La Matematica nella Società e nella Cultura

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Paolo Musolino

Problemi di perturbazione singolare e di omogeneizzazione in un dominio periodicamente perforato. Un approccio funzionale analitco

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **6** (2013), n.3 (Fascicolo tesi di Dottorato), p. 517–520.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2013_1_6_3_517_0>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2013.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. VI, Dicembre 2013, 517-520

Problemi di perturbazione singolare e di omogeneizzazione in un dominio periodicamente perforato. Un approccio funzionale analitco

Paolo Musolino

La tesi di dottorato è dedicata allo studio del comportamento asintotico delle soluzioni di problemi di perturbazione singolare e di omogeneizzazione nello spazio euclideo $\mathbb{R}^n$ in cui vengono eseguiti in maniera periodica dei "piccoli" fori.

Strutture periodiche e problemi ad esse legati appaiono spesso in natura e giocano un ruolo importante in molti problemi in meccanica e fisica. In particolare, essi hanno diverse applicazioni, specialmente in relazione ai materiali compositi, per i quali è di interesse studiare proprietà "medie" o "limite" in corrispondenza di "piccoli" valori del diametro dei fori o della misura della cella di periodicità.

Come noto, esiste una vasta letteratura dedicata alla studio di problemi di perturbazione singolare e di omogeneizzazione per equazioni e sistemi di equazioni, in particolare per quanto riguarda il caso lineare. In questa tesi sono state considerate sia condizioni al contorno lineari che non lineari.

Descriviamo brevemente di seguito uno di questi problemi.

Sia $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Introduciamo la cella fondamentale $A \equiv]0,1[^n$ e fissiamo un punto w in A. Prendiamo un sottoinsieme aperto limitato connesso Ω di $\mathbb{R}^n$, della classe di Schauder $C^{1,\alpha}$, con $\alpha \in]0,1[$, tale che l'origine 0 di $\mathbb{R}^n$ appartenga ad Ω e tale che l'insieme complementare della chiusura $\mathrm{cl}\Omega$ di Ω sia connesso. Se $\varepsilon \in \mathbb{R}$, poniamo

$$\Omega_\varepsilon \equiv w + \varepsilon\Omega\,,$$

e indichiamo con ν_{Ω_ε} la normale esterna a Ω_ε per ogni $\varepsilon \neq 0$.

Prendendo ε_0 positivo e sufficientemente piccolo, possiamo assumere che

$$\mathrm{cl}\Omega_\varepsilon \subseteq A \qquad \forall \varepsilon \in]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[\,.$$

Per $\varepsilon \in]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[$, l'insieme Ω_ε rappresenta la perforazione della cella fondamentale A. Osserviamo che se $\varepsilon \in]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[\setminus \{0\}$, l'insieme Ω_ε è un aperto limitato connesso di classe $C^{1,\alpha}$ contenuto nella cella fondamentale A. Per $\varepsilon = 0$ l'insieme Ω_ε degenera in $\{w\}$. Definiamo quindi l'insieme periodicamente perforato $T(\varepsilon)$ ponendo

$$T(\varepsilon) \equiv \mathbb{R}^n \setminus \cup_{z\in\mathbb{Z}^n}\mathrm{cl}(z + \Omega_\varepsilon) \qquad \forall \varepsilon \in]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[\,.$$

In altri termini, l'insieme $T(\varepsilon)$ è ottenuto eseguendo in $\mathbb{R}^n$ un insieme periodico di perforazioni, ciascuna delle quali congruente a Ω_ε. Osserviamo che per $\varepsilon = 0$ l'insieme $T(\varepsilon)$ degenera in $\mathbb{R}^n \setminus (w + \mathbb{Z}^n)$.

Per $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$, consideriamo il seguente problema al contorno per l'equazione di Laplace nell'insieme periodicamente perforato $T(\varepsilon)$

$$
(1) \qquad \begin{cases} \Delta u(x) = 0 & \forall\, x \in T(\varepsilon)\,, \\ u(x+z) = u(x) & \forall\, x \in \operatorname{cl} T(\varepsilon)\,, \qquad \forall\, z \in \mathbb{Z}^n\,, \\ B_\varepsilon\left(x, u(x), \dfrac{\partial u(x)}{\partial \nu_{\Omega_\varepsilon}}\right) = 0 & \forall\, x \in \partial\, \Omega_\varepsilon\,, \end{cases}
$$

ove B_ε è un'opportuna funzione da $\partial\Omega_\varepsilon \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che rappresenta la condizione al contorno del problema (1). In particolare, sono state considerate sia condizioni al contorno lineari che non lineari. Per esempio, per opportune scelte della funzione B_ε, il problema (1) può essere un problema di Dirichlet, di Neumann o di Robin. Assumiamo che per ogni ε positivo e sufficientemente piccolo il problema (1) abbia una certa soluzione che indichiamo con $u[\varepsilon]$. Il nostro scopo è quello di studiare il comportamento asintotico della soluzione $u[\varepsilon]$ (o di funzioni della soluzione come l'integrale dell'energia $\int_{A \setminus \operatorname{cl}\Omega_\varepsilon} |Du[\varepsilon](x)|^2\, dx$) al tendere del parametro ε a 0. È naturale quindi porsi, per esempio, le seguenti domande.

