La Matematica nella Società e nella Cultura

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Francesco Pinna

Il metodo del punto di sella in $\mathbb{C}^N$

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **6** (2013), n.3 (Fascicolo tesi di Dottorato), p. 525–528.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2013_1_6_3_525_0>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2013.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. VI, Dicembre 2013, 525-528

Il metodo del punto di sella in $\mathbb{C}^N$

FRANCESCO PINNA

Il "metodo del punto di sella", o "metodo del colle", rappresenta un'estensione del metodo di Laplace in campo complesso, ovvero consente di stimare la parte principale in una formula asintotica per integrali su un cammino in $\mathbb{C}$ di funzioni olomorfe dipendenti da un parametro reale ad esponente, al tendere del parametro all'infinito.

L'estensione del metodo del punto di sella ad integrali in $\mathbb{C}^N$, con $N > 1$, è un problema che iniziò ad essere affrontato nella seconda metà del '900, dapprima con un approccio di tipo coomologico. Più precisamente, nel 1977 M. V. Fedoryuk pubblicò *Metod perevala* (in russo, non ne esistono traduzioni), in cui elaborava un metodo del punto di sella in $\mathbb{C}^N$ basandosi su considerazioni coomologiche. Tuttavia, assieme ad un interesse puramente teorico, nella ricerca di un metodo del punto di sella in dimensioni maggiori di uno ve ne era anche uno di carattere più applicativo, e il risultato di Fedoryuk, in questo senso, non ha trovato un riscontro significativo. Si può osservare infatti che in diversi lavori [1, 2] non si è riusciti ad ottenere la stima asintotica cercata per le funzioni integrali esaminate.

Nel 2000 Hata [3] ha elaborato un'estensione del metodo del punto di sella in $\mathbb{C}^2$ grazie alla quale sono stati ottenuti alcuni notevoli risultati nell'ambito dell'Approssimazione Diofantea [3].

Partendo dal risultato di Hata, nel nostro lavoro viene dimostrato un teorema che estende il metodo del punto di sella in $\mathbb{C}^N$ e dal quale si possono trarre varie applicazioni.

Hata in [3] prende in esame un integrale del tipo

$$I_n = \iint_{\alpha\times\beta} f(w,z)^n g(w,z)\,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}z\ , \tag{1}$$

dove $f, g\colon \Delta_2 \to \mathbb{C}$ sono funzioni olomorfe in un aperto $\Delta_2 \subset \mathbb{C}^2$, con $(w,z) \in \alpha \times \beta \subset \Delta_2$. $\alpha, \beta\colon (-1,1) \to \mathbb{C}$ sono due cammini, non necessariamente limitati, di classe C^1 a tratti, e il parametro n è un intero positivo.

Sotto certe ipotesi sulle funzioni e sui cammini, si può ricavare il termine principale in una formula asintotica per I_n, quando n tende a $+\infty$. L'idea di base consiste nell'applicare opportunamente il teorema di Cauchy costruendo una superficie (reale) $\Theta \subset \Delta_2$ equivalente ad $\alpha \times \beta$, lungo cui $|f|$ abbia un unico punto di massimo (w_0, z_0), con $g(w_0, z_0) \neq 0$. Per una maggiore chiarezza espositiva si possono ricercare tali punti di massimo per $|f|$ tra i punti di sella normali di f.

DEFINIZIONE 1. – *Un punto di sella normale di una funzione olomorfa $f(z_1, \ldots, z_N)$ di N variabili complesse è un punto stazionario di f dove f è non nulla e in cui la matrice hessiana di f è non singolare.*

L'obiettivo è quello di trovare un punto di sella normale (w_0, z_0) di f e una superficie Θ con le caratteristiche di cui sopra. Supponendo che I_n sia assolutamente convergente come integrale doppio curvilineo, si ha

$$I_n = \int_\alpha \left(\int_\beta f(w,z)^n g(w,z) \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}w = \int_\beta \left(\int_\alpha f(w,z)^n g(w,z) \mathrm{d}w \right) \mathrm{d}z \ .$$

In questo caso si può cercare di deformare i due cammini α e β separatamente, con il fine di ottenere un nuovo dominio di integrazione Θ. Si procede sfruttando il sistema $\dfrac{\partial f}{\partial w} = \dfrac{\partial f}{\partial z} = 0$ che è soddisfatto nel punto di sella normale (w_0, z_0). Nel caso in cui $\dfrac{\partial^2 f}{\partial w^2}(w_0, z_0) \neq 0$ si può ricavare $w = w(z)$ in un intorno di z_0, e valutando f per $w = w(z)$ si ottiene una funzione della singola variabile libera z. Si cerca quindi di deformare il cammino di integrazione β relativo alla variabile z in un nuovo cammino γ passante per z_0 ed equivalente a β per il teorema di Cauchy, lungo cui il massimo di $|f(w(z), z)|$ sia raggiunto unicamente in z_0, e tale che l'integrale (1) con γ al posto di β sia ancora assolutamente convergente.

