La Matematica nella Società e nella Cultura

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Immacolata Oliva

Una rappresentazione simbolica via momenti dei processi di Lévy ed applicazioni

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **6** (2013), n.3 (Fascicolo tesi di Dottorato), p. 521–524.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2013_1_6_3_521_0>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2013.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. VI, Dicembre 2013, 521-524

Una rappresentazione simbolica via momenti dei processi di Lévy ed applicazioni

Immacolata Oliva

1. – Introduzione

Una famiglia di polinomi $\{P(x,t)\}_{t \geq 0}$ si dice essere *armonica spazio-temporale* rispetto ad un processo stocastico $\{X_t\}_{t\geq 0}$ se $E[P(X_t,t) \mid \mathcal{F}_s] = P(X_s,s)$, per ogni $s \leq t$, dove $\mathcal{F}_s = \sigma(X_\tau : \tau \leq s)$ è la filtrazione naturale associata al processo $\{X_t\}_{t\geq 0}$. L'utilità dei polinomi armonici spazio-temporali rispetto ai processi di Lévy risiede nel fatto che il processo stocastico $\{P(X_t,t)\}$ è una martingala, pur non essendolo, in generale, il processo $\{X_t\}$. Dunque, determinare polinomi per i quali il processo stocastico ottenuto sostituendo l'indeterminata x con il processo di Lévy $\{X_t\}_{t\geq 0}$ sia una martingala è significativo nell'ottica di eventuali applicazioni in altri ambiti della matematica, come ad esempio la finanza matematica.

Questa tesi presenta una versione simbolica dei processi di Lévy con applicazioni alla teoria dei polinomi armonici spazio-temporali ed alla rappresentazione sotto forma di momenti di certe successioni polinomiali multivariate, utilizzando un metodo simbolico, noto il letteratura come calcolo umbrale classico.

2. – Il calcolo umbrale classico

Il *calcolo umbrale classico*, nella versione introdotta da Rota e Taylor nel 1994 [7], è una sintassi costituita da un alfabeto di simboli $\mathcal{A} = \{\alpha, \beta, \gamma, \ldots\}$, detti ombre, e da un opportuno funzionale lineare E, detto valutazione, per il quale vale la seguente proprietà di *incorrelazione* $E[x^n \alpha^i \beta^j \cdots \gamma^k] = x^n E[\alpha^i] E[\beta^j] \cdots E[\gamma^k]$, per ogni intero positivo $n, i, j, \ldots, k$, che richiama il funzionale aspettazione della teoria della probabilità. Le ombre rappresentano, così, lo scheletro delle variabili aleatorie, senza alcun riferimento ad uno spazio di probabilità ed ombre incorrelate corrispondono a variabili aleatorie indipendenti [1].

Gli strumenti basilari del calcolo umbrale sono essenzialmente due. Il primo consiste nel rappresentare, grazie alla valutazione E, una successione numerica $1, a_1, a_2, \ldots$, detta successione dei *momenti* dell'ombra α, tramite la sequenza di ombre $1, \alpha, \alpha^2, \ldots$.

Il secondo concerne il fatto che ombre distinte possono rappresentare la stessa successione $\{a_n\}$. In tal caso, le ombre si dicono *simili* e scriveremo $\alpha \equiv \gamma$. Il parallelismo con la teoria della probabilità è di nuovo evidente, infatti ombre simili corrispondono a variabili aleatorie identicamente distribuite.

Date n ombre incorrelate $\alpha', \alpha'', \ldots, \alpha'''$, simili all'ombra α, la loro somma $\alpha' + \alpha'' + \ldots + \alpha'''$ è rappresentata dal simbolo $n.\alpha$, detto *prodotto-punto* di n e α.

Attraverso considerazioni di natura puramente algebrica, è possibile sostituire l'intero n con $t \in \mathbf{R}$ oppure $\gamma \in \mathcal{A}$, ottenendo le ombre ausiliarie $t.\alpha$ e $\gamma.\alpha$.

Uno degli strumenti impiegati per lavorare con un'ombra α è la sua *funzione generatrice*

$$f(\alpha, z) = E[e^{\alpha z}] = 1 + \sum_{k \geq 1} \frac{z^k}{k!}.$$

Si tratta di una serie formale di potenze, per cui non si considerano questioni di convergenza. Le operazioni tra funzioni generatrici corrispondono ad altrettante operazioni tra le rispettive ombre. A titolo di esempio, la somma di funzioni generatrici corrisponde alla *somma disgiunta* di ombre $\alpha \dot{+} \gamma$, tale che $f(\alpha \dot{+} \gamma, z) = f(\alpha, z) + f(\gamma, z) - 1$.

Esempi di ombre sono: l'ombra di Bell β, i cui momenti sono i numeri di Bell, l'ombra singleton χ tale che $f(\chi, z) = 1 + \chi$, e l'ombra gaussiana $m + \beta.(s\delta)$, controparte umbrale di una variabile aleatoria gaussiana $N(m, s^2)$.

