La Matematica nella Società e nella Cultura

RIVISTA DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

ESTER DALVIT

Nuove proposte di divulgazione della teoria delle trecce

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **6** (2013), n.3 (Fascicolo tesi di Dottorato), p. 509–512.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2013_1_6_3_509_0>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2013.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. VI, Dicembre 2013, 509-512

Nuove proposte di divulgazione della teoria delle trecce

ESTER DALVIT

1. – Introduzione

Questa tesi è dedicata a un progetto di divulgazione sulla teoria delle trecce, un campo di ricerca introdotto da Emil Artin negli anni '20 del secolo scorso e a tutt'oggi molto attivo.

Le problematiche poste nella teoria delle trecce sono tipicamente topologiche (ad esempio, come distinguere due trecce a meno di isotopie?), mentre gli strumenti usati per la formalizzazione sono tipicamente algebrici (teoria dei gruppi, combinatoria, teoria degli algoritmi).

Il lavoro è consistito nella progettazione e produzione di un film, realizzato con tecniche di grafica tridimensionale, e di un laboratorio didattico.

Queste note contengono una breve descrizione informale del lavoro svolto e non hanno la pretesa di illustrare alcun risultato della teoria delle trecce.

2. – Obiettivi

Ci si propone di presentare a un pubblico ampio, non necessariamente "addetto ai lavori", una scelta di temi che funga da esempio per far comprendere come lavorano i matematici, come si pongono delle questioni, come analizzano, formalizzano e affrontano i problemi. L'intento è quello di mostrare una matematica viva, attiva, aperta a problemi e metodi nuovi e pronta a spaziare in campi diversi.

La teoria delle trecce si presta molto bene a questi fini per svariati motivi: non solo viene studiata da diversi punti di vista (principalmente quello topologico e quello algoritmico-combinatorio) ed è oggetto di risultati molto profondi, ma anche non è troppo lontana dall'esperienza comune. Infatti formalizza oggetti concreti che tutti conoscono e che possono essere raffigurati con disegni e animazioni piacevoli anche per non specialisti.

Nel film le animazioni aiutano davvero la comprensione ai diversi livelli e permettono di "vedere" dei risultati, anche avanzati, senza la pesantezza della formalizzazione. Il taglio è quello di una divulgazione "ad alto livello": nonostante non sia necessario avere conoscenze di matematica superiore per poter guardare e capire il film, è richiesta una certa capacità di astrazione.

Nel laboratorio il problema proposto è concreto e riferito a oggetti reali, anche se di nessuna palese utilità pratica. Poter vedere e manipolare gli oggetti avvicina la materia all'esperienza degli studenti e stimola il loro interesse.

Il film e il laboratorio sono pensati in particolare per studenti degli ultimi anni delle scuole superiori e per studenti universitari. Il film potrà avere una diffusione presso un pubblico più generale, anche sulla scia del successo di *shape Dimensions* [2].

3. – Il film

Il film, che può essere scaricato al link *shape http://matematita.science.unitn.it/braids/*, è composto da quattro capitoli, ognuno dei quali della durata di circa 15 minuti.

Il primo capitolo è introduttivo: presenta le trecce come oggetti topologici e le formalizza come elementi dei gruppi delle trecce. Il secondo capitolo tratta il problema della parola e presenta due algoritmi per risolverlo nei gruppi in questione. La terza parte si occupa di teoria dei nodi e di alcuni collegamenti con la teoria delle trecce. L'ultimo capitolo presenta temi più avanzati e risultati più profondi: le trecce come spazi di configurazione di punti, la chiusura piatta, il sottogruppo di Hilden. I capitoli possono essere visti sequenzialmente, ma il secondo può essere saltato senza pregiudicare la comprensione dei seguenti.

Nel seguito diamo un breve riassunto informale dei contenuti delle quattro parti. Una trattazione della maggior parte dei temi può essere trovata in [4].

