La Matematica nella Società e nella Cultura

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Francesca Acquistapace, Fabrizio Broglia, Giuseppe Tomassini

Ricordo di Alberto Tognoli

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **7** (2014), n.1, p. 139–152.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2014_1_7_1_139_0>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2014.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. VII, Aprile 2014, 139-152

Ricordo di Alberto Tognoli

FRANCESCA ACQUISTAPACE - FABRIZIO BROGLIA
GIUSEPPE TOMASSINI

Il 3 marzo 2008 moriva a Rapallo Alberto Tognoli. La notizia è stata diffusa per suo volere una settimana dopo la cremazione. Era nato a Brescia il 26 Luglio 1937 e, allievo della Classe di Scienze della Scuola Normale nel quadriennio 1956-1960, si era laureato in Matematica il 12 Novembre 1960. Assistente di Geometria nell'Università di Pisa dal 1963, nel novembre 1970 era stato chiamato come professore straordinario di Matematiche Complementari presso la stessa Università. Nel 1974 gli era stato assegnato il Premio Caccioppoli bandito dall'Unione Matematica Italiana. Varie le sedi universitarie che lo hanno avuto come professore – Cosenza, poi di nuovo Pisa, Ferrara, Tours e infine Trento dal 1986 fino al pensionamento nel 2005 – numerosi gli allievi e i collaboratori.

Benché il nome di Tognoli sia indiscutibilmente legato alla *Geometria reale*, i suoi primi lavori riguardano la Topologia, un settore a cui restò sempre legato. Oltre all'introduzione dei metodi topologici nei corsi universitari, era quello il periodo dei grossi risultati di Topologia algebrica e delle Teorie coomologiche che da essa originavano e che fornivano un vasto campo per costruzioni geometriche e controesempi. La ricerca dei controesempi era uno dei tratti salienti della personalità scientifica di Alberto: ricordiamo ancora il suo sguardo quando ci disse di aver trovato in biblioteca un libro (1) dedicato alla costruzione di controesempi. La topologia generale non la raccontava ma la viveva: anche quando preparava esercizi per una

(1) Steen L.A. - Seebach J.A.: *Counterexamples in topology*. Rinehart and Winstone 1970.

prova d'esame, in realtà si cimentava con un problema, con qualche cosa di nuovo per lui.

Il modo di fare matematica di Alberto era molto simile al suo modo di vivere; a quel tempo amava il problema e amava la soluzione rapida e geniale per poi subito scriverla e spedirla ad una rivista senza curarsi troppo della letteratura esistente o di limare a lungo la scrittura. Questa fretta del risultato lo portò anche a qualche delusione e a qualche disputa internazionale. Poi, con il passar del tempo, divenne più sereno. Questo cambiamento lo si notava anche nella vita di tutti i giorni, nelle più piccole cose. Ad esempio una volta, verso la fine di una gita in Apuane, nella fase di discesa, disse: "andiamo piano, godiamoci la stanchezza". Non era più l'Alberto che saliva di forza verso la cima, senza mai fermarsi a guardarsi intorno e poi via, la sera, a fare due passi dopo cena.

Le sue prime ricerche in Geometria reale riguardano quella parte che va sotto il nome di *Geometria analitica reale*, cioè lo studio degli spazi i cui modelli locali sono gli insiemi analitici reali. Esse risentono naturalmente dei risultati e delle problematiche affrontate nel caso complesso e che erano culminate nel corso degli anni '50 con la teoria di Oka-Cartan-Serre. Lo studio della Geometria analitica reale aveva avuto, sempre in quegli anni, pochi ma significativi contributi per merito di Cartan, Bruhat e Whitney (2). In particolare, Cartan aveva osservato che nel caso reale la nozione di spazio analitico, mutuata dal caso complesso, dava luogo ad una categoria di spazi anellati che presentava differenze cruciali rispetto a quella degli spazi complessi: ad esempio, non era più chiaro che cosa dovesse intendersi per componente irriducibile di uno spazio analitico reale, non valeva più il fondamentale teorema di Oka sulla coerenza del fascio strutturale e si presentavano altre "patologie". Cartan stesso aveva fornito un esempio di sottospazio analitico X di $\mathbb{R}^3$ con la proprietà che la sola funzione analitica nulla su X è la funzione identicamente nulla di $\mathbb{R}^3$. Di fronte all'edificio imponente

(2) Séminaire Cartan 51/52; Cartan H.: *Variétés analytiques réelles et variétés analytiques complexes*. Bull. Soc. Math. France, **85** (1957), 77-99: Whitney H.; Bruhat F.: *Quelques propriétés fondamentales des ensembles analytiques-réels*. Comment. Math. Helv., **33** (1959), 132-160.

costruito nel caso complesso a partire dalla teoria di Oka-Cartan-Serre queste differenze strutturali generavano un certo qual scetticismo sulla possibilità e sull'interesse di costruire una teoria analoga (cfr. ad esempio: Grothendieck, Sem. Cartan 1960/61 Exp. 9, pag. 12).

