Aldo Brigaglia

Per una biografia scientifica di Corrado Segre

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **6** (2013), n.3 (Fascicolo tesi di Dottorato), p. 415–474.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2013_1_6_3_415_0>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2013.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. VI, Dicembre 2013, 415-474

Per una biografia scientifica di Corrado Segre

ALDO BRIGAGLIA

1. – La prima giovinezza

Il primo luglio 1883 si laureava a Torino un giovanissimo matematico nemmeno ventenne, Corrado Segre.

Segre era nato a Saluzzo il 20 agosto 1863 da una agiata famiglia borghese ebrea. Suo padre Abramo era un industriale della seta, sua madre, Estella De Benedetti, apparteneva a una famiglia di fini intellettuali. I suoi studi vengono compiuti all'Istituto Tecnico Sommeiller di Torino e tra i suoi docenti annovera il geometra Giuseppe Bruno, anche docente all'università torinese. Si iscrive poi all'università nel 1879 (a soli 16 anni).

Ciascuno di questi meri dati biografici meriterebbe un approfondimento. Infatti la stessa data di nascita è significativa. Segre appartiene infatti alla generazione di giovani matematici nati intorno o immediatamente dopo il conseguimento dell'unità nazionale, la generazione che aveva potuto raccogliere il testimone di quella impegnata nelle battaglie risorgimentali e che aveva trovato la via per così dire spianata da quella precedente. Una generazione che si era potuta considerare "naturalmente" inserita nel quadro della ricerca europea, che disponeva ormai di strutture (riviste, biblioteche, ...) ampiamente sufficienti per gli sviluppi della ricerca.

Segre apparteneva anche a una famiglia ebrea e a una generazione in cui la comunità ebraica nazionale aveva dato contributi di eccezionale rilevanza allo sviluppo della matematica (e più generalmente delle scienze) italiana. Anche questo poteva ritenersi frutto della raggiunta unità nazionale, anzi, credo, della combinazione tra una costante tradizione culturale assiduamente coltivata all'interno delle famiglie e una legislazione finalmente aperta all'inserimento pieno. Le grandi risorse potenziali di una comunità mediamente assai più colta della parte restante della popolazione italiana, potevano finalmente esplicitarsi ai massimi livelli. Accanto a Segre, bastano i nomi di Volterra e Castelnuovo per dare un senso preciso a questa affermazione che andrebbe comunque meglio analizzata anche da un punto di vista sociologico. E la famiglia Segre era certamente ai massimi livelli: basti pensare al fratello Arturo, di dieci anni più giovane (1873-1928), storico apprezzatissimo (1).

Per completare il quadro familiare occorre ricordare che il fratello del padre, Beniamino, è il nonno dell'omonimo matematico.

Anche la provenienza dall'Istituto Tecnico (peraltro condivisa da Volterra) piuttosto che dal Liceo è frutto dei tempi nuovi: si pensi agli sforzi di Brioschi e Cremona per dare a questo genere di studi una base sufficiente per la formazione dell'ingegnere. Infine l'avere trovato un insegnante scientificamente colto e sensibile come Bruno fu probabilmente elemento importante per la scelta del giovane Segre, come d'altra parte furono ad esempio Roiti per Volterra, Cassani per Veronese e Faifofer per Castelnuovo.

Gli studi universitari trovarono pure un ambiente favorevole, con professori significativi come D'Ovidio, Genocchi e Faà di Bruno, anche se forse vanno presi più in considerazione i suoi quasi coetanei Giuseppe Peano (un po' più anziano, essendo nato nel 1854) e Gino Loria che si sarebbe laureato nello stesso giorno di Segre.

Un discorso a parte merita ovviamente il relatore della tesi di Segre, Enrico D'Ovidio. Nato nel 1843, D'Ovidio era un tipico rappresentante della scuola napoletana di Giuseppe Battaglini (2) con il quale aveva studiato e dal quale aveva colto un notevole spirito analitico e l'interesse per la geometria della retta (oggetto di un suo corso nel 1881/82) e per quanto di nuovo si muoveva nell'ambiente matematico, in parti-

(1) Mi ha particolarmente colpito la descrizione che Norberto Bobbio, allievo di Arturo Segre al Liceo D'Azeglio, fa del suo docente (in N. Bobbio, *Italia civile*, Passigli, Firenze 1986), severo e competente, come doveva essere lo stesso Corrado.

(2) Su D'Ovidio si può vedere la voce di A. Bastai Pratt, nel Dizionario Biografico degli Italiani della Treccani (oggi anche nel web)

colare per le geometrie non euclidee e per la geometria iperspaziale. Vale la pena sottolineare che proprio questi argomenti avevano già messo in contatto il matematico molisano con Felix Klein([3]).

Comunque, dal punto di vista familiare, il 1882 era stato un vero "annus tragicus" per il giovane piemontese. In effetti in quell'anno il padre si era suicidato, non reggendo al colpo dovuto ai dissesti economici. L'avvenimento, tragico in sé, era stato accompagnato da un drastico cambiamento delle modalità di vita. Come racconta Beniamino Segre da una "vita assai comoda, con abbondante servitù, carrozza e cavalli", la famiglia Segre era passata a "condizioni molto ristrette". Forse anche questo aveva contribuito a forgiare quel carattere austero dei fratelli Segre.

Prima di affrontare il lavoro scientifico di Segre, mi sembra utile dare uno sguardo alla situazione della geometria, e più in particolare della matematica, italiana negli anni ottanta del XIX secolo. Abbiamo già visto come l'Università di Torino andasse trasformandosi in una delle più importanti d'Italia. Senza sottovalutare l'importante lavoro pionieristico di Genocchi, Faà di Bruno e di D'Ovidio, non c'è dubbio che tale grande miglioramento sarà dovuto principalmente a Peano e a Segre che, nel giro di pochi anni, faranno di Torino il principale centro italiano per la logica e i fondamenti della matematica e per la geometria algebrica. La venuta di Volterra (nel 1893 e fino al 1900) completerà l'opera per l'analisi, la fisica matematica e le applicazioni, portando alla fondazione del Politecnico. Una dinamica che, nel breve volgere di un decennio farà di Torino da un centro dignitoso, ma tutto sommato periferico, della matematica italiana un importante punto di riferimento internazionale.

Segre quindi inserisce la sua opera in quella della generazione cui apparteneva (per fissare le idee, diciamo quella dei nati tra il 1853 e

([3]) Le lettere superstiti a Klein sono trascritte in E. Luciano – S. Roero, From Turin to Göttingen: Dialogues and Correspondence, *Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche*, XXXII, 1, 2012, 9 – 232. La corrispondenza ha inizio non più tardi del 1878. Sarebbe interessante approfondire un'affermazione di questo lavoro secondo la quale i contatti tra D'Ovidio e Klein sarebbero avvenuti "through Cremona". Tornerò più avanti su tale questione.

il 1863, quella cioè di chi non aveva partecipato direttamente al risorgimento nazionale, ma che di quella temperie culturale e morale era stata partecipe). Una generazione che aveva portato a compimento l'opera dei Betti, dei Brioschi, dei Cremona, dei Beltrami e dei Casorati.

Nel 1883 il fondatore della scuola italiana di geometria algebrica, Luigi Cremona, era ormai da vari anni lontano dalla ricerca attiva, impegnato com'era nella direzione della scuola di ingegneria di Roma e nella attività politica. Tra i suoi allievi romani i più attivi nella ricerca erano certamente Riccardo De Paolis (1854-1892) e Ettore Caporali (1855-1886) rispettivamente insegnanti in due sedi prestigiose, Pisa e Napoli. De Paolis aveva appena completato un lavoro sui fondamenti della geometria proiettiva(4) per molti versi fondante rispetto a questo argomento. Le fonti ispiratrici di questi lavori sono le stesse con cui si misurerà Segre, in particolare von Staudt e Klein (quest'ultimo soprattutto per quel che riguarda le geometrie non euclidee). Anche Caporali, che era già entrato nella spirale delle crisi depressive che lo porteranno di lì a poco (nel 1886) al suicidio, per molti versi interseca i suoi studi con quelli del più giovane collega. Anche su questo tornerò più avanti.

Altro allievo romano di Cremona di particolare rilievo era Giovan Battista Guccia (1854-1914), che era in procinto di fondare il Circolo Matematico di Palermo e la sua rivista (i *Rendiconti*) che vedranno la luce rispettivamente nel 1884 e nel 1886. Si tratta del più ambizioso tentativo di dare alla matematica italiana strutture organizzative di alto livello internazionale ed anche questa avviene nel pieno solco delle iniziative risorgimentali, basta pensare all'impegno di Brioschi, Betti e Cremona relativamente agli *Annali di Matematica*.

Tra tutti gli allievi diretti di Cremona, comunque spiccava certamente Eugenio Bertini (1846-1933) in quel momento docente a Pavia, dove operava con Casorati e Beltrami, continuando la gloriosa tradizione matematica di quell'ateneo. Bertini, forlivese, era stato a Bologna il primo allievo di alto valore di Cremona e aveva poi prose-

(4) R. De Paolis, Sui fondamenti della geometria proiettiva, *Memorie della R. Accademia Nazionale dei Lincei* , (3), 9, 1880-81, 489-503.

guito gli studi a Pisa, con Betti. Da molti punti di vista Bertini, più di ogni altro, rappresentò il ponte di collegamento tra l'opera di Cremona e quella della nuova scuola di geometria algebrica guidata da Segre. A lui, più che allo stesso Cremona, si deve lo sviluppo del concetto di trasformazione birazionale: negli anni '70 è soprattutto attraverso la sua opera che la geometria algebrica italiana tiene il passo con quanto, in Germania, veniva sviluppato dagli allievi di Clebsch, soprattutto da Alexander Brill e da Max Nöther. Con Bertini Segre svilupperà, negli anni successivi, una stretta collaborazione.

Una rapida e schematica presentazione di alcuni tra i principali matematici nati nel decennio 1853-1863 può dare un'idea del grande "balzo in avanti" che nel volgere di circa un quindicennio avrebbe portato la comunità matematica italiana, già un tempo periferica ai primissimi posti su scala mondiale. Abbiamo, a parte i già citati Loria e Peano: Salvatore Pincherle (1853-1936) in cattedra nel 1880 Palermo e nel 1881 a Bologna; Gregorio Ricci Curbastro (1853-1925) dal 1880 con cattedra a Padova; Giuseppe Veronese (1854-1917) dal 1881 con cattedra a Padova; Alfredo Capelli (1855-1910) con cattedra a Palermo dal 1881; Luigi Bianchi (1856-1928) a Pisa con cattedra dal 1886; Francesco Gerbaldi (1858-1934) allora assistente Roma; Ernesto Cesàro (1859-1906) allora in Belgio, con cattedra Palermo dal 1886; Giuseppe Vivanti (1859-1949) laureato a Bologna nel 1883; Pasquale Del Pezzo (1859-1936) laureato nel 1882 a Napoli; Vito Volterra (1860-1940) laureato nel 1882, con cattedra nel 1883 a Pisa; Carlo Somigliana (1860-1955) laureato nel 1881 a Pisa; Mario Pieri (1860-1913) laureato nel 1884 a Pisa; Cesare Burali Forti (1861-1931) laureato a Pisa nel 1884; Roberto Marcolongo (1862-1943) laureato a Roma nel 1886; Luigi Berzolari (1863-1949) laureato nel 1884 a Pisa; Giovanni Vailati (1863-1909) laureato a Torino.

Un elenco a mio avviso impressionante di talenti destinato a dar vita a una generazione ancora più avanzata. Basti pensare che in una università di grande tradizione come Padova, ma ridotta per la matematica a poca cosa fino ad allora, nell'anno in cui si laureava Segre insegnavano due giovani trentenni del calibro di Ricci Curbastro e di Veronese e che lì si sarebbero laureati entro poco tempo Castelnuovo e Levi Civita. Un ambiente vivacissimo, caratterizzato non solo dalla giovanissima età, ma anche dalla ampia diffusione nel territorio.