3.1 – *Capitolo 1: Il gruppo delle trecce*

Vengono mostrati alcuni esempi di trecce come oggetti reali e ci si chiede se e come la loro struttura possa essere formalizzata in linguaggio matematico. Si dà una definizione geometrica di treccia, ma subito si passa a quella topologica, sottolineando che due trecce vengono considerate equivalenti se esiste un'isotopia che trasforma una nell'altra, introducendo così le classi di equivalenza di trecce geometriche.

Si introduce poi l'operazione di composizione tra due trecce con lo stesso numero di fili e si esamina la struttura data da essa: quella di gruppo.

Si cerca ora un insieme di generatori del gruppo delle trecce e si associa a ogni generatore una lettera in un'alfabeto. Le trecce vengono quindi rappresentate da parole. Infine si nota che parole diverse possono descrivere la stessa treccia e si arriva alla presentazione del gruppo delle trecce di Artin (1926).

3.2 – *Capitolo 2: Il problema della parola*

Viene presentato il problema della parola, che consiste nel trovare un algoritmo per stabilire se due date parole rappresentino la stessa treccia.

Un primo algoritmo, proposto da Artin in [1], consiste nel *shape pettinare* le trecce per ricondurle a una forma normale. La complessità computazionale di questo algoritmo è però elevata, ragione per cui viene presentato un secondo algoritmo, la *shape riduzione dei manici*, un risultato molto più recente (Dehornoy, 1997).

3.3 – *Capitolo 3: Nel mondo dei nodi*

Vengono presentati i nodi, formalizzazione di oggetti costituiti da cordicelle chiuse. Anche qui viene introdotta una relazione di equivalenza tra nodi, data dall'isotopia. I nodi vennero introdotti alla fine dell'Ottocento da Tait e Thomson, ma il problema della loro classificazione è ancora per molti versi aperto. Per far capire il tipo di problematiche nella trattazione di questi oggetti, si mostra il nodo a otto, di tipo *shape achirale*, cioè equivalente alla sua immagine speculare, e il nodo trifoglio, chiedendosi se questo sia *shape chirale*.

Trecce e nodi sono strettamente legati: per passare da una treccia a un nodo è sufficiente operarne la chiusura: collegare le estremità dei fili della treccia con dei nuovi fili che non si intrecciano. Viene illustrato il teorema di Alexander (1923) e il relativo algoritmo, che assicura che ogni nodo può essere ottenuto come chiusura di una treccia. Tuttavia, trecce diverse possono dare origine allo stesso nodo. Il teorema di Markov (1936) dà condizioni necessarie e sufficienti per capire quando questo accade. La caratterizzazione però non è costruttiva, quindi questo risultato non è utile per classificare i nodi.

Ci sono però altri risultati che mettono in relazione trecce e nodi. Uno dei più potenti invarianti dei nodi, il polinomio di Jones, venne trovato studiando rappresentazioni delle trecce in un'algebra (1984). Questo fu uno dei maggiori risultati nell'ambito della teoria dei nodi, che valse a Jones la medaglia Fields.

Viene presentato un modo per calcolare il polinomio di Jones, basato sulle *shape skein relations*. Infine si calcola il polinomio di Jones dei due trifogli, sinistro e destro, per mostrare che i due nodi non sono isotopi e quindi sono chirali.

3.4 – *Capitolo 4: Danze di Hilden*

Formalizzando gli spostamenti dei ballerini in una danza, si ritrovano le trecce, che vengono quindi caratterizzate come movimento di punti in un disco. Si descrive poi un tipo particolare di danza, in cui i ballerini sono a coppie e si tengono per mano. Formalizzando queste danze si ottiene un sottogruppo del gruppo delle trecce, chiamato *shape gruppo di Hilden* (1975). Viene mostrato un insieme di generatori per questo gruppo. Un insieme di relazioni è stato dato da Tawn nel 2008, ma, data la sua complessità, esso non viene presentato.

Ora si torna alle trecce, su cui si definisce la *shape chiusura piatta*, un altro modo per passare dalle trecce ai nodi. Un teorema di Birman (1974), analogo al teorema di Markov presentato nel capitolo precedente, caratterizza le trecce che danno lo stesso nodo tramite la chiusura piatta. Nell'enunciato si usa il gruppo di Hilden.