I lavori menzionati, comunque, avevano evidenziato, oltre a quella di cui si è già detto, due possibili categorie di spazi anellati da chiamare ragionevolmente *spazi analitici reali*:

- la categoria degli spazi con fascio strutturale coerente, detti *spazi coerenti*, per i quali la teoria appariva del tutto simile a quella relativa al caso complesso

e

- la categoria degli spazi che sono supporto di un fascio coerente, che nella letteratura matematica saranno poi chiamati C-spazi.

La terminologia usata da Alberto non è costante, ma si comprende sempre perfettamente a quale di queste categorie egli di volta in volta si riferisca.

Nei suoi primi lavori, che coprono un arco di tempo di circa 10 anni a partire dal 1964, egli ripercorre in modo sistematico la teoria degli spazi complessi al fine di estenderne i risultati principali agli spazi analitici reali.

Vengono così generalizzati agli spazi coerenti, non necessariamente immersi in $\mathbb{R}^n$, i Teoremi A e B che Cartan aveva dimostrato per i sottospazi coerenti di $\mathbb{R}^n$. A tal fine, un passo importante è l'esistenza di una complessificazione di Stein che, estendendo la costruzione di Whitney-Bruhat per le varietà analitiche reali, viene dimostrata per gli spazi coerenti. L'esistenza della complessificazione permette di dimostrare per questi spazi la decomposizione in componenti irriducibili. Vale inoltre un teorema di immersione per gli spazi coerenti e per i C-spazi: se X è uno spazio coerente o un C-spazio di dimensione n, l'insieme delle applicazioni $X \to \mathbb{R}^{2n+1}$ iniettive, proprie e regolari sui punti regolari per cui l'immagine è un sottoinsieme analitico in $\mathbb{R}^{2n+1}$, è denso nello spazio delle applicazioni analitiche da $X \to \mathbb{R}^{2n+1}$. Lo schema della dimostrazione è quello presente nel lavoro di Narasimhan sull'immersione degli spazi di Stein.

Il teorema di immersione verrà successivamente esteso a tutti gli spazi analitici reali, con la sola condizione che la dimensione dello spazio tangente di Zariski nei punti singolari sia limitata.

Altro tema, quello della normalizzazione. Alberto, dopo aver osservato che a differenza di quanto congetturava Andreotti, la normalizzazione di un C-spazio non è necessariamente coerente, dimostra che per gli spazi coerenti esiste la normalizzazione e per i C-spazi la normalizzazione debole.

A conclusione della rassegna di questo gruppo di lavori, va citato quello che riguarda l'estensione agli spazi coerenti del teorema di Grauert sulla classificazione dei fibrati su spazi di Stein: per uno spazio coerente la classificazione analitica dei fibrati analitici reali coincide con quella topologica.

Strumento essenziale nella dimostrazione di questo teorema, come in gran parte dell'opera di Alberto, è l'uso raffinato dei classici teoremi di approssimazione di Weierstrass e di Whitney da lui generalizzati in varie forme, sia ampliando l'ambiente in cui si potevano applicare che dimostrandone forme relative.

A titolo di esempio riportiamo una delle sue versioni del Teorema di approssimazione di Whitney.

Siano X uno spazio coerente, X' un suo sottospazio coerente e siano $\varepsilon : X \to]0,+\infty[$, $f : X \to \mathbb{R}$ due funzioni continue tali che $f|_{X'}$ sia analitica. Esiste allora una funzione analitica $\hat{f} : X \to \mathbb{R}$ tale che per ogni $x \in X$

$$|f(x) - \hat{f}(x)| < \varepsilon(x), f|_{X'} = \hat{f}|_{X'}.$$

Un risultato analogo vale nel caso algebrico:

Se X è un sottoinsieme algebrico quasi regolare (3) *di $\mathbb{R}^n$ la cui struttura analitica soggiacente è coerente e f una funzione C^∞ su un intorno aperto U di X, regolare (rispettivamente polinomiale) su X,*

(3) Quasi regolare significa che, pensando la varietà come spazio analitico, in ogni punto l'ideale dei germi di funzioni analitiche che svaniscono sul germe nel punto è generato da germi di funzioni polinomiali.

allora per ogni compatto di U, f può essere approssimata nella topologia C^∞ con funzioni regolari (rispettivamente polinomiali) f_λ tali che $f_\lambda|_X = f|_X$.