2. – La tesi di laurea e la geometria iperspaziale

Torniamo ora all'"annus mirabilis" di Segre, il 1883. Nell'aprile aveva già presentato la tesi di laurea, *Sullo studio delle quadriche in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni*, che verrà pubblicata, in due puntate negli Annali dell'Accademia di Torino(5). Nello stesso anno pubblicava, insieme a Loria, il suo primo lavoro sui *Matematische Annalen* e iniziava la sua corrispondenza con Felix Klein. Il primo luglio si laureava; per dare un'idea del suo brillante esordio, basta citare alcune cifre: tra il 1883 e il 1884 pubblicava 16 lavori; malgrado fino all'ultimo momento egli abbia mantenuto un'alta produttività e una grande originalità non potrà certamente tenere un simile ritmo(6).

Dopo qualche rigo sul piano del lavoro la tesi ha un incipit per alcuni versi folgorante:

> La geometria degli spazi ad un numero qualsiasi n di dimensioni ha preso ormai il suo posto tra i rami della matematica; e, anche quando la si consideri all'infuori delle importanti applicazioni alla geometria ordinaria di cui essa è capace, cioè anche quando l'elemento o punto di un tale spazio non si consideri come un ente geometrico dello spazio ordinario (e neppure, il che fa poi lo stesso, come un ente analitico costituito dai valori di n quantità variabili), ma bensì come un ente a sé, la natura intima del quale si lascia indeterminata, non si può rifiutare di ammetterla come scienza, in cui tutte le proposizioni sono rigorose, perché dedotte con ragionamenti essenzialmente matematici; la mancanza di una rappresentazione pei nostri sensi degli enti che essa studia non ha molta importanza pel matematico puro. Sorta, si può dire, colla celebre Memoria del 1854 di Riemann ... la geometria a n dimensioni va sviluppandosi secondo due vie diverse: l'una riguarda la teoria della curvatura degli spazi e si connette quindi alla geometria non euclidea, l'altra invece studia la geometria proiettiva degli spazi lineari ... ed è appunto questa

(5) C. Segre, Studio sulle quadriche in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni, *Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino*, (2), 36, 1883, 3-86; in Opere, v. III, U.M.I. 1961, pp. 25-126. Le opere di Segre sono oggi visibili anche in rete all'indirizzo: http://www.bdim.eu/item?id=GM_Segre.

(6) Limitandoci alle pubblicazioni originali di ricerca le pubblicazioni sono in totale 76, dei quali 43 entro il 1893

> ch'io mi propongo di seguire in questo lavoro. Essa apre ai cultori della matematica un campo sconfinato di ricerche piene di interesse. (Segre 1883, in *Opere*, v. III, p. 26)[7]

Queste parole meritano qualche commento: da un lato esse rappresentano il punto culminante di una tradizione, soprattutto tedesca, che risaliva a Plücker, Clebsch, Klein, e che aveva trovato in Italia degli importanti interpreti in Battaglini e D'Ovidio e un interlocutore attento in Cremona; ma dall'altro esse si presentano come del tutto nuove e coraggiose. Nuova e coraggiosa in una tesi di laurea è l'idea che *l'elemento o punto di un tale spazio ... si consideri ... come un ente a sé, la natura intima del quale si lascia in-*

Corrado Segre all'eta di 26 anni.

[7] Non entro qui nell'argomento, largamente studiato, delle relazioni tra l'impostazione iperspaziale di Segre e quella di Veronese, cui Segre si riferisce continuamente, presentata nel celebre e fondante lavoro G. Veronese, Behandlung der projectivischen Verhältnisse der Räume von verschiedenen Dimensionen durch das Princip des Projicirens und Schneidens, *Mathematische Annalen*, 19, 1882, pp. 161-234.

determinata. In un colpo solo il giovane ventenne tagliava corto con l'impostazione empirista della geometria (cui erano ancora legati Beltrami, Veronese e lo stesso Peano); anche se siamo lontani dal progetto hilbertiano di una compiuta struttura assiomatica della geometria (anche se su questo aspetto dei fondamenti Segre tornerà più volte) non si può non notare che il linguaggio del giovane piemontese richiama quello assai successivo di Hilbert.

Qui vorrei richiamare quanto notato già da Freudenthal:

> Se fosse andato tutto per il giusto verso, avrebbe dovuto essere un italiano a dar voce alle nuove idee poiché nessuno come in quella scuola vi si era maggiormente avvicinato ... In effetti fu anche un italiano. Solo dopo aver scritto questo saggio me ne accorsi, Fano c'era già arrivato nel 1892. Egli introduce la sua assiomatica con parole che ricordano quelle già citate di Hilbert(8)

In effetti le parole di Fano riecheggiano semplicemente quelle usate da tempo dal suo giovane maestro. Come dicevo la tesi di Segre può considerarsi una sintesi dei lavori nati soprattutto in ambito tedesco, ma la cosa alquanto straordinaria per un giovanissimo è che essa si presenta come una sintesi matura dei lavori precedenti, che vengono inseriti in un quadro di riferimento assai più organico e generale. La geometria proiettiva iperspaziale si mostrerà come l'ambiente adatto per inserire i recenti risultati soprattutto di Klein in un quadro di riferimento più generale. Questo quadro di riferimento resterà centrale per tutti gli sviluppi successivi della geometria algebrica italiana. Una tesi di laurea quindi che apre la strada a più ampi sviluppi. La potenza di questa intuizione metodologica può cogliersi dall'enorme numero di applicazioni, per alcuni versi assai semplici, che gli permetteranno la straordinaria messe di risultati del primo anno di attività.

(8) H. Freudenthal, Zur Geschichte der Grundlagen der Geometrie, *Nieuw Archief voor Wiskunde*, (4), 5, 1957, 105-142. Il testo originale recita: *Wenn alles mit rechten Dingen zugegangen wäre, hätte es ein Italiener sein müssen, der als erster dem neuen Gedanken das Wort verliehe, denn nirgendwo ist man ihm so nahe wie in den Arbeiten jener Schule. ... Es war auch ein Italiener. Erst nachdem ich diesen Aufsatz geschrieben hatte, merkte ich es, G. Fano war 1892 schon so weit. Er leitet seine Axiomatik mit Worten ein, die an die zitierten Hilbertschen erinnern.*

Naturalmente, un'impostazione generale e astratta come quella di Segre richiede una solida base cui riferirsi. Non è quindi da stupirsi che all'inizio della tesi sia posta una definizione di spazio vettoriale a un numero qualsiasi di dimensioni:

> Un insieme continuo qualunque di enti, il cui numero sia m volte infinito (cioè tra i quali ve ne sia in generale un numero finito che soddisfino a m condizioni semplici qualunque date) dicesi formare uno spazio ad m dimensioni, di cui quegli enti diconsi elementi. ... Uno spazio qualunque ad m dimensioni dicesi lineare quando si possono attribuire a ciascun suo elemento i valori numerici (reali od immaginari) di m quantità in modo che, senza alcuna eccezione, ad ogni gruppo arbitrario di valori di queste corrisponda un solo elemento di quello spazio, e viceversa ad ogni elemento di questo corrisponda un solo determinato gruppo di valori di quelle. I valori di queste quantità corrispondenti a quell'elemento si dicono coordinate di questo. Rappresentandole coi rapporti di m altre quantità ad una $(m + 1)$-esima queste costituiranno le $m + 1$ coordinate omogenee dell'elemento dello spazio considerato, cosicché ogni elemento di questo, senza eccezioni, sarà individuato dai rapporti mutui di queste coordinate omogenee e servirà viceversa ad individuare questi loro rapporti. (Segre 1883, in *Opere*, v. III, p. 38)

Qualche anno dopo questa definizione sarà duramente attaccata da Peano, ma per il momento vorrei soffermarmi su alcuni elementi di novità presenti in essa. Certamente non è in sé una definizione nuova. Il concetto di "spazio lineare" non è nuovo. Nuova, a mio avviso, è la collocazione di tale definizione nel quadro dell'economia di questo lavoro. Essa è posta all'inizio del lavoro perché ha in esso un ruolo fondante. Infatti subito dopo la definizione di spazio lineare viene quella di "punto":

> Consideriamo uno spazio lineare qualunque ad $n - 1$ dimensioni. Chiameremo punto ogni suo elemento, qualunque ne sia la natura (la quale per noi non ha assolutamente importanza). (Segre 1883, in Opere, v. III, p. 39)

Come dicevo, si tratta di una definizione in vari punti traballante, ma è pur sempre la prima volta che lo spazio proiettivo viene identificato con lo spazio vettoriale. In questo contesto il concetto base è ovviamente quello di isomorfismo, che verrà espresso nel solito modo chiarissimo, ma non del tutto preciso:

> Tutti gli spazi lineari ad uno stesso numero di dimensioni, qualunque siano i loro elementi, si possono riguardare come identici tra loro, poiché, come già notammo, nello studiarli non si considera la natura di quegli elementi, ma si tiene conto solo della proprietà di linearità e del numero di dimensioni dello spazio formato dagli elementi stessi. Ne segue, che la teoria delle forme lineari di 1ª, 2ª e 3ª specie, per esempio, della retta, del piano e dello spazio ordinario considerati come punteggiati, essendo già nota, si può farne uso senz'altro per tutti gli spazi lineari ad 1, 2, 3 dimensioni contenuti nello spazio lineare ad $n-1$ dimensioni che si vuole studiare in generale. Quindi si potrà far uso, ad esempio, della teoria della proiettività, dei gruppi armonici, dell'involuzione, ecc., nelle forme di 1a specie. (Segre 1883, in *Opere* v. III, p. 46)

L'idea di trasferire proprietà da un insieme all'altro non è certo nuova; basti pensare alla dualità. Ma nuovo appare il riferimento dei singoli passaggi da un ambiente geometrico all'altro (dualità, polarità, proiezione) ad un concetto generale "protostrutturale" quale quello di isomorfismo. È lo spazio lineare l'elemento che soggiace a tutti i vari esempi particolari e ad esso si deve sempre fare riferimento. In qualche modo il riferimento fondamentale è quello di Plücker (via Clebsch e Klein) e di Grassmann (che egli cita in un modo assai originale per l'epoca). In particolare possiamo dire che, mentre Plücker fornisce a Segre le intuizioni geometriche fondamentali, Grassmann permette di dare a queste stesse idee una base concettuale molto più sistematica, una visione filosofica più ampia, un formalismo molto più efficace, indicando chiaramente quello che noi indichiamo oggi come spazio vettoriale astratto (sui complessi) come l'ambiente naturale in cui immergere la geometria proiettiva multidimensionale.

Tutto questo non rimane un riferimento generico, è il metodo fondamentale attraverso cui si debbono leggere i risultati esposti nella tesi di laurea, che appunto costituirà il punto di partenza cui faranno riferimento tutti i suoi allievi della cosiddetta "scuola italiana di geometria algebrica". Scrive a proposito Enriques:

> Appunto con Klein e Lie il concetto di geometria astratta ha ricevuto un grande sviluppo, divenendo (dopo Segre) un ordinario istrumento di lavoro nelle mani dei geometri italiani contemporanei. Infatti nulla è più fecondo che la molti-

plicazione dei nostri poteri intuitivi recata da cotesto principio: pare quasi che agli occhi mortali, con cui ci è dato esaminare una figura sotto un certo rapporto, si aggiungano mille occhi spirituali per contemplarne tante diverse trasfigurazioni; mentre l'unità dell'oggetto splende alla ragione così arricchita, che ci fa passare con semplicità dall'una all'altra forma([9]).