(i) Sia $x \in \mathbb{R}^n \setminus (w + \mathbb{Z}^n)$ fissato. Cosa si può dire della funzione $\varepsilon \mapsto u[\varepsilon](x)$ per ε piccolo e positivo in prossimità del valore degenere $\varepsilon = 0$?

(ii) Sia $t \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega$ fissato. Cosa si può dire della funzione $\varepsilon \mapsto u[\varepsilon](w + \varepsilon t)$ per ε piccolo e positivo in prossimità del valore degenere $\varepsilon = 0$?

Osserviamo che la domanda (i) è legata a ciò che si può chiamare il "comportamento macroscopico" della soluzione lontano dalle perforazioni, mentre la domanda (ii) riguarda il "comportamento microscopico" della soluzione in prossimità della singolarità del dominio.

Domande di questo tipo sono state a lungo analizzate con tecniche di analisi asintotica e teoria dell'omogeneizzazione. Utilizzando metodi di analisi asintotica, si potrebbe rispondere alla domanda (i) scrivendo un'espansione asintotica di $u[\varepsilon](x)$ in termini del parametro ε in prossimità del valore degenere 0. In questo contesto, citiamo i contributi di Ammari e Kang (2007), Kozlov, Maz'ya e Movchan (1999), Maz'ya, Nazarov e Plamenewskij (2000), Ozawa (1983), Vogelius e Volkov (2000), Ward e Keller (1993). Per quanto riguarda la teoria dell'omogeneizzazione, ricordiamo i lavori di Bakhvalov e Panasenko (1989), Cioranescu e Murat (1982), Dal Maso e Murat (2004), Jikov, Kozlov e Oleĭnik (1994), Marčenko e Khruslov (1974). In questo caso, l'interesse è focalizzato sul comportamento limite al tendere del parametro di perturbazione singolare al valore degenere. Infine, problemi al contorno in insiemi con inclusioni periodiche sono stati analizzati, almeno nel caso bidimensionale, con il metodo delle equazioni funzionali (si vedano, per esempio, i lavori di Castro, Pesetskaya e Rogosin (2009), Drygas e Mityushev (2009)).

In questa situazione, ci proponiamo di caratterizzare il comportamento asintotico di $u[\varepsilon]$ in prossimità di $\varepsilon = 0$ con un approccio differente. Più precisamente, se consideriamo per esempio una certa funzione $F(\varepsilon)$ relativa alla soluzione $u[\varepsilon]$ (come quelle nelle domande (i) e (ii)), il nostro obiettivo è di rappresentarla per $\varepsilon > 0$ per mezzo di funzioni reali analitiche della variabile ε definite in un intero intorno dello 0 e di funzioni eventualmente singolari in $\varepsilon = 0$, ma esplicitamente note (come $\log \varepsilon$, ε^{-1}, ecc...). Osserviamo che tale approccio presenta alcuni vantaggi. Infatti, se sapessimo, per esempio, che $u[\varepsilon](x)$ è uguale per valori positivi di ε ad una funzione reale analitica di ε definita in un intorno di 0, allora potremmo dedurre l'esistenza di un ε_1 positivo e sufficientemente piccolo e di una successione $\{c_j\}_{j=0}^{\infty}$ di numeri reali tali che

$$u[\varepsilon](x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \varepsilon^j \qquad \forall \varepsilon \in \,]0, \varepsilon_1[\,,$$

dove la serie nel lato destro dell'uguaglianza converge assolutamente in $]-\varepsilon_1, \varepsilon_1[$.

Tale approccio è stato introdotto da Lanza de Cristoforis nel 2001 ed è stato in seguito utilizzato per diversi problemi al contorno (sia lineari che non lineari) in insiemi limitati con un piccolo foro. Si vedano per esempio Dalla Riva e Lanza de Cristoforis [1], Dalla Riva e Musolino [2] e Lanza de Cristoforis [3].