La Geometria analitica reale si stava ormai consolidando e affermando come un campo della ricerca matematica con promettenti agganci con altre teorie, come ad esempio la teoria dei modelli, la topologia differenziale, la teoria delle forme quadratiche e degli anelli di valutazione, e destava l'interesse di matematici importanti. Ricordiamo a questo proposito il corso sugli spazi analitici reali tenuto a Pisa da Hironaka nel 1973 che fu occasione di varie, appassionate discussioni.

Indiscutibilmente, uno dei risultati più importanti di Tognoli è la risoluzione della *congettura di Nash* sull'approssimazione di una sottovarietà differenziabile compatta M di $\mathbb{R}^N$ con una varietà algebrica non singolare, che ha portato a quello che nella letteratura matematica è ormai chiamato *Teorema di Nash – Tognoli*. Qui approssimazione significa che in un intorno tubolare di M in uno spazio euclideo di dimensione sufficientemente grande è contenuta una varietà algebrica V non singolare tale che la proiezione canonica dell'intorno tubolare induca un diffeomorfismo tra V e M. Senza voler fare una storia dettagliata del problema, per cui rimandiamo alla esauriente memoria di Ivanov ([4]), vogliamo qui ricordare i risultati noti sull'argomento quando Alberto affrontò il problema. In quel che segue le varietà algebriche considerate saranno sempre non singolari.

Il primo risultato rilevante a questo proposito si deve a Seifert e risale al 1936: se il fibrato normale di M è banale allora M si può approssimare con una porzione di una sottovarietà algebrica; inoltre, se M ha codimensione 1, come varietà approssimante si può prendere una varietà algebrica. Quest'ultimo risultato si ottiene tagliando dal luogo di zeri di un polinomio approssimante l'equazione della varietà M le componenti connesse lontane da M stessa.

([4]) Ivanov N. V., *Approximation of smooth manifolds by real algebraic sets*. Uspekhi Mat. Nauk 37 (1982), no. 1(223), 3-52, 176. English translation: Russian Math. Surveys 37 (1982), no. 1, 1-59.

Il risultato di Seifert viene migliorato vari anni dopo da Nash ([5]) in un lavoro in cui l'approssimazione viene dimostrata senza alcuna ipotesi sul fibrato normale; inoltre, se M è connessa, la porzione di varietà algebrica approssimante è una componente connessa per archi analitici.

Da questo lavoro origina la *congettura di Nash* che chiede se sia possibile approssimare M con una varietà algebrica e non solo con una sua componente connessa.

È merito di Wallace l'aver posto in relazione il problema dell'approssimazione con il cobordismo, dimostrando nel 1957 che una varietà differenziabile cobordante a zero è diffeomorfa ad una varietà algebrica. Ispirato dai risultati di Thom e Milnor, secondo i quali ogni varietà differenziabile compatta è cobordante ad un insieme algebrico, Tognoli nel 1973 dimostra infine che una k-sottovarietà di $\mathbb{R}^n$ connessa e compatta può essere approssimata con una varietà algebrica compatta in un $\mathbb{R}^N$ con $N = \max(n, 2k+1)$.

È questo risultato che gli vale il Premio Caccioppoli nel 1974.

Al tentativo di approssimare la varietà nel suo stesso spazio ambiente Alberto dedicherà molti dei suoi sforzi, così come resterà sempre affezionato all'idea di poter *algebrizzare* spazi geometrici di varia natura come, ad esempio, poliedri e spazi analitici reali coerenti.

A questo proposito ricordiamo una battuta un po' paradossale che amava fare, ogni volta che otteneva un nuovo risultato in questo campo: stava dimostrando – diceva – che la geometria algebrica reale *non serviva a niente* perchè vi si presentavano tutte le patologie del differenziabile.

Anche se in Alberto gli interessi per l'aspetto analitico e per quello algebrico convivevano, tuttavia i metodi che prediligeva erano sicuramente quelli trascendenti piuttosto che quelli puramente algebrici o mutuati dalla logica.

Famosa è rimasta la sua introduzione ad un convegno del 1992 a Trento, da lui stesso organizzato. Era un periodo in cui venivano dimostrati risultati in Geometria algebrica reale con metodi squisita-

([5]) John Nash, *Real Algebraic Manifolds*, Annals of Math., Vol. **56**, No. 3, November 1952.

mente algebrici, come lo spettro reale, la teoria degli ordini e le relazioni con la teoria delle forme quadratiche. Di fronte al gruppo di matematici tedeschi, tra cui Broecker che aveva appena dimostrato con queste tecniche i risultati sull'indice di stabilità degli insiemi semialgebrici, dichiarò che in quel convegno non si *sarebbe assolutamente parlato di forme quadratiche*.

