grado di suggerire progetti di ricerca ricchi di risultati. Inoltre, spero si sia visto come queste domande non nascano solo dalla curiosità dei filosofi, ma anche da una riflessione sulla pratica matematica stessa.

Chi è chi

I protagonisti di questo dialogo, pur essendo fittizi, sono comunque ispirati a figure realmente esistenti. Leggendo l'introduzione a SHAPIRO (2005), i primi capitoli di PANZA e SERENI (2010), la prima parte di PLEBANI (2011), i capitoli 8, 9 e 10 di SHAPIRO (2000), e i capitoli

2 (Parte I), 1 e 3 (Parte II) di LOLLI (2002) ci si può fare un'idea di chi possa recitare la parte del platonista e del nominalista. L'ontologo del nostro dialogo è ispirato a Quine: QUINE (1948) è il super-classico dell'ontologia; si veda VAN INWAGEN (1998) per una ricostruzione e difesa della concezione di Quine dell'ontologia, che può considerarsi la posizione *standard*. (Un altro elemento della posizione standard è che gli oggetti matematici siano oggetti astratti: si veda ROSEN 2012 per una discussione dei vari tentativi di definire la nozione di *oggetto astratto*.) Un testo che ha contribuito in maniera decisiva a dare al dibattito contemporaneo la sua forma attuale è BENACERRAF (1973).

BERTO e PLEBANI (2015) confronta la posizione di Quine con alcune alternative recenti, alcune delle quali prendono sul serio i dubbi dello scettico (il cap. 9 discute l'impatto di tutto questo sul dibattito platonismo-nominalismo). Per menzionarne solo una di queste posizioni devianti, secondo il pluralismo ontologico difeso da TURNER (2010) e MCDANIEL (2009) non esiste una modalità unica di esistenza, ma ci sono vari modi di esistere: i numeri non esistono *concretamente* (in questo senso il nominalista ha ragione), ma esistono *astrattamente* (in questo senso il platonista ha ragione). Il singolo quantificatore esistenziale utilizzato da Quine, $\exists$, andrebbe rimpiazzato con due quantificatori: $\exists_a$ per l'esistenza astratta e $\exists_c$ per l'esistenza concreta.

Nel dialogo vengono menzionate sostanzialmente quattro strategie nominaliste: 1) la strategia modale di Chihara, su cui si può vedere CHIHARA (2005); 2) lo strutturalismo modale di Hellman, di cui SHAPIRO (2000) fornisce un'esposizione elementare (si veda HELLMAN 2005 per un approfondimento); 3) il programma di Field, di cui i primi capitoli di FIELD (1980) forniscono un'eccellente esposizione (mentre i restanti capitoli lo sviluppano nei dettagli). L'introduzione a FIELD (1989) è un classico, e caldamente consigliata (per un'esposizione molto chiara del programma di Field ed un confronto con il programma di Hilbert si veda il cap. 9 di SHAPIRO 2000); 4) una strategia basata sull'uso di congiunzioni/disgiunzioni infinite, discussa recentemente in BURGESS (2008) (si vedano anche i riferimenti lì contenuti) e non distante dalle proposte di YABLO (2002) e HODES (1984). Infine, un riferimento generale sempre utile è BURGESS e ROSEN (1997). Due questioni controverse sono emerse nel testo: l'uso da parte del nominalista di enunciati schematici per riformulare identità aritmetiche di base e la legittimità del logicismo nominalista. Sulla prima questione si vedano VAN MCGEE (1997) e PEDERSEN e ROSSBERG (2010). Sulla seconda, oltre ai già citati HODES (1984) e YABLO (2002), si vedano anche le discussioni del tema contenute in HOFWEBER (2005) e RAYO (di prossima pubblicazione).

Il capitolo 10 di SHAPIRO (2000) fornisce un'introduzione semplice ma molto efficace alle varie forme di strutturalismo. Per una prospettiva critica, si veda MACBRIDE (2005). HELLMAN (2005) è un'esposizione più avanzata. Un contributo recente sul problema di come uno strutturalismo platonista possa gestire casi tipo i e $-i$ è affrontata in SHAPIRO (2008). Precedenti discussioni sono contenute in KERÄNEN (2001) e nei contributi di Shapiro e Keränen raccolti in MACBRIDE (2006).

Sugli argomenti a favore del platonismo che fanno leva sul ruolo della matematica nella scienza empirica rimando al contributo di Andrea Sereni. L'introduzione a HALE e WRIGHT (2001) fornisce una presentazione chiara e dettagliata agli approcci neo-freghiani basati sull'uso di principi di astrazione come il principio di Hume. Lo stesso volume contiene un'appendice con una lista di 'problemi aperti' per questo programma di ricerca. BURGESS (2005) analizza quali teorie matematiche possano essere ricostruite seguendo l'approccio neo-freghiano. Per una discussione delle potenzialità e dei limiti della logica del secondo ordine si vedano SHAPIRO (1991) e BOOLOS (1975, 1984, 1985).

Una discussione illuminante della differenza tra (anti-)realismo ontologico e (anti)realismo sui valori di verità è contenuta nei capitoli 11 e 12 di FIELD (2001). Sul problema della comunicazione si veda LIGGINS (2014).

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

BENACERRAF, P. (1965), 'What numbers could not be', *Philosophical Review*, vol. 74, pp. 47-73.

BENACERRAF, P. (1973), 'Mathematical truth', *Journal of Philosophy*, vol. 70, pp. 661-80.

BERTO, F. e PLEBANI, M. (2015), *Ontology and Metaontology: A Contemporary Guide*, Bloombsury Academic, London e New York.