Sia $z \in \gamma$ fissato e si consideri $f(w, z)$ come dipendente solo dalla singola variabile libera w. Per ogni $z \in \gamma$ si cerca di deformare il cammino α in un nuovo cammino ad esso equivalente δ_z, dipendente da z, che passi per $w(z)$ e lungo cui $|f(w,z)|$ sia massimo unicamente in $w(z)$. Così facendo è possibile costruire un nuovo dominio d'integrazione $\Theta = \{(w,z) \in \Delta_2\colon z \in \gamma,\ w \in \delta_z\}$ con le caratteristiche volute.

Dopo aver formalizzato questi concetti in opportune ipotesi sulle funzioni f e g e sui cammini α e β, si ottiene il seguente risultato:

TEOREMA 1 [Hata, 2000]. – *Per $n \to +\infty$, vale la formula asintotica*

$$I_n = 2\pi e^{i(\theta_0 + \phi_0)} g(w_0, z_0) \frac{|f(w_0, z_0)|}{\sqrt{|H_f(w_0, z_0)|}} \frac{f(w_0, z_0)^n}{n} \left(1 + O\left(\frac{\log^{\frac{3}{2}+\varepsilon} n}{\sqrt{n}} \right) \right) \tag{2}$$

per ogni $\varepsilon > 0$,

con $\theta_0 = h\pi - \dfrac{1}{2} \arg\left(-\dfrac{H_f(w_0, z_0)}{f(w_0, z_0) \dfrac{\partial^2 f}{\partial w^2}(w_0, z_0)} \right)$, $\phi_0 = k\pi - \dfrac{1}{2} \arg\left(-\dfrac{\dfrac{\partial^2 f}{\partial w^2}(w_0, z_0)}{f(w_0, z_0)} \right)$, $h, k \in \{0, 1\}$.

REMARK 1. – *Nel teorema dimostrato da Hata, il termine d'errore* $O\left(\dfrac{\log^{\frac{3}{2}+\varepsilon} n}{\sqrt{n}} \right)$ *in* (2) *è scritto nella forma più debole* $O\left(\dfrac{\log^3 n}{\sqrt{n}} \right)$.

È naturale domandarsi se il TEOREMA possa essere esteso al caso di integrali in $\mathbb{C}^N$, con N intero positivo maggiore di 2. Hata ritiene che un'estensione simile rappresenti di per se stessa un problema matematico interessante, senza considerare le diverse applicazioni che se ne potrebbero ricavare [3, p. 4559]. Seguendo le idee di Hata è stato possibile ricavare prima una versione in $\mathbb{C}^3$ del teorema, grazie alla quale si è poi riusciti ad ottenere un teorema del metodo del punto di sella in $\mathbb{C}^N$.

Si considera l'integrale

$$I_n = \int \cdots \int_{\alpha_1 \times \cdots \times \alpha_N} f(z_1, \ldots, z_N)^n g(z_1, \ldots, z_N)\, \mathrm{d}z_1 \cdots \mathrm{d}z_N\,, \tag{3}$$

dove $f, g\colon \Delta_N \to \mathbb{C}$ sono funzioni olomorfe in un aperto $\Delta_N \subset \mathbb{C}^N$, con $(z_1, \ldots, z_N) \in \alpha_1 \times \cdots \times \alpha_N \subset \Delta_N$. $\alpha_1, \ldots, \alpha_N\colon (-1,1) \to \mathbb{C}$ sono cammini di classe C^1 a tratti non necessariamente limitati, e il parametro n è un intero positivo.

Come nel caso in cui $N = 2$, l'obiettivo è quello di scrivere il termine principale in una formula asintotica per I_n quando n tende a $+\infty$, dopo aver imposto specifiche ipotesi sui cammini e sulle funzioni. Si applica opportunamente il teorema di Cauchy, costruendo un nuovo dominio di integrazione $\Upsilon \subset \Delta_N$, equivalente a $\alpha_1 \times \cdots \times \alpha_N$, dove $|f|$ sia massimo unicamente in un punto $(z_{1,0}, \ldots, z_{N,0})$, con $g(z_{1,0}, \ldots, z_{N,0}) \neq 0$. Si cercano tali punti di massimo per $|f|$ tra i punti di sella normali di f.
Si ipotizza che l'integrale (3) sia assolutamente convergente come N-integrale curvilineo, si può perciò anche in questo caso cercare di deformare i cammini $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ separatamente, in modo da ottenere un nuovo dominio di integrazione Υ con le caratteristiche di cui sopra.