Fin dall'inizio egli aveva evidenziato che in una varietà algebrica reale astratta per il fascio dei germi delle funzioni regolari in generale non valgono né il teorema A né il teorema B; questo accade già per i sottofasci di $\mathcal{O}_{\mathbb{R}^n}$, sostanzialmente perché $H^1(\mathbb{R}^n, \mathcal{O}^*_{\mathbb{R}^n}) \neq 0$. In particolare, per questi fasci il funtore sezioni globali Γ non è esatto. Quelli che danno luogo ad una successione esatta

$$\mathcal{O}_V^m \to \mathcal{O}_V^r \to \mathcal{F} \to 0$$

furono da lui chiamati fasci A-*coerenti* e per essi dimostrò che il funtore Γ è esatto.

La nozione di A-coerenza è legata all'altra nozione, da lui introdotta, di fibrato *fortemente algebrico*: nella letteratura matematica successiva soltanto questi saranno chiamati *fibrati algebrici*.

Tognoli si era accorto infatti che non ogni fibrato algebrico è il pull-back, mediante una mappa regolare, del fibrato tautologico sulla grassmanniana. Si consideri ad esempio il polinomio

$$P(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2(x_1 - 1)^2 + \sum_2^n x_i^2$$

che si annulla solo nei due punti $a = (0, \ldots, 0)$ e $b = (1, 0, \ldots, 0)$ e il ricoprimento di $\mathbb{R}^n$ formato dai due aperti $U = \mathbb{R}^n \setminus \{a\}$ e $V = \mathbb{R}^n \setminus \{b\}$. Il fibrato $F \to \mathbb{R}^n$ che ha $1/P$ come funzione di transizione su $U \cap V$ è algebrico, topologicamente ma non algebricamente banale, quindi non può essere il pull-back del fibrato tautologico sulla grassmanniana mediante una mappa regolare.

Ai fibrati classificati da una mappa regolare, da lui detti *fortemente algebrici*, Alberto dedicò alcuni lavori, dimostrando tra l'altro che ogni varietà differenziabile compatta senza bordo è diffeomorfa ad una varietà algebrica X non singolare per la quale ogni fibrato topologico è fortemente algebrico. Una delle condizioni affinché un fibrato su una varietà algebrica sia fortemente algebrico è che il fascio dei germi delle sue sezioni sia A-coerente.

Come si è già osservato, uno strumento essenziale in quasi tutta la sua opera scientifica è stato l'uso articolato di varie forme dei teoremi di approssimazione. Va notato però che nel contesto algebrico, diversamente da quello analitico, la loro applicazione è resa più complicata per la mancanza di un *teorema dell'intorno tubolare*.

La nozione di fibrato fortemente algebrico si rivelò utile per ovviare a questo problema. Infatti egli dimostrò che se M è una varietà differenziabile compatta in $\mathbb{R}^n$, con n abbastanza grande, contenente una varietà algebrica non singolare V, allora M può essere approssimata nello stesso $\mathbb{R}^n$ da una varietà algebrica non singolare che contiene V se e solo se il fibrato normale di V in M è fortemente algebrico. Per n abbastanza grande si intende $n \geq 2\ \dim M + 1$.

Alberto era curioso verso *tutto* della matematica. Tra i tanti lavori sui temi più svariati vogliamo qui ricordarne uno che lo aveva appassionato in modo particolare, tanto da parlarne spesso. Era una questione di Geometria Enumerativa che gli aveva proposto l'amico Ronga. Più precisamente era ben noto (Chasles e Jonquière) che nel piano proiettivo complesso il numero di coniche tangenti simultaneamente a 5 coniche in posizione generale è 3264. Il problema consisteva nel dimostrare che esistevano configurazioni di coniche nel piano proiettivo reale che ammettevano esattamente lo stesso numero di coniche tangenti. Benché gli autori sapessero che Fulton aveva già dato una risposta affermativa, nel loro articolo danno una costruzione esplicita molto elegante.

Nell'ultimo periodo Alberto ritornò sul tema delle *funzioni di Nash*, cioè le funzioni analitiche che sono algebriche sull'anello dei polinomi. Su questo tema aveva già lavorato nel 1969 dimostrando, sulla scia dei lavori di M. Artin, molti risultati, tra cui il teorema dell'intorno tubolare, per la classe degli spazi analitici i cui modelli locali sono *insiemi di Nash affini* e che allora venivano detti *spazi algebrici*.

Nel caso complesso egli dimostra che se $X \subset \mathbb{C}^n$ è un insieme di Nash chiuso in un dominio di Runge e $K \subset X$ è compatto allora nell'intorno di K ogni fibrato vettoriale topologico su X è isomorfo a un fibrato vettoriale di Nash e due fibrati di Nash finitamente generati e topologicamente isomorfi sono Nash isomorfi. Dimostra inoltre che il fascio dei germi delle funzioni olomorfe nulle su un sottoinsieme di Nash di una varietà algebrica normale è generato da un numero finito di funzioni di Nash.