Un *ordinario istrumento di lavoro*, quindi: quella di Enriques mi è sempre sembrata una sintesi estremamente efficace dell'approccio di Segre all'algebra degli spazi lineari a dimensione qualsiasi.

Tornando alla tesi, c'è un altro aspetto che vorrei sottolineare: l'uso dell'algebra moderna, nella fattispecie della teoria di Weierstrass dei divisori elementari delle coppie di forme bilineari simmetriche, cioè degli invarianti legati al problema della diagonalizzazione contemporanea di due forme([10]). Ancora una volta, l'idea di utilizzare in geometria di questo notevole teorema algebrico non rappresenta qualcosa di complessivamente originale, dato che era stata già fatta propria dal solito Klein e da Weiler; ciò che c'è di nuovo è ancora una volta un metodo generale. Invece di operare, come prima, utilizzando direttamente le forme canoniche trovate da Weierstrass affrontando penosi calcoli, Segre preferisce tradurre direttamente geometricamente il problema (cioè cogliere il significato geometrico dei divisori elementari) per poi procedere per via geometrica: ne risulta una trattazione assai più agile, ma soprattutto un metodo. Così egli si esprime:

Questo teorema, dato dal Weierstrass sotto questa forma analitica, esaurisce completamente, dal punto di vista dell'algebra moderna, ogni questione che si possa fare sui vari casi che può presentare il sistema di due forme quadratiche e sugli invarianti di questo sistema corrispondenti ai casi stessi, dando una classificazione, completa da quel punto di vista, di questi sistemi di forme. Vediamo di tradurle geometricamente (Segre 1883, in *Opere*, v. III, p. 84)

E questo è l'effetto della traduzione:

([9]) F. Enriques, *Per la storia della logica*, Zanichelli, 1922, p. 139.

([10]) Il teorema, nelle parole di Segre recita: *condizione necessaria e sufficiente affinché una coppia di forme bilineari o quadratiche si possa trasformare in un'altra coppia è che queste due coppie abbiano gli stessi divisori elementari.*

Teorema di Weierstrass (1868)
La condizione necessaria e sufficiente affinché due forme quadratiche φ, f di n variabili si possano trasformare rispettivamente in altre due forme quadratiche φ', f' pure di n variabili mediante una sostituzione lineare non sia nullo è che i determinanti delle due forme quadratiche $\lambda\varphi + \mu f$ e $\lambda\varphi' + \mu f'$ abbiano gli stessi divisori elementari.

Traduzione geometrica
La condizione necessaria e sufficiente affinché si possano trasformare proiettivamente l'uno nell'altro due spazi lineari a $n-1$ dimensioni in guisa che due date quadriche φ, f si possano trasformare rispettivamente in altre due date quadriche φ', f' dell'altro è che le loro quartiche di intersezione siano della stessa specie ed inoltre che i due fasci φf e $\varphi' f'$ da esse determinati, considerati quali forme di prima specie, si possano far corrispondere proiettivamente sì che si corrispondano: φ e φ', f e f' ed inoltre quelle quadriche specializzate dei due fasci , le quali corrispondono allo stesso gruppo caratteristico nella caratteristica comune dei due fasci.

Per quanto riguarda i contenuti della tesi, la prima parte utilizza in pieno questi concetti per classificare in esteso le quartiche intersezione, cioè le curve (del quarto ordine) ottenute come intersezione di due iperquadriche; la seconda parte è invece dedicata alla geometria della retta e in particolare alla determinazione delle serie quadratiche. Negli anni '70 la geometria della retta era stata uno degli argomenti preferiti da Klein e Lie, la cui influenza su Segre è ben nota. Il punto di partenza di questa *nuova* geometria risale a Plücker che lo presentò nel 1846 ([11]) interpretando una retta nello spazio tridimensionale at-

([11]) J. Plücker, *System der Geometrie des Raumes in neuer analytischer Behandlungsweise*, Düsseldorf, 1846.

traverso le sue equazioni parametriche

$$x = az + b; \ y = cz + d$$

In tal modo ad ogni retta si può associare un punto dello spazio quadridimensionale (a, b, c, d) detto spazio rigato. Un complesso di rette in R^4 è dato da un'equazione algebrica $F(a, b, c, d) = 0$. Una difficoltà che per molti anni bloccò lo sviluppo di questa teoria fu il fatto che il grado di un complesso non è invariante rispetto ai cambiamenti di coordinate in R^3. Nel 1865 ([12]) Plücker superò la difficoltà aggiungendo la coordinata *f* data da $det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, e pensando quindi lo spazio rigato come una varietà a quattro dimensioni in uno spazio a cinque dimensioni. In questo modo il grado di un complesso assumeva la desiderata invarianza.

Plücker moriva nel 1868 e la sua opera era continuata soprattutto dal suo allievo Clebsch e, tramite lui, da Klein che sull'argomento scriveva la sua tesi di dottorato proprio nel dicembre di quell'anno ([13]). Questo lavoro è particolarmente significativo per noi sia per la sua influenza sulla concezione geometrica di Segre, sia per il suo rapporto con l'opera della scuola italiana, in particolare di Battaglini ([14]). In effetti proprio nella sua tesi Klein affrontava criticamente la determinazione da parte del matematico napoletano dei complessi di secondo grado che, secondo quanto aveva pubblicato da poco ([15]), avrebbero dovuto avere forma canonica diagonale. Appunto applicando il teorema di Weierstrass sui divisori elementari, il diciannovenne Klein pervenne a una classificazione completa ed esatta.

([12]) J. Plücker, On a new geometry of space, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 155, 1865, pp. 725-791;

([13]) F. Klein, *Über die Transformation der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades zwischen Linien – Coordinaten auf eine canonische Form,* Bonn, Georgi, 1868; ristampata con modifiche nei *Mathematische Annalen*, 23, 1884, pp. 539 – 578;

([14]) Immediatamente dopo la pubblicazione della tesi, Klein pubblicò gli stessi concetti in F. Klein, Zur Theorie der Liniencomplexe des ersten und zweiten Grades, *Mathematische Annalen*, 2, 1870,

([15]) G. Battaglini, Intorno ai sistemi di rette di secondo grado, *Giornale di Matematiche*, 6, 1868, pp. 239-259.

Vale la pena qui ricordare l'importanza storica – in verità non abbastanza nota – di questi studi di Klein (che su questi temi si incontrerà con Sophus Lie) sia in direzione dello sviluppo delle idee che porteranno al programma di Erlangen, sia verso l'emergere del concetto di gruppo di Lie ([16]). I metodi geometrici della scuola italiana nascono e si sviluppano proprio in questo contesto, nel quale la tesi di Segre assume una valenza metodologica del tutto particolare, anche a prescindere dal valore dei singoli risultati ottenuti.

Ho già parlato della differenza di impostazione tra Segre e i matematici della scuola di Klein riguardo all'utilizzo degli strumenti algebrici (nella fattispecie il teorema di Weierstrass): mentre la scuola tedesca utilizza pesantemente ragionamenti (e soprattutto calcoli) algebrici per darne alla fine un'interpretazione geometrica, Segre interpreta sin da subito geometricamente i concetti algebrici, per poi procedere in maniera autonoma. Sarà questo il metodo utilizzato prevalentemente dalla scuola italiana di geometria algebrica.

Un altro dei punti chiave della metodologia utilizzata è tratta interamente dal principale lavoro di Klein sull'argomento. Si tratta di una interpretazione dello spazio rigato che costituisce una evoluzione di quella di Plücker. Consideriamo due punti nello spazio proiettivo e la retta che li congiunge; se le coordinate del punto sono rispettivamente (x_1, x_2, x_3, x_4) e (y_1, y_2, y_3, y_4)ponendo $p_{ij} = \begin{vmatrix} x_i & x_j \\ y_i & y_j \end{vmatrix}$, le sei quantità $p_{ij} (i < j)$ determinano un punto nello spazio proiettivo $p^5(C)$ soggetto alla condizione $p_{12}p_{34} - p_{13}p_{24} + p_{14}p_{23} = \mathrm{R} = 0$. Le rette costituiscono quindi una iperquadrica nello spazio a cinque dimensioni; per usare la simbologia usata da Klein nel 1871, una M_4^2 in un R_5 ovvero, con le parole di *Segre dicesi retta l'elemento di una quadrica non*

([16]) Questi temi esulano in parte dagli scopi di questo lavoro. Rinvio quindi alla letteratura e in particolare a D. Rowe, The early geometrical works of Felix Klein and Sophus Lie, in J. McCleary, D. Rowe (eds), *The history of modern mathematics*, v. I, Academic Press, 1989, pp. 189-233; T. Hawkins, Line geometry, differential equations and the birth of Lie's theory of groups, ivi, pp. 275-327; id., Lie groups and geometry: the Italian connection, *Supplemento ai Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, (2), 36, 1994, pp. 185-206; id., *Emergence of the theory of Lie groups*, Springer, 2000.

specializzata a 4 dimensioni. Questa definizione è importante anche da un punto di vista storico: poiché ovviamente una proiettività nello spazio è una collineazione si ha che le proiettività in $P^3(C)$ inducono in $P^5(C)$ delle trasformazioni lineari che fissano la quadrica R. Dal punto di vista del programma di Erlangen quindi la geometria proiettiva dello spazio tridimensionale coincide con quella determinata nello spazio a cinque dimensioni dalle trasformazioni che fissano, appunto, R. Appare quindi evidente la connessione tra questo modo di concepire la geometria della retta e il punto di vista di Cayley e Klein rispetto alle metriche non euclidee. Le connessioni tra gli studi di Klein su questo argomento e l'elaborazione dell'anno successivo del suo Programma di Erlangen sono state oggetto di studi approfonditi soprattutto da parte di Thomas Hawkins, nei lavori già citati a cui rinvio.

Va notato che Klein aveva introdotto questa definizione in un suo lavoro del 1871 ([17]) che Segre cita ampiamente nella sua tesi di laurea e che però sembra abbia conosciuto soltanto dopo un'elaborazione personale dell'argomento ([18]). Ne fanno fede le seguenti parole scritte allo stesso Klein:

> Lorsque je me suis mis à réfléchir sur la théorie des complexes quadratiques de droites (...) (et notez bien qu'alors je ne connaissais pas encore votre manière de considérer la géométrie de la droite, de sorte qu'en lisant plus tard votre mémoire "Über Liniengeometrie und metrische Geometrie" j'étais surpris d'y retrouver ce qu'avec beaucoup de fatigue j'avais trouvé par moi-même). ([19])

Poiché ho trattato un poco dell'influenza di Klein su Corrado Segre, mi sia consentita una breve parentesi riguardo le preesistenti relazioni di Plücker, Clebsch e lo stesso Klein con Cremona, dato che secondo me i rapporti di Segre con questa parte della scuola tedesca rap-

([17]) F. Klein, Über Liniengeometrie und metrische Geometrie, *Mathematische Annalen*, 5, 1872, pp. 257-277.

([18]) Sarebbe utile un confronto con il testo manoscritto della tesi, presente negli archivi torinesi, ma io non ho ancora avuto la possibilità di esaminarlo.

([19]) Lettera di Segre a Klein del 19 gennaio 1884 in E. Luciano, C.S. Roero, From Turin to Göttingen ..., cit. Tutte le altre citazioni da lettere di Segre a Klein sono tratte da questo lavoro che ha per me costituito un punto di partenza essenziale. Non vi farò pertanto più riferimento esplicito in seguito.

presenta una loro naturale prosecuzione.