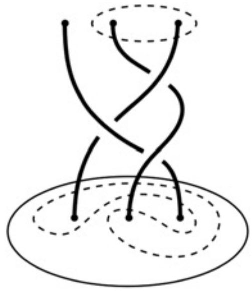
Infine si presenta il problema della parola generalizzato: dato un gruppo G, un suo sottogruppo H e un elemento $g \in G$, come stabilire se $g \in H$? Nel caso particolare del gruppo treccia e del sottogruppo di Hilden, il problema è stato risolto da Tawn in un preprint del 2009.

4. – Il laboratorio

Per l'attività di laboratorio, destinata a studenti dell'ultimo anno delle scuole superiori e dei primi anni dei corsi universitari, non sono richieste particolari conoscenze, ma una buona capacità di astrazione e di manipolazione di oggetti astratti.

Il problema posto è di tipo concreto, nonostante si presenti come un gioco senza alcuna utilità pratica. Viene fornita una treccia di metallo, composta da tre fili rigidi e disposta ortogonalmente al piano di appoggio. Si chiede come disporre una cordicella chiusa attorno ai fili della treccia, in modo che cadendo verso il basso essa vada a sovrapporsi al disegno di una curva sul piano di appoggio (vedi figura).

In termini rigorosi, il problema è il seguente: come agisce il gruppo delle trecce a n fili sul gruppo fondamentale del disco meno n punti? In altri termini, si ricava la rappresentazione delle trecce come automorfismi di gruppi liberi, data da Artin. Una trattazione precisa si trova in [3].



Nell'attività laboratoriale si formalizza dapprima il gruppo delle trecce, trovando i generatori di Artin, quindi si descrivono le curve nel disco meno tre punti e infine si analizza l'azione del gruppo delle trecce sulle curve. In conclusione si scrive e si risolve l'equazione che permette di arrivare alla soluzione pratica, che può essere verificata sui modellini forniti.

4.1 – *La sperimentazione*

Le attività proposte nel laboratorio sono state rielaborate anche in considerazione delle due sperimentazioni attuate con studenti delle scuole secondarie di secondo grado. Si propone un breve commento dei risultati.

In generale gli studenti non hanno avuto difficoltà nè a formalizzare le trecce come oggetti matematici, nè a manipolare simboli in una struttura diversa da quelle a cui sono abituati, in ambiente non commutativo. Il passo più difficile è stato senz'altro la formalizzazione delle curve, per arrivare a rappresentare il gruppo fondamentale del disco meno tre punti (pur senza mai nominarlo).

Nel complesso l'attività ha permesso agli studenti di apprendere o ricordare, in modo attivo e in parte informale, i concetti di isotopia, relazione di equivalenza, gruppo, non commutatività, azione di gruppo su un insieme, algoritmo. Inoltre è servita da stimolo per trovare una formalizzazione di oggetti e problemi concreti e per sviluppare strumenti algebrici adatti a risolvere un problema topologico.

BIBLIOGRAFIA

[1] EMIL ARTIN, *Theory of braids*, Annals of Mathematics, 48 (1947), 101-126.
[2] ETIÉNNE GHYS, AURÉLIEN ALVAREZ e JOS LEYS, *Dimensions, a walk through mathematics*, http://www.dimensions-math.org (2008).
[3] VAGN LUNDSGAARD HANSEN, *Braids and coverings: selected topics*, Cambridge University Press (1989).
[4] CHRISTIAN KASSEL e VLADIMIR TURAEV, *Braid groups*, Springer (2008).

Dipartimento di matematica, Università degli Studi di Trento
e-mail: dalvit@science.unitn.it
Dottorato in matematica, indirizzo comunicazione e didattica della matematica
con sede presso l'Università degli Studi di Trento – Ciclo XXIV
Direttore di ricerca: Dott. Domenico Luminati, Università degli Studi di Trento