Come conseguenza di un risultato di estensione locale per le funzioni di Nash complesse egli ottiene allora che ogni sottoinsieme di Nash $X \subset \mathbb{R}^n$ compatto, normale e coerente ha equazioni globali in un intorno semialgebrico di X, risultato che era noto solo nel caso non singolare.

Nell'ultimo periodo della sua vita Alberto si concentrò sulla ricerca di modelli algebrici per insiemi di Nash affini, dimostrando nell'ultimo lavoro che se $X \subset \mathbb{R}^n$ è un insieme di Nash compatto e globale, ogni prodotto $X \times S^r$, $r \geq 0$ è Nash-diffeomorfo ad una varietà algebrica. Nella conclusione egli si rammarica di non riuscire a dimostrare lo stesso risultato per X. Ma, come sappiamo, il suo tempo è finito prima.

Concludiamo con l'elenco dei lavori di Alberto Tognoli in ordine cronologico.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1964] TOGNOLI A., *Osservazioni sulle applicazioni continue fra varietà topologiche*. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3), **18**, 67-85.

[1965] TOGNOLI A., *Osservazioni sulle famiglie di funzioni continue su spazi topologici e condizioni di metrizzabilità*. Rend. Circ. Mat. Palermo (2), **14**, 287-308.

TOGNOLI A., *Un teorema di unicità per le teorie dell'omologia*. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3), **19**, 265-275.

[1966] TOGNOLI A., *Proprietà globali degli spazi analitici reali*. Atti Accad. Naz. Lincei Rend. cl. sci. fis. mat. natur. (8), **41**, 460-463.

TOGNOLI A., *Errata: "Osservazioni sulle famiglie di funzioni continue su spazi topologici e condizioni di metrizzabilità"*. Rend. Circ. Mat. Palermo (2), **15**, 381.

[1967] TOGNOLI A., *Sulla classificazione dei fibrati analitici reali*. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3), **21**, 709-743.

TOGNOLI A., *Proprietà globali degli spazi analitici reali*. Ann. mat. pura appl. (4), **75**, 143-218.

TOGNOLI A., *Sulla classificazione dei fibrati analitici reali*. Atti Accad. Naz. Lincei Rend. cl. sci. fis. mat. natur. (8), **43**, 18-20.

TOGNOLI A. - TOMASSINI G., *Teoremi d'immersione per gli spazi analitici reali*. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3), **21**, 575-598.

[1968] TOGNOLI A., *Immagine di uno spazio analitico reale per un'applicazione analitica*. Ricerche mat., **17**, 79-94.

TOGNOLI A.., *Le varietà analitiche reali, come spazi omogenei*. Boll. Un. Mat. Ital. (4), **1**, 422-426.

TOGNOLI A., *Errata a: "Sulla classificazione dei fibrati analitici reali"*. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3), **22**, 159-161.

TOGNOLI A., *L'analogo del teorema delle matrici olomorfe invertibili nel caso analitico reale*. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3), **22**, 527-558.

[1969] LAZZERI F. - TOGNOLI A., *Alcune proprietà degli spazi quasi algebrici*. Atti Accad. Naz. Lincei Rend. cl. sci. fis. mat. natur. (8), **46**, 653-658.

TOGNOLI A., *Sulla classificazione dei fibrati analitici reali E-principali*. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3), **23**, 75-86.

TOGNOLI A., *Un procedimento per raffinare una topologia*. Boll. Un. Mat. Ital. (4), **2**, 690-695.

[1970] LAZZERI F. - TOGNOLI A., *Alcune proprietà degli spazi algebrici*. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3), **24**, 597-632.

[1971] TOGNOLI A., *Some results in the theory of real analytic spaces*. Pages 149-157 of: *Espaces Analytiques (Séminaire, Bucharest, 1969)*. Editura Acad. R.S.R., Bucharest.

TOGNOLI A., *Teoremi di approssimazione per gli spazi analitici reali coerenti non immergibili in* $\mathbf{R}^n$. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3), **25**, 509-518.

GALBIATI M. - TOGNOLI A., *Alcune proprietà delle varietà algebriche reali*. Atti Accad. Naz. Lincei Rend. cl. sci. fis. mat. natur. (8), **51**, 41-43.

[1972] DALLA VEDOVA E. - TOGNOLI A., *Qualche osservazione sui quozienti degli spazi metrici*. Boll. Un. Mat. Ital. (4), **6**, 80-89.

MILANI A. - TOGNOLI A., *Alcune osservazioni sui cicli algebrici del toro*. Boll. Un. Mat. Ital. (4), **5**, 116-122.

[1973] GALBIATI M. - TOGNOLI A., *Alcune proprietà delle varietà algebriche reali*. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3), **27**, 359-404.