Di fatto Cremona aveva strettamente collaborato con Clebsch con cui era non solo in corrispondenza, ma legato anche da sincera amicizia. Il rapporto scientifico con il matematico tedesco si era soprattutto sviluppato nel confronto tra metodi analitici e sintetici nella soluzione di problemi comuni([20]). Cremona aveva peraltro conosciuto Plücker nel 1867 nel corso del viaggio del matematico tedesco in Italia. L'interesse di Cremona per l'impostazione plückeriana della geometria è ben documentata: in particolare occorre ricordare che il lavoro di Plücker apparso sugli *Annali di Matematica* poco prima della sua morte([21]) è stato ampiamente rivisto e corretto dal matematico lombardo. Questo episodio, nonché le numerose conversazioni milanesi, portarono il geometra tedesco a esprimersi in modo molto chiaro sulla competenza di Cremona circa i suoi metodi*: A fine settembre dello scorso anno mio marito mi scrisse da Milano: "il professor Cremona conosce i miei lavori e le mie idee meglio di chiunque altro"*([22]). Ancora nel dicembre dello stesso anno, Felix Klein confermava: *Più di una volta, dopo il suo viaggio nell'Italia del Nord il compianto Plücker ha affermato che Lei era il solo che lo comprendesse completamente.* ([23]) Naturale prosecuzione di questa collaborazione fu il rapporto con Klein, iniziato già sul finire del 1868, e proseguito anche attraverso incontri personali, in particolare fino al 1879. Rinvio al già citato articolo di Marta Menghini per una più dettagliata cronaca di tali rapporti. In particolare, vorrei segnalare uno tra gli ultimi lavori

([20]) Su questo argomento si confronti Brigaglia, Ciliberto, Pedrini, The Italian School of Algebraic Geometry and Abel's Legacy, in O. Laudal, R. Piene, *The legacy of Niels Henrik Abel*, Springer, 2004, pp. 295-348.

([21]) J. Plücker, Théorie générale des surfaces réglées, leur classification et leur construction, *Annali di Matematica pura ed applicata*, (2), 1, pp. 160-168.

([22]) Lettera di Antonie Plücker a L. Cremona del 18 ottobre 1868, in A. Millàn (ed.), *La corrispondenza di Luigi Cremona*, v. I, Quaderni della Rivista di Storia delle Scienze, 1992.

([23]) *Mehr als einmal hat sich der verwigte Plücker seit seine Reise nach Oberitalien im vorigen Herbste dahin ausgesprochen, dass Sie der einzige seien, welcher ihn ganz verstände*. Lettera di F. Klein a L. Cremona del 30 dicembre 1868 pubblicata in M. Menghini, Il ruolo di capiscuola di Felix Klein e di Luigi Cremona alla luce della loro corrispondenza, *Rivista di Storia della Scienza*, (2), 1, 1993, pp. 183-225, dove sono pubblicate anche le traduzioni.

scientificamente rilevanti del matematico pavese, scritto nel 1875 e ispirato a un notevole lavoro di Lie([24]) che, secondo le parole di Segre, veniva “dimostrato e approfondito” da Cremona. Inutile dire che questo lavoro è ben presente nella tesi del nostro.

3. – Segre, Klein e il programma di Erlangen

Come già detto il primo anno di attività del giovane matematico piemontese registra una straordinaria produttività; non si tratta solo del numero di lavori, ma anche della loro lunghezza: almeno tre lavori superano le 80 pagine e uno (pubblicato sui *Mathematische Annalen*) raggiunge le 130 pagine. Questi lavori, per la maggior parte, non fanno che applicare a contesti diversi (la classificazione delle quartiche intersezioni di due quadriche, la classificazione dei complessi quadratici, la classificazione delle omografie, agli spazi rigati, ecc.) i metodi algebrici e iperspaziali già espressi nella tesi. Più che di risultati fondamentali (ma ad esempio è assai rilevante la classificazione delle omografie([25])) si tratta di applicazioni del suo metodo. Ma sta proprio nell’aver individuato un metodo generale attraverso il quale problemi geometrici apparentemente diversissimi rappresentano in realtà diverse espressioni dello stesso problema il merito fondamentale dei lavori di questo primo anno di attività; e in realtà è sin da allora che Segre pone le indicazioni base di un programma di ricerca cui resterà fedele tutta la vita.

Sempre nel 1883 Segre diede inizio alla sua lunga e fattiva corrispondenza con Felix Klein, presentandogli, insieme all’amico Gino Loria (che si laureerà nello stesso giorno), un lavoro([26]) che sarà

([24]) L. Cremona, Sulla corrispondenza fra la teoria dei sistemi di rette e la teoria delle superfici, *Memorie della R. Accademia dei Lincei*, (2), 3, 1875, pp. 285-307. S. Lie, Über Komplexe, insbesondere Linien – und Kugelcomplexe, mit Anwendung auf die Theorie der partieller Differentialgleichungen, *Mathematische Annalen*, 5, 1872, pp. 145-256.

([25]) C. Segre, Sulla teoria e sulla classificazione delle omografie in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni, *Memorie della R. Accademia Nazionale dei Lincei*, (3), 19, 1883-84, pp. 127-148; anche in Opere, v. III, pp. 304-333.

([26]) G. Loria, C. Segre, Sur les différents espèces de complexes du 2[e] degré des droites qui coupent harmoniquement deux surfaces du second ordre, *Mathematische Annalen*, 23, 1883, 213-234.

pubblicato sui *Mathematische Annalen*, sintesi delle rispettive tesi e loro prima pubblicazione in assoluto. Le parole usate dai due giovanissimi matematici costituiscono una precisa richiesta di collaborazione:

> Nous désirerons vivement obtenir Votre approbation et l'impression dans Vos Mathematische Annalen (...) L'inclination que Vous avez toujours eue pour les études de géométrie de la droite, et la courtoisie avec laquelle Vous encouragez les jeunes savants dans leurs recherches ... nous assurent que Votre réponse, que nous attendons impatiemment, sera favorable (27)

La corrispondenza è assai vasta, soprattutto nei primi anni di attività di Segre (48 lettere di Segre, di cui 30 tra l'83 e l'85 e 15 tra l'85 e il '90; le tre successive sono occasionali), ma anche la collaborazione del matematico piemontese alla rivista diretta da Klein è assai ampia per l'epoca (8 lavori, di cui 4 nei primi due anni di attività). Oltre alla geometria della retta, di cui ho già parlato, un elemento essenziale e caratterizzante dei rapporti tra i due è la profonda comprensione e l'uso intenso che Segre fa del programma di Erlangen. Il primo lavoro in questa direzione viene presentato nel dicembre dello stesso anno 1883 (28). In esso l'uso dei concetti di Klein è esplicito sin dall'inizio:

> In seguito ai lavori di Lie e Klein è noto che la geometria dello spazio ordinario quando si prenda per gruppo fondamentale di trasformazioni il gruppo delle inversioni (...) si può considerare come identica alla geometria proiettiva di un complesso lineare. E in nota:
> Pel concetto importantissimo e forse non abbastanza noto del gruppo fondamentale di trasformazioni veggansi i lavori citati di Klein. E ancora:
> La ragione intima di queste analogie sta nel fatto che tanto l'una quanto l'altra geometria equivalgono alla geometria di uno spazio lineare rispettivamente a 5 e a 4 dimensioni, in cui il gruppo fondamentale di trasformazioni consta delle trasformazioni lineari che non mutano una quadrica fissa non degenere rispettivamente a 4 e a 3 dimensioni ... In altri termini quelle due geometrie non

(27) Lettera di Gino Loria e Corrado Segre a Felix Klein del 16 agosto 1883.

(28) C. Segre, Sulle geometrie metriche dei complessi lineari delle sfere e sulle loro mutue analogie, *Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino*, 19, 1883-1884, pp. 159-186.

sono altro che le geometrie metriche di spazi lineari rispettivamente a 5 e a 4 dimensioni, quando in ciascuno di questi spazi si prenda per assoluto una quadrica non specializzata.

Un'utilizzazione su problemi più centrali nell'ambito della ricerca matematica dei metodi del programma di Erlangen avrà luogo nel dicembre dello stesso anno, con un famoso lavoro([29]) che T. Hawkins definisce *the earliest study of geometry in the spirit of Erlanger Program.*

In breve lo schema del lavoro è il seguente: ad ogni conica inviluppo (o luogo) del piano si può associare un punto nello spazio proiettivo $P^5(C)$ nel modo classico:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 = 0$$
$$\rightarrow (a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{13}, a_{23}, a_{12}).$$

Se f è una proiettività del piano, dato che trasforma coniche in coniche, essa induce una trasformazione $\bar{f}$ in $P^5(C)$. Segre considera coniche inviluppo e la varietà M formata dalle coniche che degenerano in una coppia di punti e, all'interno di queste, quella, F, in cui i due punti coincidono. Nello spazio delle coniche consideriamo le varietà bidimensionali ("schiere" che corrispondono a rette). Poiché in ciascuna retta sono contenute tre coniche degeneri, M risulta una varietà cubica (a 4 dimensioni), M_4^3, mentre uno spazio tridimensionale (varietà lineare generata da quattro coniche) possiede 4 punti doppi e quindi F e una superficie di grado quattro, F_2^4.([30]) Questa superficie costituisce la

([29]) C. Segre, Considerazioni intorno alla geometria delle coniche di un piano e alla sua rappresentazione sulla geometria dei complessi lineari di rette, *Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino*, 20, 1884-1885, pp. 487 – 504; *Opere*, v. IV, pp. 1-17.

([30]) Ho voluto riprodurre i ragionamenti sintetici di Segre; per un lettore moderno la trattazione analitica di Hawkins (*Emergence of the theory of Lie groups*, cit., p. 252) può essere più comprensibile: partendo dalla conica luogo, le coniche degeneri si ottengono azzerando il determinante e quindi soddisfano l'equazione $G \equiv a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{13}^2 - a_{22}a_{23}^2 - a_{33}a_{12}^2 + 2a_{13}a_{23}a_{12} = 0$; quindi resta definita una varietà algebrica di terzo grado di dimensione 4, cioè una M_4^3 nel simbolismo di Segre; le due rette coincidono (cioè le coniche sono doppiamente degeneri) se l'equazione della conica si riduce a un quadrato perfetto: $(ax + by + cz)^2 = 0$ e i punti associati soddisfano le equazioni parametriche $a_{11} = a^2$; $a_{22} = b^2$; $a_{33} = c^2$; $a_{13} = ca$; $a_{23} = cb$; $a_{12} = ab$; ottenendo quindi una superficie di quarto grado, F (una F_2^4).

cosiddetta superficie di Veronese, che nel frattempo era stata studiata proprio dal matematico chioggiotto([31]), attraverso tecniche nettamente diverse.

Poiché le trasformazioni proiettive dello spazio conservano la degenerazione delle coniche, tutte le $\bar{f}$ trasformano in sé sia la G che la F; Poiché la corrispondenza $f \to \bar{f}$ è un isomorfismo (Segre ne dimostra solo la biunivocità) Segre può quindi concludere:

> La geometria proiettiva del piano coincide colla geometria proiettiva di S_5 nella quale però si fissi la superficie F_2^4 come "gruppo fondamentale" il gruppo delle suddette ... omografie che mutano questa superficie in se stessa.

Questa impostazione, come si vede, è esattamente quella del programma di Erlangen e proprio su tale impostazione si basa lo studio dettagliato della superficie di Veronese che, come è noto, gode di proprietà importanti, tra le quali quella di trasformarsi per sezione e proiezione nella superficie romana di Steiner, oggetto di studi generalizzati. Il linguaggio stesso utilizzato da Segre è quello che sarà in seguito il classico linguaggio di chi fa uso dell'impostazione di Klein; come notato da Hawkins, è il primo esempio di tale utilizzazione.

Come detto e come era naturale il lavoro di Segre è strettamente collegato al contemporaneo lavoro di Veronese, che Segre inizialmente ignorava. Le differenze tra le due impostazioni sono chiarite in una nota che mette in risalto soprattutto il concetto di isomorfismo e l'idea della indefinitezza dei concetti fondamentali della geometria.