BLACK, M. (1952), 'The identity of indiscernibles', *Mind*, vol. 61, pp. 153-64 (trad. it. 'L'identità degli indiscernibili', in A. C. Varzi (a cura di), *Metafisica. Classici contemporanei*, Laterza, Roma-Bari, 2008).

BOOLOS, G. (1975), 'On second-order logic', *Journal of Philosophy*, vol. 72 , pp. 509-527.

BOOLOS, G. (1984), 'To be is to be a value of a variable (or to be some values of some variables)', *Journal of Philosophy*, vol. 81, pp. 430-49.

BOOLOS, G. (1985), 'Nominalist platonism', *Philosophical Review*, vol. 94, pp. 327-44.

BURGESS, J. (2005), *Fixing Frege*, Princeton University Press, Princeton (NJ).

BURGESS, J. e ROSEN, G. (1997), *A subject with no object*, Oxford University Press, Oxford.

BURGESS, J. (2008), 'Cats, dogs, and so on', in D. Zimmerman (a cura di), *Oxford Studies in Metaphysics*, Oxford University Press, Oxford, pp. 4-56.

CHIHARA, C. (2005), 'Nominalism', in Shapiro (2005), pp. 483-514.

FIELD, H. (1980), *Science without numbers: A defence of nominalism*, Blackwell, Oxford.

FIELD, H. (1989), *Realism, mathematics and modality*, Blackwell, Oxford.

FIELD, H. (2001), *Truth and the absence of fact*, Oxford University Press, Oxford.

HALE, B. e WRIGHT, C. (2001), *The reason's proper study. Essays towards a neo-Fregean philosophy of mathematics*, Oxford University Press, Oxford.

HELLMAN, G. (2005), 'Structuralism', in Shapiro (2005), pp. 536-62.

HODES, H. (1984), 'Logicism and the ontological commitments of arithmetic', *Journal of Philosophy*, vol. 81, pp. 123-49.

HOFWEBER, T. (2005), 'Number determiners, numbers, and arithmetic', *Philosophical Review*, vol. 114, pp. 179-225.

KERÄNEN, J. (2001) 'The identity problem for realist structuralism', *Philosophia Mathematica*, vol. 9, 308-30.

LEITGEB, H. e LADYMAN, J. (2008), 'Criteria of identity and structuralist ontology', *Philosophia Mathematica*, vol. 16, pp. 388-96.

LIGGINS, D. (2014), 'Abstract expressionism and the communication problem', *British Journal for the Philosophy of Science*, vol. 65, pp. 599-620.

LOLLI, G. (2002), *Filosofia della matematica. L'eredità del Novecento*, il Mulino, Bologna.

MACBRIDE, F. (2005), 'Structuralism reconsidered', in Shapiro (2005), pp. 563-89.

MACBRIDE, F. (a cura di) (2006), *Identity and modality*, Oxford University Press, Oxford.

MCDANIEL, K. (2009), 'Ways of being', in D. Chalmers, D. Manley e R. Wasserman (a cura di), *Metametaphysics. New essays on the foundations of ontology*, Clarendon Press, Oxford, pp. 290-319.

MCGEE, V. (1997), 'How we learn mathematical language', *Philosophical Review* vol. 106, pp. 35-68.

Panza, M. e Sereni, A. (2010), *Il problema di Platone*, Carocci, Roma.

Panza, M. e Sereni, A. (2013), *Plato's problem: An introduction to mathematical platonism*, Palgrave Macmillan, London e New York.

Pedersen, N. J. L. L. e Rossberg, M. (2010), 'Open-endedness, schemas and ontological commitment', *Noûs*, vol. 44, pp. 329-39.

Plebani, M. (2001), *Introduzione alla filosofia della matematica*, Carocci, Roma.

Poincaré, H. (1968), *La science et l'hypothèse*, Flammarion, Paris (trad. it. *La Scienza e l'Ipotesi*, Bompiani, Milano, 2003).

Quine, W. V. O. (1948), 'On what there is', *Review of Metaphysics*, vol. 2, pp. 21-38 (trad. it. 'Su ciò che vi è', in A. C. Varzi (a cura di), *Metafisica. Classici contemporanei*, Laterza, Roma-Bari, 2008).

Quine, W. V. O. (1969), 'Existence and quantification', in J. Margolis (a cura di), *Fact and Existence*, Basil Blackwell, Oxford, pp. 1-17 (trad. it. 'Esistenza e quantificazione', in Quine, *La relativita' ontologica e altri saggi*, Armando, Roma, 1986).

Rayo, A. (di prossima pubblicazione), 'Nominalism, trivialism, logicism', *Philosophia Mathematica*.

Rosen, G. (2012) 'Abstract Objects', The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Spring 2012 Edition), Edward N. Zalta (ed.) URL = <http://plato.stanford.edu/archives/spr2012/entries/abstract-objects/>.

Shapiro, S. (2000), *Thinking about mathematics*, Oxford University Press, Oxford.

Shapiro, S. (a cura di) (2005), *The Oxford handbook of philosophy of mathematics and logic*, Oxford University Press, Oxford.

Shapiro, S. (2008), 'Identity, indiscernibility, and *ante rem* structuralism: The tale of i and $-i$', *Philosophia Mathematica*, vol. 16, pp. 285-309.

Turner, J. (2010), 'Ontological pluralism', *Journal of Philosophy*, vol. 107, pp. 5-34.

Van Inwagen, P. (1998), 'Meta-ontology', *Erkenntnis*, vol. 48, pp. 233-50.

Yablo, S. (2002). 'Abstract objects: A case study', *Philosophical Issues*, vol. 12, pp. 220-40.

Matteo Plebani
Dipartimento di Scienze Umane,
Università degli Studi della Basilicata (Potenza)
e-mail: plebani.matteo@gmail.com