TOGNOLI A., *Su una congettura di Nash*. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3), **27**, 167-185.

TOGNOLI A., *Recenti progressi in geometria algebrica*. Boll. Un. Mat. Ital. (4), **7**(suppl. 1), 119-138.

TOGNOLI A., *Un teorema di approssimazione relativo*. Atti Accad. Naz. Lincei Rend. cl. sci. fis. mat. natur. (8), **54**, 496-502 .

TOGNOLI A., *Una caratterizzazione dei moduli delle sezioni globali di un fascio coerente su uno spazio di Stein*. Boll. Un. Mat. Ital. (4), 8, 181-197.

[1974] ACQUISTAPACE F. - BROGLIA F. - TOGNOLI A., *Sulla non validità di un teorema di approssimazione*. Atti Accad. Naz. Lincei Rend. cl. sci. fis. mat. natur. (8), **55**, 207-209.

ACQUISTAPACE F. - BROGLIA F. - TOGNOLI A., *Sull'insieme di non coerenza di un insieme analitico reale*. Atti Accad. Naz. Lincei Rend. cl. sci. fis. mat. natur. (8), **55**, 42-45.

ACQUISTAPACE F. - BROGLIA F. - TOGNOLI A., *Questioni di immergibilità ed equazioni globali*. Boll. Un. Mat. Ital. (4), **9**, 749-756.

ACQUISTAPACE F. - BROGLIA F. - TOGNOLI A., *Sull'irriducibilità di uno spazio analitico reale*. Boll. Un. Mat. Ital. (4), **9**, 44-50.

LAZZERI F. - STĂNAȘILĂ O. - TOGNOLI A., *Some remarks on q-flat C^∞ functions*. Boll. Un. Mat. Ital. (4), **9**, 402-415.

TOGNOLI A., *Approximation theorems and Nash conjecture*. Pages 53-68. Bull. Soc. Math. France Suppl. Mém., No. 38 of: *Journées de géométrie analytique* (Univ. Poitiers, Poitiers, 1972). Paris: Soc. Math. France.

[1975] ACQUISTAPACE F. - BROGLIA F. - TOGNOLI A., *A relative embedding theorem for Stein spaces*. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa cl. sci. (4), **2**(4), 507-522.

ACQUISTAPACE F. - BROGLIA F. - TOGNOLI A., *Sulla normalizzazione degli spazi analitici reali*. Boll. Un. Mat. Ital. (4), **12**(1-2), 26-36.

D'APRILE M. - TOGNOLI A., *A C^∞ approximation theorem for real analytic varieties*. Boll. Un. Mat. Ital. (4), **12**(1-2), 171-180.

GIANNICO N. - TOGNOLI A., *Un teorema dell'intorno tubolare dipendente da parametro*. Boll. Un. Mat. Ital. (4), **11**(1), 191-197.

TOGNOLI A., *1975a. About the set of non coherence of a real analytic variety*. Pages 145-161 of: *Singularities of analytic spaces* (Centro Internaz. Mat. Estivo, II Ciclo, Bressanone, 1974). Rome: Edizioni Cremonese.

TOGNOLI A., *Pathology and imbedding problems for real analytic spaces*. Pages 162-180 of: *Singularities of analytic spaces* (Centro Internaz. Mat. Estivo, II Ciclo, Bressanone, 1974). Rome: Edizioni Cremonese.

TOGNOLI A., *Sugli spazi metrici numerabili*. Boll. Un. Mat. Ital. (4), **11**(2), 366-369.

[1976] BERETTA LUCIA - TOGNOLI A., *Some basic facts in algebraic geometry on a non algebraically closed field*. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa cl. sci. (4), **3**(2), 341-359.

TOGNOLI A., *A desingularisation theorem for real analytic varieties*. Boll. Un. Mat. Ital. a (5), **13**(3), 623-628.

TOGNOLI A., *A desingularisation theorem for real analytic varieties*. Pages 156-162. Lecture Notes in Math., Vol. 524 of: *Séminaire Pierre Lelong (Analyse), Année 1974/75*. Berlin: Springer.

[1977] BENEDETTI R. - TOGNOLI A., *Teoremi di approssimazione in topologia differenziale. I*. Boll. Un. Mat. Ital. b. (5), **14**(3), 866-887.

[1978] ADKINS W. A. - GIANNI P. - TOGNOLI A., *A Nullstellensatz for an algebraically non-closed field*. Boll. Un. Mat. Ital. b (5), **15**(1), 338-343.

BENEDETTI R. - TOGNOLI A., *Sur les fibrés vectoriels algébriques réels*. C. R. Acad. Sci. Paris sér. a-b, **287**(12), A831-A833.

GIULI E. - TOGNOLI A., *Topological property and initial topologies*. Atti Accad. Naz. Lincei Rend. cl. sci. fis. mat. natur. (8), **64**(2), 163-169.