> In esso si applica il fatto evidente che tutte quelle proprietà di una varietà lineare che dipendono unicamente dalla sua linearità e dalla sua estensione (...) sussistono pure per tutte le varietà lineari aventi la stessa estensione, qualunque ne siano gli elementi. Questo fatto mette in luce l'importanza della geometria proiettiva ad n dimensioni quando all'elemento o punto dello spazio in essa considerato non si attribuisca alcun carattere speciale: ... Il signor Veronese nelle sue importanti ricerche di geometria a n dimensioni si pone da

([31]) G. Veronese, La superficie omaloide normale a due dimensioni e del quarto ordine dello spazio a cinque dimensioni e le sue proiezioni nel piano e dello spazio ordinario, *Atti della R. Accademia dei Lincei*, 19, 1884, pp. 344-371.

> un punto di vista diverso, in quanto che per lui "l'elemento generatore ... non è già un elemento di natura qualsiasi ma il punto tale quale ce lo immaginiamo nel nostro spazio." Con ciò mi pare che mentre scema quella gran fecondità della geometria a più dimensioni ... si va incontro all'obiezione che il punto, quale si concepisce nel nostro spazio e appunto pel modo con cui qui lo concepiamo non è più concepibile fuori di esso ove potrebbe anche non esistere. Né sembra che, lasciando indeterminata la natura dell'elemento ... si venga a perdere (...) la facoltà di rappresentare le figure e costruzioni di quello mediante figure e costruzioni dello spazio ordinario; anzi il numero delle rappresentazioni viene così ad accrescersi immensamente potendosi prendere nello spazio ordinario come rappresentanti di quelle figure non più soltanto i punti ma infinite altre specie ... di enti geometrici. (Segre 1884-85, in *Opere*, v. IV, p. 13)

In questo suo primo biennio di attività il giovanissimo Segre ha quindi:

- Reimpostato lo studio della geometria proiettiva iperspaziale, basandola solidamente sull'algebra lineare.
- Impostato correttamente il rapporto tra algebra moderna e geometria anche in termini di capacità reciproca di traduzione dei rispettivi metodi
- Colto l'importanza della impostazione di Lie e Klein e dei gruppi di trasformazione per lo studio della geometria.

Un bilancio non da poco, destinato ad arricchirsi negli anni successivi! Vale forse però la pena precisare che non sempre (e soprattutto attraverso i suoi allievi) Segre raccoglierà la ricca messe di risultati che i suoi metodi aprivano. Tornerò su quest'argomento ricordando ora che, per quanto riguarda la impostazione secondo il programma di Erlangen sarà soprattutto Gino Fano a sviluppare le idee del maestro: non a caso Klein affiderà a lui la redazione del capitolo sui gruppi continui di trasformazione della sua *Enzyklopädie*([32]), che sarà poi tradotto e sviluppato da Elie Cartan.

([32]) Kontinuierliche geometrische Gruppen. Die Gruppentheorie als geometrisches Einteilungsprinzip, *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften,* III, 4a, 1907, pp. 221-288.

Gli anni che iniziano nel ’84 sono gli anni della più intensa collaborazione con Klein, collaborazione che diviene sempre più tra uguali piuttosto che tra maestro e allievo. Segre riconosce sempre la grande influenza dell’opera del matematico tedesco:

> Je n’oublierai jamais l’effet qu’on produit sur moi, la première fois que je l’ai lus vos travaux des premiers tomes de Math. Ann. et le programme de 1872 et puis votre petit livre sur la théorie des fonctions algébriques suivant Riemann! ([33])

Va subito precisato che lo stretto rapporto tra i due matematici si basa soprattutto sulla rilettura e sulla reinterpretazione da parte di Segre della produzione del matematico tedesco di una decina di anni prima, mentre Klein è soprattutto impegnato in un’altra tematica, quella riguardante le funzioni automorfe che lo vedono in competizione con Poincaré ([34]). C’è a mio avviso una lettera sempre diretta a Klein che dà il senso della coscienza di una tale assenza e del rammarico per il senso di incompletezza della sua opera che accompagna per tutta la vita il matematico di Saluzzo e che colpisce anche chi legga attentamente i suoi lavori. Scriverà Segre molti anni dopo:

> Serait depuis longtemps mon désir de diriger mes recherches vers les champ des fonctions en général et de celles abéliennes en particulier, en faisant ainsi une évolution semblable à celle que, Vous-même, Vous avez faite. Malheureusement ma santé, toujours délicate, m’en a empêché jusqu’à présent : d’autant plus que j’ai ne pas encore achevé le programme géométrique que je m’étais fait presqu’à mon début dans la science. ([35])

In effetti questa tematica sarà sfiorata negli anni ’90 attraverso dei lavori che, a mio avviso, non hanno avuto la meritata attenzione (nemmeno dello stesso Klein) almeno fino a Elie Cartan, molti anni dopo. Ma su ciò ritornerò.

Nel frattempo l’attenzione posta da Segre sull’opera giovanile di Klein si andrà concretizzando, non solo nel lavoro geometrico, ma anche

([33]) Lettera di Segre a Klein del 1 settembre 1884.

([34]) Può in effetti destare qualche sorpresa la scarsezza di riferimenti di Segre all’opera del matematico francese.

([35]) Lettera di Segre a Klein del 28 novembre 1889.

in un'attenta collaborazione nella revisione e nel rilancio di quest'opera. Mi riferisco soprattutto al fatto che il 5 gennaio 1884, Klein incaricherà Segre di rivedere la sua Inauguraldissertation di Bonn del 1868([36]). Con la solita discrezione da bravo allievo Segre fa notare vari errori:

> J'avais déjà trouvé quelques petits inexactitudes dans votre travail lorsque je l'avais étudié: à la votre lettre j'ai le relu complètement et voici ce que j'y ai trouvé à corriger([37]).

Inutile dire che gran parte delle correzioni vennero accettate da Klein([38]).

4. – Le superfici rigate e l'incontro con la geometria birazionale

Con il gennaio del 1884 Segre, sempre dando sviluppo al suo programma di ricerca, passa con decisione ad un argomento centrale per gli sviluppi successivi, la geometria algebrica e in particolare lo studio delle superfici rigate. Sin dall'inizio Segre si pone obiettivi di ampia portata e cioè quello di una completa classificazione delle rigate algebriche. I metodi impiegati sono strettamente quelli iperspaziali enunciati nella tesi, ma su questo terreno necessariamente egli si trova a confrontarsi con i lavori di poco precedenti di Max Nöther. Così scriverà a Klein:

> Après les recherches que j'ai publiées sur les surfaces réglées rationnelles et elliptiques, j'ai voulu m'occuper des surfaces réglées d'ordre n et genre p quelconque, et malgré des difficultés d'un ordre beaucoup plus élevé je suis parvenu à des résultats qui me semblent dignes de remarque.([39])
> Il est remarquable que Vous appeliez dans Votre lettre mon attention sur les recherches de Nöther et particulièrement sur le théorème de Riemann et Roch, tandis que je m'étais justement beaucoup valu de ces recherches et

([36]) F. Klein, *Über die Transformation der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades zwischen Linien-Coordinaten auf eine canonische Form*, Bonn, Georgi, 1868; poi appunto ristampato con modifiche nei *Mathematische Annalen*, 23, 1884, pp. 539-578.

([37]) Lettera di Segre a Klein del 5 gennaio 1884.

([38]) Un esame attento delle modifiche realizzate nella stesura finale del lavoro per gli *Annalen* in base ai suggerimenti di Segre si trova nel già più volte citato articolo di Luciano e Roero, al quale rinvio.

([39]) Lettera di Segre a Klein del 25 dicembre 1886.

j'avais appliqué précisément ce théorème pour parvenir à un des plus importants parmi mes résultats.[40]

È una svolta significativa: i metodi birazionali si intrecciano, a partire da questo momento, con i prediletti metodi proiettivi iperspaziali. I lavori si sviluppano tra il gennaio 1884 e il 1889 attraverso una serie di articoli che partono dalle rigate razionali (di genere zero)[41], a quelle ellittiche (genere uno)[42], a quelle di genere qualsiasi[43], affrontando e superando difficoltà crescenti.

Il primo lavoro porta la data del 31 gennaio 1884 ed è in diretta continuità (non solo temporale) con i metodi proiettivi iperspaziali introdotti nella tesi. Segre determina qui la classificazione completa delle rigate razionali in spazi di qualsiasi dimensione, correggendo quanto detto da Veronese[44] e ritrovando, come caso particolare, quanto dimostrato da Clebsch per lo spazio ordinario.[45] Il passaggio ai casi successivi richiese un travaglio maggiore e i due lavori vennero presentati dopo un più lungo lasso di tempo, nel maggio 1886 e nel gennaio dell'anno successivo, mentre, anche per motivi di salute, si dovrà aspettare il gennaio 1889 per l'apparizione della seconda parte del lavoro sugli *Annalen*. Segre, come accennato prima, si trovò costretto ad affinare i suoi metodi e ad assimilare pienamente i metodi birazionali soprattutto nella direzione sviluppata da Brill e Nöther[46].

(40) Lettera di Segre a Klein del 17 febbraio 1887.

(41) C. Segre, Sulle rigate razionali in uno spazio lineare qualunque, *Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino*, 19, 1883-1884, pp. 265-282; *Opere*, v. I, pp. 1-16.

(42) C. Segre, Ricerche sulle rigate ellittiche di qualunque ordine, *Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino*, 21, 1885-1886, pp. 628-651; *Opere*, v. I, pp. 56-77.

(43) C. Segre, Recherches générales sur les courbes et les surfaces réglées algébriques, I, *Mathematische Annalen*, 30, 1887, pp. 203-226; II, 34, 1889, pp. 1-25 ; *Opere*, pp. 80-104.

(44) G. Veronese, Behandlung ... cit.

(45) R. Clebsch, Über die geradlinigen Flächen von Geschlecht $p = 0$, *Mathematische Annalen*, 5, 1872, pp. 1-26.

(46) In particolare Segre fa riferimento al lavoro fondamentale dei due matematici tedeschi A. Brill, M. Nöther, Über die algebraischen Functionen und ihre Anwendung in der Geometrie, *Mathematische Annalen*, 7, pp. 269-310; nonchè a M. Nöther, Zur Grundlegung der Theorie der algebraischen Raumcurven, *Abhandlungen der königliche Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 1882.

Non è qui il luogo per una descrizione dettagliata di questi lavori ([47]), ma per chiarire il punto di vista del nostro mi limito a una citazione dal lavoro sugli *Annalen*:

> La méthode dont nous faisons usage dans ce § pour obtenir les courbes algébriques, qui consiste à les considérer comme transformations uniformes des courbes planes, a été appliquée aux courbes gauche par MM. Brill et Nöther ... Presque tout ce premier paragraphe de notre travail est une extension du § 2 de ce Mémoire de M. Nöther aux courbes d'un espace quelconque. Pour les propositions dont nous ferons usage sur les séries linéaires de groupes de points d'une courbe algébrique (plane) nous renvoyons une fois par toutes au Mémoire cité de M.M. Brill et Nöther. (in Opere, v. I, p. 81)

5. – La piena maturità e l'incontro con Castelnuovo

Il filone di ricerca che ho sommariamente percorso si è svolto tra il 1884 e il 1889. In questi anni la vita di Segre è profondamente cambiata, sia sul piano personale che su quelli accademico e scientifico. Occorre quindi riprendere il filo di quello che vuole essere un percorso "per una biografia scientifica" facendo qualche passo indietro negli anni.