TEOREMA 2. – *In riferimento all'integrale* (3)*, si considerino le seguenti ipotesi:*

0) *Esiste* $(z_{1,0}, \ldots, z_{N,0}) \in \Delta_N$ *punto di sella normale per* f *tale che* $H_j(z_{1,0}, \ldots, z_{N,0}) \neq 0$ *per ogni* $j = 1, \ldots, N$, *dove* $H_j(z_1, \ldots, z_N)$ *è il determinante hessiano di* $f(z_1, \ldots, z_N)$ *rispetto alle sole variabili* $z_1, \ldots, z_j$.

1) *Per ogni* $j = 2, \ldots, N$ *esistono* $j-1$ *funzioni olomorfe* $z_1 = z_1(z_j, \ldots, z_N), \ldots, z_{j-1} = z_{j-1}(z_j, \ldots, z_N)$, $z_1, \ldots, z_{j-1}\colon \mathcal{D}_{N-j+1} \to \mathbb{C}$, $\mathcal{D}_{N-j+1} \subset \mathbb{C}^{N-j+1}$ *aperto, tali che per ogni* $(z_j, \ldots, z_N) \in \mathcal{D}_{N-j+1}$ *valga*

$$\big(z_1(z_j, \ldots, z_N), \ldots, z_{j-1}(z_j, \ldots, z_N)\,,\, z_j\,, \ldots,\, z_N\big) \in \Delta_N,$$
$$f\big(z_1(z_j, \ldots, z_N), \ldots, z_{j-1}(z_j, \ldots, z_N)\,,\, z_j\,, \ldots,\, z_N\big) \neq 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial z_1}\big(z_1(z_j, \ldots, z_N), \ldots, z_{j-1}(z_j, \ldots, z_N)\,,\, z_j\,, \ldots,\, z_N\big) = \ldots$$
$$\ldots = \frac{\partial f}{\partial z_{j-1}}\big(z_1(z_j, \ldots, z_N), \ldots, z_{j-1}(z_j, \ldots, z_N),\, z_j, \ldots, z_N\big) = 0,$$

e $z_1(z_{j,0}, \ldots, z_{N,0}) = z_{1,0}, \ldots, z_{j-1}(z_{j,0}, \ldots, z_{N,0}) = z_{j-1,0}$.

In più, per ogni intero k *con* $j < k \le N$, *se* $(z_k, \ldots, z_N) \in \mathcal{D}_{N-k+1}$, *allora*

$$\big(z_j(z_k, \ldots, z_N), \ldots, z_{k-1}(z_k, \ldots, z_N)\,,\, z_k, \ldots, z_N\big) \in \mathcal{D}_{N-j+1}\,.$$

2.1) *Esiste un cammino d'integrazione* $\lambda_N \subset \mathcal{D}_1$ *per la variabile* z_N, *parametrizzato da* $t_N \in (-1,1)$, *tale che* $\lambda_N(0) = z_{N,0}$, *e inoltre, per ogni* $z_N \in \lambda_N \setminus \{z_{N,0}\}$, *si abbia*

$$|\, f(\, z_1(z_N)\,, \ldots,\, z_{N-1}(z_N)\,,\, z_N\,)| < \big|f\big(z_{1,0}\,, \ldots, z_{N,0}\big)\big|$$

e, per ogni $z_1 \in \alpha_1, \ldots, z_{N-1} \in \alpha_{N-1}$,

$$\int_{\alpha_N} f(z_1, \ldots, z_N)^n g(z_1, \ldots, z_N)\, \mathrm{d}z_N = \int_{\lambda_N} f(z_1, \ldots, z_N)^n g(z_1, \ldots, z_N)\, \mathrm{d}z_N.$$

Si richiede ulteriormente che $I_n = \int\limits_{\alpha_1\times\cdots\times\alpha_{N-1}\times\lambda_N}\!\!\cdots\int f(z_1,\ldots,z_N)^n g(z_1,\ldots,z_N)\,\mathrm{d}z_1\cdots\mathrm{d}z_n$ *sia assolutamente convergente.*