Un ruolo fondamentale è giocato dalle ombre cumulanti, cioè ombre i cui momenti coincidono con le successioni dei cumulanti associate ad una variabile aleatoria. I cumulanti possono essere analizzati da un punto di vista algebrico, grazie alle proprietà di additività e di invarianza per traslazioni. Per questo motivo, i cumulanti sono stati introdotti non solo nel contesto della teoria della probabilità classica, ma anche nel contesto booleano ed in quello della free probability.

Utilizzando la parametrizzazione umbrale dei cumulanti in termini di momenti e viceversa, viene introdotto un algoritmo, basato su un'unica formula per i cumulanti classici, booleani e free, semplice e computazionalmente efficiente, che permette tutte le conversioni tra momenti e cumulanti. Vengono fatte delle comparazioni con procedure preesistenti, specialmente nel caso free, e vengono poi dati esempi di applicazioni ad alcune distribuzioni di probabilità note [3].

3. – Rappresentazione simbolica dei processi di Lévy

Le ombre cumulanti intervengono pesantemente nella rappresentazione simbolica dei processi di Lévy, ossia processi stocastici i cui incrementi sono indipendenti e stazionari. In particolare, è la proprietà di infinita divisibilità di cui i processi di Lévy godono a consentire l'impiego del simbolo $t.\alpha$ nella rappresentazione simbolica di tali processi. Ogni ombra α è esprimibile in termini della sua ombra cumulante, $\alpha \equiv \beta.\kappa_\alpha$. Pertanto una rappresentazone simbolica dei processi di Lévy si ottiene mediante l'ombra ausiliaria $t.\beta.\kappa_\alpha$. È stata quindi studiata la connessione tra processi di Lévy e i cumulanti booleani e free. La natura dell'ombra κ_α puó essere ulteriormente specificata, come mostrato nel seguente teorema.

TEOREMA 1. – *Un processo di Lévy $\{X_t\}_{t \geq 0}$ è umbralmente rappresentato dalla famiglia di ombre ausiliarie $\{t.\beta.[c_0\chi \dot{+} s\delta \dot{+} \gamma]\}_{t \geq 0}$, dove $c_0 = m + \int_{\{|x|>1\}} x\nu(dx) < \infty$, χ è l'ombra singleton, $s \in \boldsymbol{R}^+$, δ è la controparte umbrale di una variabile aleatoria gaussiana standard e γ è l'ombra associata alla misura di Lévy $\nu(dx)$.*

I cumulanti giocano lo stesso ruolo chiave anche in un'altra classe di polinomi, detti *polinomi di Kailath-Segall*, non necessariamente armonici spazio-temporali, che legano le variazioni $X_t^{(1)} = X_t, X_t^{(2)} = [X,X]_t, \ldots, X_t^{(n)} = \sum_{s \geq t} (\Delta X_s)^n, n \geq 3$, di un processo di Lévy $\{X_t\}_{t \geq 0}$ ai suoi integrali stocastici iterati $P_t^{(0)} = 1, P_t^{(1)} = X_t, \ldots, P_t^{(n)} = \int_0^t P_{s-}^{(n-1)} \mathrm{d}X_s$, $n \geq 2$. Si dimostra il seguente

TEOREMA 2. – *Date due famiglie di ombre* $\{\Upsilon_t\}_{t \geq 0}$, $\{\sigma_t\}_{t \geq 0}$ *tali che* $E[\Upsilon_t^n] = n! E\left[P_t^{(n)}\right]$ *e* $E[\sigma_t^n] = E\left[X_t^{(n)}\right]$ *rispettivamente, si ha* $\Upsilon_t \equiv \bar{\beta}.[(\chi.\chi)\sigma_t]$ *e* $(\chi.\chi)\sigma_t \equiv \chi.\Upsilon_t$.

L'equivalenza $\Upsilon_t \equiv \beta.[(\chi.\chi)\sigma_t]$ è la versione umbrale della ben nota *formula di Kailath-Segall* di cui l'equivalenza $(\chi.\chi)\sigma_t \equiv \chi.\Upsilon_t$ rappresenta una inversione. Grazie al teorema 2 si dimostra che la formula di Kailath-Segall è una generalizzazione delle ben note formule che danno i polinomi simmetrici elementari in termini dei polinomi simmetrici power sum.

4. – Polinomi aromonici spazio-temporali

Per i risultati conseguiti in questa tesi, è fondamentale la definizione di un nuovo operatore sull'alfabeto $\mathcal{A}$, detto *valutazione condizionata* e che somiglia alla ben nota attesa condizionata delle variabili aleatorie, tale che $E[x^m \alpha^n \gamma^i \delta^j \cdots \ \alpha] = x^m \alpha^n E[\gamma^i] E[\delta^j] \cdots$, dove le ombre $\alpha, \gamma, \delta, \ldots$ sono incorrelate e $m, n, k, i, j, \ldots$ sono interi nonnegativi [4].