Innanzitutto va messo in rilievo che la recezione di Segre nell'ambiente matematico italiano è stata immediata. A titolo di esempio voglio mostrare come tra gli allievi di Cremona, il giovanissimo Segre abbia subito giocato un ruolo essenziale. Il caso più documentato è quello di Ettore Caporali, considerato, insieme a De Paolis, il migliore allievo diretto di Cremona. Il 13 settembre 1885 il matematico umbro scriveva a Segre:

> Ciò che Ella mi scrive intorno ai miei studi sulle curve del quarto ordine è interessante e dimostra che Ella ha immediatamente penetrato lo spirito di quelle ricerche. Per quanto poco avanzate, esse hanno una storia complicata e la relazione con diverse cose estranee alla scienza che m'impediscono da tre

([47]) Per una tale descrizione approfondita, anche alla luce dei risultati moderni rinvio a F. Ghione, Quelques résultats de Corrado Segre sur les surfaces réglees, *Mathematische Annalen*, 255, 1981, pp. 77-95; F. Ghione, G. Ottaviani, A tribute to Corrado Segre, in G. Ellingsrud, C. Peskine, G. Sacchiero (eds.), *Complex Projective Geometry*, London Mathematical Society Lecture Notes, 179, 1992, pp. 175-188.

anni di attendere allo studio con quella regolarità e quella perseveranza che sole permettono di cavarne buoni frutti ... Quando Ella pubblicò la sua memoria sulla geometria delle coniche, vidi immediatamente il partito che si poteva trarre dall'uso sistematico di quel modo di rappresentazione ([48]).

Questa lettera è particolarmente significativa per vari motivi: Caporali, che nel 1885 era già da tempo professore ordinario a Napoli, si rivolge a Segre, ventiduenne, laureato da solo due anni e appena assistente di D'Ovidio, come a un punto di riferimento. Ma a mio avviso c'è di più: questa lettera che contiene i progetti di lavoro di Caporali, mostra con chiarezza come i metodi iperspaziali elaborati da Segre e Veronese si inserissero perfettamente nel quadro dei programmi di ricerca della scuola cremoniana: anzi possiamo dire che proprio le applicazioni di Segre abbiano dato a una serie di ricerche interessanti, ma alquanto disperse una visione d'insieme che permettesse un uso sistematico di una metodologia coerente. Sta nascendo il linguaggio che caratterizzerà il modo "italiano" di lavorare in geometria algebrica. Se ne renderà ben conto lo stesso Segre che è ben conscio che si tratti di un linguaggio fortemente caratterizzante l'ambiente italiano e cercherà di comunicarlo all'ambiente internazionale, scrivendo:

Il ne s'agit pas (j'ajoute cela pour celui qui ne serait pas au courant des progrès que cette branche des mathématiques est en train de faire, surtout en Italie) de faciles extensions aux espaces supérieurs des résultats qui pour l'espace ordinaire soient déjà connus. Au contraire il s'agit de résoudre des questions qui, même pour celui-ci, sont nouvelles et non dépourvues d'intérêt ni de difficulté; et en introduisant les espaces de toutes les dimensions on n'a pas seulement l'avantage de la plus grand généralité, mais encore celui de pouvoir se servir dans toute sa force d'un instrument que ne possède pas celui qui veut se borner à l'espace ordinaire: c'est-à-dire la considération des êtres d'un espace comme projection de ceux des espaces supérieurs. ([49])

([48]) Lettera di Caporali a Segre del 13 settembre 1885 in C. Segre, Alcune idee di Ettore Caporali intorno alle quartiche piane, *Annali di matematica pura ed applicata*, (2), 20, 1892, pp. 237-242.

([49]) C. Segre, Recherches ... II, cit.

Possiamo vedere che sin d'allora Segre aveva indicato l'atteggiamento che i geometri algebrici manterranno costantemente nei confronti della geometria degli iperspazi: come indicherà Enriques molti anni più tardi in sede di riapprezzamento storico si trattava di un *ordinario istrumento di lavoro*.

6. – La Geometrie der Lage e la geometria proiettiva complessa

L'avvenimento scientificamente più importante nella vita di Segre in questi anni 1884-1889 fu, a mio avviso, l'incontro con Guido Castelnuovo. Come è noto, Castelnuovo, nato nel 1865, si era laureato a Padova con Veronese ed era quindi esperto di geometria iperspaziale. I primi contatti epistolari tra i due vertono proprio su questioni legate agli iperspazi. Sin dal primo lavoro ([50]), nel luglio 1885, il matematico veneziano cerca e trova un punto di riferimento nel suo coetaneo piemontese: è evidente che per vari motivi Veronese non è più interessato allo sviluppo di una scuola in grado di portare avanti le sue brillanti idee.

> E Veronese cosa fa? Sono già anni che aspettiamo invano suoi lavori. Ne aveva promessi, ma poi ... ricordo specialmente che ai Lincei aveva presentato colla memoria dei Math. Ann. un manoscritto che la completava e che mi disse che avrebbe poi pubblicato. ([51])

Segre quindi non soltanto discuterà per lettera di tutti i lavori nel frattempo pubblicati dall'amico, ma ne guiderà i passi nell'anno passato a Roma con Cremona e infine lo presenterà a D'Ovidio

([50]) G. Castelnuovo, Angoli di due spazi contenuti nello spazio ad *n* dimensioni, *Atti del Regio Istituto Veneto di Scienze, Lettere e Arti,* (6), 3, 1885, pp. 1331-1348

([51]) Lettera di Segre a Castelnuovo del 30 dicembre 1886. Le lettere di Segre a Castelnuovo sono state inserite, a cura di Paola Gario, nel sito http://archivi-matematici.lincei.it/ dell'Accademia dei Lincei, a cui mi riferirò sempre. In effetti Veronese, dopo aver pubblicato nel 1884 il rilevantissimo lavoro "La superficie omaloide ..." cit., non pubblicherà più niente fino al 1889 e anche dopo niente riguardo la geometria algebrica, ma solo sui fondamenti della geometria. Ciononostante tra i suoi allievi diretti vi sarà un altro geometra algebrico di prima grandezza, Francesco Severi.

facendogli ottenere il posto di assistente a partire dall'autunno 1887 e fino al conseguimento della cattedra romana nel 1891. La corrispondenza mostra come gradualmente dal ruolo di guida, Segre assumesse quello di collaboratore alla pari di Castelnuovo. Forse il primo lavoro di piena collaborazione tra i due è proprio quello (il secondo) relativo alle superfici rigate di genere qualsiasi in cui Segre fa pieno uso dei contemporanei risultati di Castelnuovo([52]). È interessante leggere il modo di lavorare dei due dalla corrispondenza:

> Siccome ora ricorro direttamente alla tua formula generale degli spazi contenenti più generatrici di una rigata ... Quando tu avrai le bozze di quella Nota potresti rimandarla a me, che poi la invierei a Palermo?([53])

Vista la fama raggiunta, Segre otterrà senza problemi la cattedra nel 1888 e darà inizio alle sue celebri lezioni di Geometria Superiore, tutte accuratamente trascritte nei suoi quaderni che costituiscono un patrimonio inestimabile per la storia della geometria algebrica([54]), vero strumento di formazione di una scuola geometrica.

Facendo ancora una volta un passo indietro, nel 1886 Segre, forse stimolato dalla vicinanza con Peano, fece un incontro assai fecondo e importante: quello con l'opera di von Staudt e i fondamenti della geometria. In particolare fu ai *Beiträge*([55]) e alla geometria proiettiva complessa che il nostro si avvicinò con un interesse che non lo abbandonerà più per tutta la sua carriera scientifica. Al solito ne dà un annunzio a Klein:

> Je suis en train d'écrire un travail en italien de géométrie projective pure sur la théorie de couples d'éléments imaginaires. La théorie que Staudt a donné dans

([52]) G. Castelnuovo, Una applicazione della geometria enumerativa alle curve algebriche, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 3, 1889, pp. 27-37

([53]) Lettera di Segre a Castelnuovo del 27 dicembre 1888.

([54]) I Quaderni di Segre sono conservati presso il Dipartimento di matematica di Torino e sono disponibili sul CD-Rom: L. Giacardi (a cura di), *I Quaderni di Corrado Segre,* CD-ROM, Torino, Dipartimento di matematica, Università di Torino, 2002.

([55]) K.G.C. von Staudt, *Beiträge zur Geometrie der Lage*, Nürenberg, 1856-1860.

ses Beiträge est compliquée par la séparation qu'il a faite des éléments imaginaires conjugués.(56)

Il lavoro(57) apparve nello stesso febbraio 1886. Non mi soffermerò qui su questo lavoro, che riveste caratteristiche eminentemente didattiche, ma vorrei solo sottolineare come esso sia permeato da uno spirito rigorista che evidentemente si respirava in quel momento a Torino e che caratterizza soprattutto i lavori di Peano, che nel 1884 aveva partecipato alla pubblicazione del Genocchi-Peano e che tra il 1888 e il 1889 pubblicherà i suoi famosi volumi sul calcolo geometrico e sui fondamenti dell'aritmetica e della geometria. Il lavoro di Segre ha come principale obiettivo quello di rendere fruibili anche didatticamente le idee di Staudt sull'uso dei complessi in geometria, ma anche più in generale, di spingere verso una sistemazione rigorosa della geometria proiettiva. Scrive ad esempio nel detto lavoro:

> Egli [Reye] definisce gli elementi imaginari appunto come i due elementi uniti di una proiettività di forme di 1ª specie sovrapposte, le quali non abbiano punti uniti (reali). Tale definizione, che anche altri autori usano, mi pare assolutamente da rigettare, perché contiene evidentemente in sé qualche cosa di assurdo, e nello stesso tempo introduce gli elementi imaginari con una locuzione che non sta per significare alcun ente geometrico. Essa rassomiglia alla definizione che alcuni danno di una coppia di punti imaginari coniugati di una retta: la coppia dei punti d'intersezione di questa con un circolo che non la incontri. (Segre, 1886, in *Opere*, v. II, p. 209)

Mi pare illuminante della tendenza del nostro, in modo simile a quanto Peano aveva fatto nelle sue aggiunte al Genocchi, questa analogia con l'introduzione dei punti all'infinito:

> Osservazioni analoghe a quelle che ho fatto riguardo ai modi con cui ordinariamente si introducono gli elementi imaginari valgono per gli elementi all'infinito (punti, rette e piano). Il solo modo rigoroso d'introdurre ad esempio i

(56) Lettera di Segre a Klein del 25 febbraio 1886.

(57) C. Segre, Le coppie di elementi imaginari nella geometria proiettiva sintetica, *Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino*, (2), 38, 1886, pp. 3-24; *Opere*, v. II, pp. 208-236.

> punti all'infinito come enti geometrici, sì da poterne far uso nei ragionamenti, è di definirli non già come punti d'intersezione (come fanno in sostanza quasi tutti gli autori), ma bensì come sinonimo di direzioni, oppure, se si vuole, di stella di rette parallele. La considerazione che si suol usare del fatto che quando due rette del piano tendono a diventar parallele il loro punto d'intersezione s'allontana indefinitamente non può servire che per giustificare la scelta della locuzione punto all'infinito, ma non per definirla, se si vuole, come si deve volere (lo ripeterò ancora), che essa significhi un ente geometrico. (Segre, 1886, in *Opere*, v. II, p. 210)

Mi sembra che queste considerazioni, anche se oggi possiamo considerarle ampiamente scontate, mostrino l'attenzione che Segre dedica ai problemi di un linguaggio rigoroso, soprattutto nei riguardi della didattica. Che di tali problemi si tratta lo afferma lui stesso (*fu appunto pel corso di geometria proiettiva che ero incaricato di fare quest'anno nell'università di Torino che imaginai questo metodo*).

Un'ultima notazione. Da quanto risulta da questo lavoro Segre aveva letto con grande attenzione le *Vorlesungen über neuere Geometrie* di Moritz Pasch; vale la pena notare che quest'opera sta a fondamento di quella di Peano sulla geometria dell'89.