2.N) *Per ogni* $z_2=\lambda_2(t_2;t_3,\ldots,t_N)\,,\ldots,\,z_{N-1}=\lambda_{N-1}(t_{N-1};t_N)\,,\,z_N=\lambda_N(t_N)$ *fissati, esiste un cammino d'integrazione* $\lambda_1\subset\mathbb{C}$ *per la variabile* z_1, *dipendente da* $t_2,\ldots,t_N$ *e parametrizzato da* $t_1\in(-1,1)$, *tale che* $\lambda_1\times\{z_2,\ldots,z_N\}\subset\varDelta_N$, $\lambda_1(0;t_2,\ldots,t_N)=z_1(z_2,\ldots,z_N)$, *e inoltre, per ogni* $z_1\in\lambda_1\backslash\{z_1(z_2,\ldots,z_N)\}$, *sia*

$$|\,f(z_1,z_2,\ldots,z_N)|<\big|\,f\big(z_1(z_2,z_3,\ldots,z_N)\,,\,z_2\,,\,z_3\,,\ldots,\,z_N\,\big)\big|$$

e $\int\limits_{\alpha_1} f(z_1,\ldots,z_N)^n g(z_1,\ldots,z_N)\,\mathrm{d}z_1=\int\limits_{\lambda_1} f(z_1,\ldots,z_N)^n g(z_1,\ldots,z_N)\,\mathrm{d}z_1.$

3) $g(z_{1,0},\ldots,z_{N,0})\neq 0$, *e* $\int\limits_{\lambda_N}\cdots\Big(\int\limits_{\lambda_1}|f(z_1,\ldots,z_N)|^m|g(z_1,\ldots,z_N)|\,|\mathrm{d}z_1|\Big)\cdots|\mathrm{d}z_N|<+\infty$ *per qualche intero positivo* m.

Nelle ipotesi **0), 1), 2.1),…, 2.N), 3)**, *per* $n\to+\infty$ *vale la formula asintotica:*

$$I_n=(2\pi)^{\frac{N}{2}}e^{i\left(\phi_{1,0}+\cdots+\phi_{N,0}\right)}g\big(z_{1,0}\,,\ldots,z_{N,0}\big)\,\frac{\big|f\big(z_{1,0}\,,\ldots,z_{N,0}\big)\big|^{\frac{N}{2}}}{\sqrt{\big|H_f\big(z_{1,0}\,,\ldots,z_{N,0}\big)\big|}}\,\frac{f\big(z_{1,0}\,,\ldots,z_{N,0}\big)^n}{n^{\frac{N}{2}}}\times$$
$$\times\left(1+O\left(\frac{\log^{\frac{3}{2}+\varepsilon}n}{\sqrt{n}}\right)\right)\quad \textit{per ogni } \varepsilon>0\,,$$

dove $\phi_{j,0}=k_j\pi-\dfrac{1}{2}\arg\left(-\dfrac{1}{f\big(z_{1,0}\,,\ldots,z_{N,0}\big)}\dfrac{H_j\big(z_{1,0}\,,\ldots,z_{N,0}\big)}{H_{j-1}\big(z_{1,0}\,,\ldots,z_{N,0}\big)}\right)$, *con* $k_j\in\{0,1\}$, *per* $j=1,\ldots,N$, *e con* $H_0(z_{1,0}\,,\ldots,z_{N,0})=1$.

In conclusione, vengono mostrate alcune applicazioni del TEOREMA 2. Si introduce un'estensione in $\mathbb{C}^N$ della classica funzione di Airy, ricavata in accordo con considerazioni già presenti in letteratura [1, 2], e successivamente se ne studia il comportamento asintotico nel caso $N=2$. Si evidenzia nello specifico come, modificando il dominio d'integrazione della funzione integrale, tale stima asintotica sia differente poiché cambia il punto di sella in cui applicare il metodo.

Nell'ultimo paragrafo si valuta il comportamento asintotico dell'integrale di una funzione razionale da $\mathbb{C}^3$ in $\mathbb{C}$, che rappresenta un caso particolare di una classe di funzioni che hanno rilevanza nell'Approssimazione Diofantea.

BIBLIOGRAFIA

[1] URSELL F., *Integrals with a large parameter: a double complex integral with four nearly coincident saddle-points*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., **87** (1980), 249-273.

[2] KAMINSKI D., *On the n-variable saddle point and steepest descent methods*, Asymptotic and computational analysis (Winnipeg, MB), **124** (1990), 627-637.

[3] HATA M., $\mathbb{C}^2$*-saddle method and Beukers' integral*, Trans. Amer. Math. Soc., **352** (2000), 4557-4583.

Dipartimento di Matematica "Ulisse Dini", Università degli Studi di Firenze
e-mail: fpinna@math.unifi.it
Dottorato in Matematica con sede presso l'Università degli Studi di Firenze – Ciclo XXIV
Cotutore e Direttore di Ricerca: Prof. Carlo Viola, Università di Pisa
Tutore: Prof. Graziano Gentili, Università degli Studi di Firenze