TOGNOLI A., *Algebraic Geometry and Nash Functions*. Institutiones Mathematicae,[Mathematical Methods] III Academic Press Inc. London New York.

[1979] ACQUISTAPACE F. - BROGLIA F. - TOGNOLI A., *An embedding theorem for real analytic spaces*. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa cl. sci. (4), **6**(3), 415-426.

[1980] BENEDETTI R. - TOGNOLI A., *Approximation theorems in differential topology. II*. Boll. Un. Mat. Ital. b (5), **17**(2), 539-549.

BENEDETTI R. - TOGNOLI A., *Approximation theorems in real algebraic geometry*. Boll. Un. Mat. Ital. suppl., 209-228.

BENEDETTI R. - TOGNOLI A., *On real algebraic vector bundles*. Bull. Sci. Math. (2), **104**(1), 89-112.

TOGNOLI A., *Une remarque sur les fibrés vectoriels analytiques et de Nash*. C. R. Acad. Sci. Paris sér. a-b, **290**(7), A321-A323.

[1981] TANCREDI A. - TOGNOLI A., *On a decomposition of the points of noncoherence of a real-analytic space*. Riv. Mat. Univ. Parma (4), **6**, 401-405.

BERETTA L. - TOGNOLI A., *Complete intersections and algebraic cycles*. Boll. Un. Mat. Ital. b (5), **18**(2), 381-391.

TOGNOLI A., *Algebraic approximation of manifolds and spaces*. Pages 73-94 of: *Bourbaki Seminar*, Vol. 1979/80. Lecture Notes in Math., vol. 842. Berlin: Springer.

[1982] TOGNOLI A., *Coherent algebraic sheaves in real algebraic geometry*. Ann. Univ. Ferrara sez. vii (n.s.), **27**, 115-124.

TOGNOLI A., *Coherent algebraic sheaves in real algebraic geometry*. Pages 341-350 of: *Ordered fields and real algebraic geometry* (San Francisco, Calif., 1981). Contemp. Math., vol. 8. Providence, R.I.: Amer. Math. Soc.

TOGNOLI A., *Le problème d'algébrisation des polyèdres est local*. Pages 451-458 of: *Real algebraic geometry and quadratic forms* (Rennes, 1981). Lecture Notes in Math., vol. 959. Berlin: Springer.

BENEDETTI R. - TOGNOLI A., *Remarks and counterexamples in the theory of real algebraic vector bundles and cycles*. Pages 198-211 of: *Real algebraic geometry and quadratic forms* (Rennes, 1981). Lecture Notes in Math., vol. 959. Berlin: Springer.

[1983] TOGNOLI A., *Problèmes d'approximation pour espaces analytiques réels*. Ann. Univ. Ferrara sez. vii (n.s.), **28**, 55-66.

TOGNOLI A., *Une remarque sur les approximations en géométrie algébrique réelle*. C. R. Acad. Sci. Paris sér. i math., **296**(17), 745-747.

[1984] TOGNOLI A., *Approximation des variétés différentiables par des variétés analytiques et algébriques*. Ann. Univ. Ferrara sez. vii (n.s.), **29**, 55-61.

TOGNOLI A., *Some results on real algebraic cycles*. Rocky mountain j. math., **14**(4), 833-843. *Ordered fields and real algebraic geometry* (Boulder, Colo., 1983).

TOGNOLI A., *Une remarque sur les cycles analytiques des groupes de Lie*. Boll. Un. Mat. Ital. a (6), **3**(3), 401-410.

[1985] TOGNOLI A., *Quelques exemples en géométrie algébrique réelle*. Ann. Univ. Ferrara sez. vii (n.s.), **30**, 149-154

[1986] TOGNOLI A., *Coherent sheaves and algebraic vector bundles*. Ann. Univ. Ferrara sez. vii (n.s.), **31**, 99-123

TOGNOLI A., *Quelques exemples en géométrie algébrique réelle*. Pages 29-34 of: *Séminaire sur la géométrie algébrique réelle, Tome I, II*. Publ. Math. Univ. Paris VII, vol. 24. Paris: Univ. Paris VII.

[1987] TOGNOLI A., *Some results on contraction of real sets*. Boll. Un. Mat. Ital. b (7), **1**(3), 875-887.

[1988] TOGNOLI A., *Analyticity of homology classes*. Proc. Amer. Math. Soc., **104**(3), 920-922.

TOGNOLI A., *Any compact differentiable submanifold of* $\mathbf{R}^n$ *has an algebraic approximation in* $\mathbf{R}^n$. Topology, **27**(2), 205-210.

[1989] BROGLIA F. - TOGNOLI A., *Approximation of* C^∞*-functions without changing their zero-set*. Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **39**(3), 611-632.