Pur prendendo le mosse anch'esso dai *Beiträge*, ha ben altro contenuto ed ambizione la serie di lavori (4) pubblicati tra il 1889 e il '90 dal titolo complessivo *Un nuovo campo di ricerche geometriche* ([58]). In tali lavori, andando ben al di là dell'opera di von Staudt, Segre determina i fondamenti di una vera e propria geometria proiettiva complessa. In questo lavoro vengono introdotte le antiproiettività (che Staudt aveva appena sfiorato), le catene (*Kette* per Staudt che le introduce solo nel caso della retta), gli enti iperalgebrici (definiti da funzioni algebriche di variabili complesse e delle loro complesse coniugate), ecc. Ricordo che le catene sono i punti fissi di un'antiproiettività, quindi ad esempio nel caso della retta proiettiva complessa le circonferenze; che tra gli enti iperalgebrici sono quelli determinati dalle forme hermitiane (iperconiche e iperquadriche) ecc. Nel senso dei fondamenti vale soprattutto

([58]) C. Segre, Un nuovo campo di ricerche geometriche, *Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino*, 25, 1889-90, pp. 180-205; 290-317; 376-396 e 26, 1890-91, pp. 35-71; *Opere*, v. II, pp. 237-337.

la dimostrazione che le trasformazioni che conservano l'armonicità di quattro punti sono necessariamente proiettività o antiproiettività.

Si tratta di una sistemazione effettiva e nuova di un campo assai vasto. In particolare le moltissime note del lavoro mostrano l'attenzione di Segre per gli aspetti più propriamente analitici ed algebrico / aritmetici cui fa riferimento continuamente. Do qui un esempio:

> Già in certe ricerche analitiche recenti si [ha] un esempio particolare di cose che qui si tratteranno geometricamente. Negli studi ... sulle funzioni di una variabile complessa le catene semplici descritte da questa, cioè i circoli che le rappresentano nel piano o nella sfera su cui la variabile vien distesa sono usati frequentemente: in particolare essi furono adoperati nelle ricerche delle funzioni che non mutano per un gruppo di trasformazioni lineari della variabile, e in particolare in quelle generali e profonde del sig. Poincaré sulle funzioni fuchsiane e kleiniane ... Ed effettivamente nelle ricerche sulle funzioni di due variabili complesse fatte in questi ultimi anni dai sig.ⁱ Picard e Poincaré e specialmente in quelle del primo sulle funzioni che egli chiamò iperfuchsiane, si trovano usate le iperconiche, definite in modo diverso dal nostro ... Il sig. Picard si trova così condotto necessariamente a qualche ricerca sulla riduzione della (3) [cioè delle forme hermitiane] a forma canonica i cui risultati nella trattazione geometrica appariranno evidenti. E prosegue in nota: *Aggiungerò che le forme del tipo (3) [hermitiane] ... a coefficienti complessi interi si sono pure già introdotti nella teoria dei numeri grazie ai sig.ⁱ Hermite, Picard ed altri.* (Segre, 1889 - 90, in *Opere*, v. II, p. 289)

Qui Segre continua su di un importante aspetto del suo impegno scientifico sin dalla tesi: intendo dire il suo attento seguire i risultati e i metodi analitico – algebrici per costantemente interpretarli e tradurli in termini geometrici. Una prova dell'importanza attribuita da Segre a questi lavori sta anche nella pronta (del settembre 1891) pubblicazione di uno sviluppo di tali ricerche nei *Mathematische Annalen*(59). Su questo importante lavoro mi limiterò a notare che in esso viene ampiamente trattata e sviluppata dal punto di vista proiettivo(60) l'alge-

(59) C. Segre, Le rappresentazioni reali delle forme complesse e gli enti iperalgebrici, *Mathematische Annalen*, 40, 1891, pp. 413-467; *Opere*, v. II, pp. 338-395.

(60) Per quanto io ne sappia è la prima volta che si parla esplicitamente di Geometria proiettiva su di un'algebra generale.

bra dei bicomplessi, che nel precedente lavoro era stata solo sfiorata in una nota. È questo un altro punto di contatto con i più recenti sviluppi dell'algebra, anzi della prima esposizione, in Italia, della moderna teoria delle algebre, seguendo soprattutto l'impostazione di Dedekind e Weierstrass che, come è noto, avevano pubblicato i loro risultati tra il 1884 e il 1886 nei *Göttinger Nachrichten*.

A onta delle aspettative di Segre, l'importanza di questi lavori fu assai poco colta, soprattutto in Italia. Questo fatto amareggiò molto Segre che ne ebbe a lamentarsi nella corrispondenza. Si veda ad esempio quanto egli scrive ad Adolf Hurwitz (con il quale era entrato in corrispondenza dal 1890) nel 1894:

> Colgo quest'occasione per richiamare la Sua attenzione anche sulle mie Note (che Ella ha) intitolate "Un nuovo campo di ricerche geom." e "Le rappresentaz.[i] reali delle forme complesse ..." perché se Ella, proseguendo le sue ricerche aritmetiche passerà alle forme di Hermite, troverà forse qualche punto di contatto con quei miei lavori. Infatti io studio ivi, fra gli altri enti iperalgebrici, quelli che chiamo iperconiche, ecc. che sono rappresentati analiticamente da equazioni $\sum a_{ik} x_i \bar{x}_k = 0$ di Hermite; e che così danno l'equivalente geometrico delle forme di Hermite: come le coniche, ecc. danno l'immagine geometrica delle forme di Dirichlet (ternarie, ecc.). Né il Fricke né il Bianchi non hanno ancora approfittato di questi miei lavori, ma io sono persuaso che un profitto se ne possa trarre studiando le questioni aritmetiche con sussidi geometrici. ([61])

Già nel settembre 1889 Segre aveva, come ormai sempre, comunicato all'amico Guido i suoi progetti di lavoro:

> Ora da qualche settimana ho ripreso antiche questioni sugli enti imaginari nelle forme di 1[a], di 2[a], ... specie, sulla loro rappresentaz.[e] in forme reali, (i p.[i] del piano nei p.[i] reali di S_4, ecc.) e ho trovato e trovo dei risultati che spero ti interesseranno. In certi punti si può dire che continuo i Beiträge di Staudt (scrivimi che impressione ricevi da questi). ([62])

([61]) Lettera di C. Segre a A. Hurwitz del 29 giugno 1894, in E. Luciano e C.S. Roero, From Turin to Göttingen ..., cit.

([62]) Lettera di C. Segre a G. Castelnuovo del 6 settembre 1889.

Il tema sarà poi praticamente assente nella fitta corrispondenza tra i due e ciò a mio avviso dimostra la freddezza di Castelnuovo su questa tematica. Naturalmente ciò è strettamente collegato con l'ampiezza delle prospettive che si aprivano dalla collaborazione tra i due su quella che sarà in effetti la tematica centrale della scuola italiana di geometria algebrica. Castelnuovo fu lucidamente cosciente di ciò. Nella sua commemorazione dell'amico, del 1924, scriveva:

> Queste ricerche ... non hanno trovato sinora il largo appoggio sul quale egli forse faceva assegnamento. Le innovazioni o generalizzazioni penetrano lentamente nella scienza, a meno che esse non portino una economia di pensiero nello studio di quei problemi che, in un determinato periodo, attirano l'attenzione dei ricercatori (63).

In realtà, nel 1924, le idee di Segre si erano in realtà dimostrate capaci di portare *economia di pensiero* in un campo diverso da quello seguito dai geometri algebrici italiani. Fu in effetti Elie Cartan il primo a sfruttare pienamente le idee del matematico di Saluzzo. Riporto quanto scritto dal matematico francese nelle sue lezioni alla Sorbona del 1929-'30, quando cercava di dare una veste sistematica e didatticamente coerente alle sue ricerche; scrive Cartan:

> La géométrie projective complexe, considéré comme discipline autonome, ..., c'est principalement développée à la suite des travaux de Juel et surtout de C. Segre. Ce dernier géomètre a montré l'importance des transformations antiprojectives ... à coté des transformations projectives, qu'on avait seules considérées auparavant. Parmi les antiprojectivités, les antiinvolutions et les antipolarités font intervenir des êtres géométriques dont le rôle ne le cède en rien à celui joué par les quadriques et les complexes linéaires, envisagés comme éléments de base des polarités proprement dites (64).

Non si tratta solo di un riconoscimento del ruolo giocato da Segre, Cartan ha la stessa visione e usa quasi le stesse parole del matematico

(63) G. Castelnuovo, Commemorazione del socio nazionale Corrado Segre, *Atti della R. Accademia dei Lincei, Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali*, (5), 33, 1924, pp. 353-359.

(64) E. Cartan, *Leçons sur la Géométrie projective complexe*, Gauthier Villars, 1931.

italiano per i quali i riferimenti sono continui. Naturalmente questo è un lavoro di sistemazione. L'uso effettivo del linguaggio e dei risultati della geometria proiettiva complessa nell'opera di Cartan era iniziato parecchi anni prima, soprattutto nella cosiddetta trilogia sui gruppi di Lie del 1913-'14 ([65]). Non entrerò nei dettagli di questi lavori, rinviando su ciò interamente agli importanti studi di Thomas Hawkins ([66]). Qui mi limito a segnalare che negli anni in cui scriveva la trilogia Cartan era impegnato nella traduzione dell'articolo di Gino Fano ([67]) per la *Enzyklopädie* di Klein e che nel 1927 avrà come allievo Beniamino Segre che proprio con Corrado (cugino del padre) si era laureato.

Il tema del mancato sviluppo delle idee di Segre sull'argomento esula da questo intervento, ma mi sembra abbia un certo interesse storico. Si tratta indubbiamente di una sistemazione concettuale di ampia portata e di svariate applicazioni, ma, come notato da Castelnuovo, nei confronti del principale filone di ricerca dello stesso Segre, *questa sistemazione non presenta all'intuizione geometrica i vantaggi che si cercano*; ma tali vantaggi sono invece presenti in una serie di applicazioni che Segre aveva puntualmente indicato (ma purtroppo non sviluppato) in molte brevi note, folgoranti per la capacità di visione complessiva ([68]). In qualche modo è principalmente attraverso gli stretti rapporti con gli allievi che le idee straordinariamente innovative di Segre fruttificavano. Ricorro ancora a Castelnuovo per sintetizzare questo ruolo straordinario.

([65]) E. Cartan, Les groupes projectifs qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane, *Bulletin des Sciences mathématiques*, 4 1, 1913, pp. 53-96; Les groupes projectifs continue réels qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane, *Journal des mathématiques pures et appliquées*, 10, 1914, pp. 149-186; Les groupes réels simples finis et continus, *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieur de Paris*, (3), 31, 1914, pp. 263-355.

([66]) Cfr. T. Hawkins, Lie Groups and geometry... cit, *Emergence of the theory of Lie Groups...* cit., particolarmente il capitolo 8.

([67]) E. Cartan, La théorie des groupes finis et continus et la géométrie. Exposé d'après l'article allemand de G. Fano, *Encyclopédie des sciences mathématiques*, III, 1, 1915. L'articolo fu pubblicato integralmente solo dopo la guerra nelle *Oeuvres* di Cartan.

([68]) Oltre alle note citate si veda ad esempio (nel lavoro C. Segre, Le rappresentazioni reali ... cit.) la nota 60 di p. 385 del secondo volume delle *Opere* circa i recenti usi della teoria delle algebre nello studio dei gruppi di Lie.