Nella tesi di dottorato è stato considerato un dominio periodicamente perforato ed è stato analizzato il problema (1) nei casi in cui la funzione B_ε rappresenta la condizione di Dirichlet, di Neumann e di Robin (sia nel caso lineare che non lineare). Sono stati anche considerati problemi di trasmissione (lineare e non lineare) nella coppia di domini costituita da $T(\varepsilon)$ e dal suo complementare. I risultati ottenuti per l'analisi di problemi di trasmissione sono poi stati applicati allo studio del comportamento asintotico della conduttività effettiva di un composto periodico nel caso diluito. Sono stati anche considerati problemi al contorno per l'equazione di Poisson e di Helmholtz. Estensioni dei risultati contenuti nella tesi sono presenti in Lanza de Cristoforis e Musolino [4] e Musolino [5]. Più precisamente in [5] si considera il problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace, mentre in [4] un problema di Robin non lineare.

Descriviamo brevemente la strategia generale. Notiamo prima di tutto che il problema (1), che consideriamo soltanto per valori positivi di ε, è singolare per $\varepsilon = 0$. Tramite la teoria del potenziale, possiamo trasformare il problema (1) in un'equazione integrale equivalente definita sull'insieme $\partial\Omega_\varepsilon$. Tuttavia $\partial\Omega_\varepsilon$ dipende da ε e vogliamo liberarci di tale dipendenza. Con un opportuno cambio di variabili, possiamo ottenere un'equazione integrale equivalente definita sull'insieme $\partial\Omega$. Tale equazione, che dipende da ε, ha il vantaggio di avere senso anche per $\varepsilon = 0$. Utilizzando il Teorema della Funzione Implicita per funzioni reali analitiche, possiamo quindi analizzare la dipendenza da ε delle soluzioni dell'equazione integrale. Qui una delle difficoltà principali consiste nel trovare delle opportune variabili funzionali che desingolarizzino il problema. Per mezzo di questi risultati, possiamo dimostrare i nostri teoremi principali sul comportamento macroscopico e microscopico della soluzione $u[\varepsilon]$ e rispondere quindi alle domande in (i) e (ii).

Nella tesi sono stati considerati alcuni problemi di omogeneizzazione nei quali anche la misura delle celle di periodicità tende a 0. Più precisamente, in aggiunta al parametro ε legato al diametro dei fori, è stato introdotto un ulteriore parametro positivo δ legato alla misura della cella fondamentale e si è investigato il comportamento delle soluzioni di problemi al contorno al tendere di ε e δ a 0.

Osserviamo infine che, come per i problemi in domini limitati con un piccolo foro considerati da Lanza de Cristoforis e collaboratori, uno degli strumenti principali nella nostra analisi è lo studio della dipendenza di potenziali di strato e operatori integrali da perturbazioni dell'insieme di integrazione. Infatti, utilizzando rappresentazioni della soluzione $u[\varepsilon]$ in termini di potenziali di semplice e doppio strato periodici, per capire la dipendenza di $u[\varepsilon]$ da perturbazioni del dominio, è necessario investigare proprietà dei potenziali di strato ed altri operatori integrali. Pertanto, nella tesi di dottorato sono presenti gli analoghi periodici di risultati ottenuti da Lanza de Cristoforis e i suoi collaboratori Dalla Riva, Preciso e Rossi, in relazione ai potenziali di strato classici.

BIBLIOGRAFIA

[1] Dalla Riva M. e Lanza de Cristoforis M., *Weakly singular and microscopically hypersingular load perturbation for a nonlinear traction boundary value problem: a functional analytic approach*, Complex Anal. Oper. Theory, **5** (2011), 811-833.

[2] Dalla Riva M. e Musolino P., *Real analytic families of harmonic functions in a domain with a small hole*, J. Differential Equations, **252** (2012), 6337-6355.

[3] Lanza de Cristoforis M., *Asymptotic behaviour of the conformal representation of a Jordan domain with a small hole in Schauder spaces*, Comput. Methods Funct. Theory, **2** (2002), 1-27.

[4] Lanza de Cristoforis M. e Musolino P., *A singularly perturbed nonlinear Robin problem in a periodically perforated domain: a functional analytic approach*, Complex Var. Elliptic Equ., to appear.

[5] Musolino P., *A singularly perturbed Dirichlet problem for the Laplace operator in a periodically perforated domain. A functional analytic approach*, Math. Methods Appl. Sci., **35** (2012), 334-349.

Institut de Recherche Mathématiques de Rennes (IRMAR), Université de Rennes 1
e-mail: musolinopaolo@gmail.com
Scuola di Dottorato in Scienze Matematiche, Indirizzo Matematica
con sede presso l'Università degli Studi di Padova – Ciclo XXIV
Relatore: Prof. Massimo Lanza de Cristoforis, Università degli Studi di Padova