BROGLIA F. - TOGNOLI A., *Approximation des fonctions* C^∞ *et points de platitude*. C. R. Acad. Sci. Paris sér. i math., **309**(1), 37-39.

TOGNOLI A., *On the analyticity of the homology*. Rocky mountain j. math., **19**(3), 967-971. Quadratic forms and real algebraic geometry (Corvallis, OR, 1986).

TOGNOLI A., *Sur la surjectivité des applications algébriques injectives*. C. R. Acad. Sci. Paris sér. i math., **309**(6), 359-361.

TANCREDI A. - TOGNOLI A., *Relative approximation theorems of Stein manifolds by Nash manifolds*. Boll. Un. Mat. Ital. a (7), **3**(3), 343-350.

[1990] BERETTA L. - TOGNOLI A., *Nash sets and global equations*. Boll. Un. Mat. Ital. a (7), **4**(1), 31-44.

TANCREDI A. - TOGNOLI A., *On the extension of Nash functions*. Math. Ann., **288**(4), 595-604.

TOGNOLI A., *Approximation algébrique des sous-variétés différentiables*. Pages 71-80 of: *Conference on Analytic Geometry and Complex Analysis* (Italian) (Rocca di Papa, 1988). Sem. Conf., vol. 3. Rende: EditEl.

[1992] BALLICO E. - TOGNOLI A., *Algebraic models defined over* $\mathbf{Q}$ *of differential manifolds*. Geom. Dedicata, **42**(2), 155-161.

[1993] TANCREDI A. - TOGNOLI A., *On the algebraic approximation of Nash maps*. Ann. Univ. Ferrara sez. vii (n.s.), **38**, 107-115.

TANCREDI A. - TOGNOLI A., *Some remarks on the classification of complex Nash vector bundles*. Bull. sci. math., **117**(2), 173-183.

TOGNOLI A., *On the surjectivity of injective real algebraic maps*. Boll. Un. Mat. Ital. b (7), **7**(3), 719-733.

[1995] BROGLIA F. - TOGNOLI A., *Some improvements of approximation theorems*. Boll. Un. Mat. Ital. a (7), **9**(1), 131-141.

[1996] ACQUISTAPACE F. - BROGLIA F. - TOGNOLI A., *Smooth and analytic solutions for analytic linear systems*. Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid, **9**(1), 17-52.

TOGNOLI A., *Mario Raimondo's contributions to real geometry*. Pages 257-260 of: *Lectures in real geometry* (Madrid, 1994). de Gruyter Exp. Math., vol. 23. Berlin: de Gruyter.

TOGNOLI A., *Approximation theorems in real analytic and algebraic geometry*. Pages 113-166 of: *Lectures in real geometry* (Madrid, 1994). de Gruyter Exp. Math., vol. 23. Berlin: de Gruyter.

[1997] RONGA F. - TOGNOLI A. - VUST T., *The number of conics tangent to five given conics: the real case*. Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid, **10**(2), 391-421.

[1998] TANCREDI ALESSANDRO - TOGNOLI A., *On the relative Nash approximation of analytic maps*. Rev. Mat. Complut., **11**(1), 185-200.

[2000] BERETTA L. - TOGNOLI A., *Some remarks about proper real algebraic maps*. Boll. Un. Mat. Ital. sez. b artic. ric. mat. (8), **3**(1), 117-133.

TOGNOLI A., *Some results in the theory of real analytic spaces and of real algebraic varieties*. Pages 205-208 of: *Geometry Seminars*, 1998-1999 (Italian) (Bologna, 1997). Bologna: Univ. Stud. Bologna.

[2002] TANCREDI A. - TOGNOLI A., *On the analytic approximation of differentiable functions from above*. Boll. Unione Mat. Ital. sez. b artic. ric. mat. (8), **5**(1), 227-233.

[2003] TOGNOLI A., *Topological manifolds and real algebraic geometry*. Boll. Un. Mat. Ital. sez. b artic. ric. mat. (8), **6**(3), 545-555.

[2004] TANCREDI A. - TOGNOLI A., *A note on global Nash subvarieties and Artin-Mazur theorem*. Boll. Un. Mat. Ital. sez. b artic. ric. mat. (8), **7**(2), 425-431.

[2006] TANCREDI A. - TOGNOLI A., *On the products of Nash subvarieties by spheres*. Proc. Amer. Math. Soc., **134**(4), 983-987 (electronic).

Francesca Acquistapace
Dipartimento di Matematica, Università di Pisa
E-mail: acquistf@dm.unipi.it

Fabrizio Broglia
Dipartimento di Matematica, Università di Pisa
E-mail: broglia@dm.unipi.it

Giuseppe Tomassini
Scuola Normale Superiore, Pisa
E-mail: g.tomassini@sns.it