I polinomi $\{P(x,t)\}_{t \geq 0}$ si dicono essere *armonici spazio-temporale* rispetto alla famiglia di ombre ausiliarie $\{t.\alpha\}_{t \geq 0}$ se $E[P(t.\alpha, t) \mid s.\alpha] = P(s.\alpha, s)$, per ogni $s \leq t$.

Si dimostra il seguente

TEOREMA 3. – *Per tutti gli interi nonnegativi* k, *la famiglia di polinomi*

$$Q_k(x,t) = E[(x - t.\alpha)^k] \in \boldsymbol{R}[x] \tag{1}$$

è armonica spazio-temporale rispetto a $\{t.\alpha\}_{t \geq 0}$.

La famiglia di polinomi introdotta nel Teorema 3 si basa su una semplice forma chiusa dei coefficienti, data dal seguente

TEOREMA 4. – *Un polinomio* $P(x,t) = \sum_{j=0}^{k} p_j(t)\, x^j$, *di grado* k *per ogni* $t \geq 0$ *è armonico spazio-temporale rispetto alla famiglia di ombre ausiliarie* $\{t.\alpha\}_{t \geq 0}$ *se e soltanto se* $p_j(t) = \sum_{i=j}^{k} \binom{i}{j} p_i(0)\, E[(-t.\alpha)^{i-j}]$, *per* $j = 0, \ldots, k$.

Tutti gli esempi classici di polinomi armonici spazio-temporali appartengono alla famiglia di polinomi della forma (1), quali, ad esempio, i polinomi di Hermite, armonici spazio-temporali rispetto al Moto Browniano, i polinomi di Poisson-Charlier rispetto ai processi di Poisson compensati, i polinomi attuariali ed i polinomi di Laguerre rispetto ai processi Gamma, i polinomi di Meixner di primo tipo rispetto ai processi di Pascal, i polinomi di Bernoulli, Eulero e Krawtchuk rispetto ad opportune passeggiate aleatorie. Il Teorema 3 permette, poi, di definire nuove famiglie di polinomi armonici spazio-temporali rispetto a particolari processi di Lévy, quali i processi gaussiani inversi ed i processi stabili.

5. – Caso multivariato

Mediante il *calcolo umbrale multivariato* [2], la teoria dei polinomi armonici spazio-temporali è stata introdotta nel caso multidimensionale.

Generalizzando opportunamente la definizione di valutazione condizionata al caso multivariato, sono state costruite famiglie di polinomi armonici spazio-temporali multivariati nelle quali rientrano i polinomi di Hermite multivariati $H_v(x)$, che sono infatti armonici spazio-temporali rispetto al moto Browniano multidimensionale. La rappresentazione sotto forma di polinomi armonici spazio-temporali consente la cosiddetta rappresentazione via momenti di tali polinomi e facilita lo studio delle loro proprietà. Anche i polinomi di Bernoulli e di Eulero multivariati sono stati rappresentati come polinomi armonici spazio-temporali multivariati rispetto ad opportuni processi di Lévy multidimensionali. Questa rappresentazione fornisce molte proprietà di tali polinomi, oltre ad una nuova e semplice relazione tra le due classi [5].

BIBLIOGRAFIA

[1] Di Nardo E., Senato D. (2001), *Umbral nature of the Poisson random variables*. In: Crapo, H. Senato, D. eds., *Algebraic Combinatorics and Computer science: a tribute to Gian-Carlo Rota*, Springer-Verlag.

[2] Di Nardo E., Guarino G., Senato D. (2011), *A new algorithm for computing the multivariate Faà di Bruno's formula*. Appl. Math. Comp. **217**, 6286-6295.

[3] Di Nardo E., Oliva I. (2009), *On the computation of classical, boolean and free cumulants*. Appl. Math. Comp. **208**, 347-354.

[4] Di Nardo E., Oliva I. (2011), *A new family of time-space harmonic polynomials with respect to Lévy processes*. Ann. Mat. Pura Appl. In press.

[5] Di Nardo E., Oliva I. (2011), *On a Symbolic Version of Multivariate Lévy Processes*. AIP Conf. Proc., **1389**, 345-348 doi:10.1063/1.363673.

[6] Di Nardo E., Oliva I. (2011), *On some applications of a symbolic representation of non-centered Lévy processes*. Comm. Statist. Theory Methods. In press.

[7] Rota G.-C., Taylor B.D. (1994), *The classical umbral calculus*. SIAM J. Math. Anal. **25 (2)**, 694-711.

Dipartimento di matematica, Università di Bologna
e-mail: immacolata.oliva2@unibo.it
Dottorato in matematica con sede presso l'Università di Bologna – Ciclo XXIV
Direttore di ricerca: Elvira Di Nardo (Università degli Studi della Basilicata), Marilena Barnabei (Università di Bologna)