Va pure osservato che, mentre egli aspira ad aprire nuove vie alla indagine geometrica, non si sforza poi di percorrere queste vie fin dove appaiono feconde. ... Questa tendenza ... se ha posto dei limiti alla sua opera, del resto vastissima, ha immensamente favorito l'attività della scuola che da lui prende il nome. In altre parole, in alcuni settori sono mancati a Segre un Castelnuovo o un Enriques. I numerosi apporti dei matematici italiani su campi legati all'opera di Segre appena descritta (si pensi in settori diversi a Comessatti per la geometria algebrica reale o a Fubini per le geometrie hermitiane) appaiono in effetti derivati solo per via molto indiretta dall'opera del nostro. A mia conoscenza l'unica significativa (ma anch'essa sottovalutata) risposta scientifica all'impostazione di Segre venne ancora una volta da Mario Pieri nel suo lavoro([69]) sulla geometria proiettiva complessa del 1904

Prima di abbandonare questo settore indico, con un ampio balzo in avanti cronologico, l'ultimo lavoro in cui Segre chiarificò e portò avanti la sua concezione di geometria proiettiva su un'algebra (possibilmente con divisori dello zero). Si tratta del lavoro([70]) del 1911 sugli spazi duali, che qui non tratterò pur sottolineandone l'importanza.

Prima di abbandonare questo aspetto del lavoro di Segre non si può fare a meno di ricordare la pubblicazione, nel 1889, della traduzione italiana della *Geometrie der Lage* di Staudt([71]). Come è noto la traduzione è dovuta a Mario Pieri, con una prefazione di Segre che aveva caldeggiato la sua effettuazione.

> Mon admiration pour la Geom. D. Lage (et Beiträge) de Staudt va avoir la satisfaction d'en voir paraître une version italienne (pour à –présent, seulement de la G. d. L.) : ce que ma maladie aux yeux ne me permettait pas de faire, un jeune géomètre qui est ici, M. Mario Pieri, le fera([72]).

([69]) M. Pieri, Nuovi principii di geometria proiettiva complessa, *Memorie della R. Accademia delle scienze di Torino*, (2), 55, 1904-05, pp. 189-235.

([70]) C. Segre, Le geometrie proiettive nel campo dei numeri duali, *Atti della R. Accademia delle scienze di Torino*, 47, 1911-12, pp. 114-133 e 164-185; Opere, v. II, pp. 396-431.

([71]) G. K. C. von Staudt, *Geometria di Posizio*ne, Bocca, Torino, 1889.

([72]) Lettera di Segre a Klein del 14 ottobre 1887.

Mi sia consentito di osservare con benevola ironia l'uso che Segre fa del termine *jeune géomètre* riferendosi a Pieri, di tre anni più anziano di lui! Ma questo porsi sin dall'inizio come caposcuola è una delle caratteristiche di Segre. Da notare comunque che proprio a von Staudt (oltre naturalmente che a Peano, di cui adotterà il simbolismo) sarà ispirato il primo lavoro di Pieri sui fondamenti([73]), di qualche anno dopo.

L'importante introduzione di Segre non è soltanto il suo primo cimento storiografico, ma rappresenta anche una sorta di manifesto della sua posizione sui fondamenti della geometria e sulle loro relazioni con la didattica e in particolare con la formazione dei docenti. In questo senso mi sembrano significative le parole di Staudt da lui citate:

> Affinchè l'insegnamento geometrico venga anche nelle scuole a dare maggiori impulsi e più frutti di quel che accade ora con un metodo che, tenendosi troppo alle cose minute e particolari, evita quasi espressamente le considerazioni generali che illuminano dall'alto il gran tutto e fanno distinguere la intima connessione fra le sue parti.

In un'altra traduzione, di ancora maggiore importanza per gli sviluppi della matematica italiana, fu quella del programma di Erlangen([74]), di cui Segre incaricò Fano, ancora studente, nel 1889. La traduzione, che riprende in parte quella fatta da Francesco Gerbaldi su indicazione di D'Ovidio, contribuì in modo decisivo alla comprensione del progetto di Klein, allora assai poco conosciuto. Come scriveva infatti Segre al matematico tedesco, *j'ai toujours pensé que ce travail n'ai pas connu comme il mériterait de l'être*([75]). La traduzione di Fano fu, come osservato da Hawkins([76]), *the first of many translations of the Erlanger Programm.*

([73]) M. Pieri, Sui principii che reggono la geometria di posizione, 3 memorie, *Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino*, 30, 1894-95, pp. 607-641 e 31, 1895-96, pp. 381-399 e 457-470.

([74]) F. Klein, Considerazioni comparative su ricerche geometriche recenti, tradotto da G. Fano), *Annali di Matematica pura ed applicata*, (2), 17, 1890, pp. 307-313.

([75]) Lettera di Segre a Klein del 9 novembre 1889.

([76]) T. Hawkins, *Emergence* ... cit., p. 253.

7. – I corsi di geometria superiore e il rifinimento dei metodi della "scuola"

Come già detto, con il 1888 Segre divenne professore straordinario e diede inizio ai corsi di geometria superiore di cui ci resta una preziosa testimonianza nei quaderni manoscritti. I corsi di Segre, anche se di anno in anno variano e spaziano su tematiche differenti, si riferiscono prevalentemente allo studio della geometria algebrica attraverso i metodi che lui, ormai in stretto collegamento con Castelnuovo, andava elaborando. Naturalmente non è obiettivo di questo lavoro esaminare con qualche dettaglio tali corsi.

I primi due corsi riguardano lo studio delle curve e superfici algebriche, ma quello di gran lunga più significativo, anche per il livello di alcuni degli allievi (Gino Fano e Federico Amodeo) fu quello del 1890-91, dal titolo *Introduzione alla geometria sugli enti algebrici semplicemente infiniti*, nel quale viene ripresa la tematica relativa alla geometria birazionale, studiando il caso della geometria sopra una curva alla luce dei lavori suoi e di Castelnuovo([77]). Come si è visto Segre si era posto il problema dell'assimilazione dei risultati di Brill e Nöther già dal 1885, quando preparava i suoi lavori sulle superfici rigate; come è noto il corso diede luogo a quello che può considerarsi il più importante lavoro del nostro([78]) dopo un lungo travaglio di più di due anni (l'articolo porta la data dell'autunno 1893); in tale lavoro vengono in gran parte riassunte le principali finalità del corso. Lascio quindi la parola allo stesso Segre, rinviando per approfondimenti alla letteratura([79]). Dopo aver ricordato l'esistenza di altri metodi classici di presentare la geometria su di una curva, quello funzio-

([77]) In particolare Segre si riferisce al classico G. Castelnuovo, Ricerche di geometria sulle curve algebriche, *Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino*, 24, 1889, 346-373.

([78]) C. Segre, Introduzione alla geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito, *Annali di matematica pura e applicata*, (2), 22, 1894, pp. 41 – 142; Opere, v. I, pp. 198 – 304.

([79]) Mi riferisco soprattutto alla introduzione di A. Conte al detto quaderno L. Giacardi, I Quaderni di Corrado Segre... cit.

nale derivato da Riemann; quello algebrico-geometrico, appunto di Brill e Nöther e quello aritmetico di Kronecker e Dedekind-Weber, Segre ricorda il percorso che, partendo appunto dai lavori sulle rigate, lo avevano portato ad elaborare quello che appunto sarà ricordato come il metodo tipico della scuola italiana (soprattutto dopo che Enriques e Castelnuovo lo avranno esteso ed adattato allo studio delle superfici), quello che Segre chiama geometrico:

> Nel fare, son già vari anni, delle ricerche sulle ricerche algebriche ... avendo io avuto bisogno di valermi delle proprietà delle serie lineari studiate nella memoria di Brill-Nöther mi accorsi come ... rappresentando quelle serie lineari mediante curve iperspaziali ... si potessero ritrovare (almeno in parte) quelle proprietà mediante semplici ragionamenti geometrici, evitando i calcoli algebrici o le considerazioni funzionali. (Segre 1894, in Opere, v. I, p. 199)

Si può notare che Segre segue qui la stessa linea direttrice espressa nella tesi: tradurre e interpretare in senso geometrico i metodi algebrici ed analitici che si andavano via via sviluppando.

Diffondere questi metodi tra i giovani restava l'obiettivo fondamentale del corso:

> Nella memoria attuale io espongo appunto il metodo geometrico che si è formato mediante questi lavori, quale è stato poi elaborato per un corso di lezioni di geometria ... svolto nell'anno 1890-91. ... L'esposizione verrà fatta principalmente con la mira di divulgare certe considerazioni geometriche che, se anche non sono più nuove, pure non sono abbastanza diffuse; sebbene in questi ultimi tempi, specialmente per opera del sig. Castelnuovo e di qualche altro giovane valoroso, abbiano dato alla scienza risultati essenzialmente nuovi ed importanti. (Segre 1894, in Opere, v. I, p. 200)

D'altra parte Segre si affretta a sottolineare che nel corso gli studenti erano stati introdotti a tutti i metodi:

> In quelle lezioni, a lato del metodo geometrico qui esposto, furono pure svolti il metodo Riemanniano e quello di Brill e Nöther. L'argomento infatti è tale che non è ben trattato se non si sviluppa sotto più aspetti. ... Tutti meritano di

essere studiati; ognuno ha i suoi pregi speciali; per ciascuno vi sono questioni in cui esso va più in là, od almeno riesce più luminoso di altri. (Segre 1894, in Opere, v. I, p. 200)

Segue poi un'osservazione a mio avviso di capitale importanza (e purtroppo poco seguita in Italia):

Valgano ... a richiamar l'attenzione di qualche geometra su certi lavori aritmetico-algebrici, sulla teoria generale dell'eliminazione, ecc. del Kronecker e della sua scuola: i quali lavori mi pajono d'importanza capitale per fondare solidamente l'edifizio geometrico. (p. 201)

Parole profetiche queste. L'operazione di sintesi tra il linguaggio aritmetico di Dedekind e Kronecker e quello geometrico italiano verrà iniziato molti anni dopo e non da un italiano (ma formatosi in Italia), Oskar Zariski e su questa base si svilupperà proprio l'operazione, prolungatasi fin quasi ai nostri giorni, di *fondare solidamente l'edifizio geometrico.* Ma questa è un'altra storia.

Nel caso in questione nel lavoro finale viene fatto pieno uso della definizione rigorosa di varietà data da Kronecker nel 1881 ([80]). Un ulteriore punto da sottolineare è che il lavoro sancisce l'inizio di una collaborazione e un'amicizia assai stretta tra Segre e Bertini che, nello stesso volume degli Annali, presenta una diversa esposizione dello stesso tema (la geometria su di una curva attraverso le serie lineari) utilizzando il metodo di Brill-Nöther. Questa collaborazione rappresenta una sorta di asse Torino-Pisa che durerà per vari anni.

Comunque il tempo intercorso tra lo svolgimento del corso e la pubblicazione del lavoro sta a indicare un certo travaglio nell'elaborazione di quest'ultimo, impressione pienamente confermata dalla corrispondenza con Castelnuovo. In effetti si trattava di in-

([80]) L. Kronecker, Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grossen, *Journal für reine und angewangt Mathematik*, 92, 1882, pp. 1-122. Sempre in questo lavoro forse per la prima volta viene enunciata in modo netto quella che può essere considerata la definizione moderna di geometria algebrica: *La geometria sopra una varietà M_k è la geometria che studia le proprietà della M_k invariabili per trasformazioni birazionali della varietà stessa.*

seguire il ritmo veramente travolgente impresso dal giovane matematico veneto alle applicazioni e le implicazioni del metodo geometrico allo studio delle curve algebriche. Tra i tanti lavori mi riferisco ad uno del 1893 nel quale Castelnuovo estende alle superfici un importante teorema sulla razionalità di alcune curve, che farà dire a Segre:

> Bravo davvero, bravissimo! Se veramente sei riuscito a dimostrare il gran teorema, avrai acquistato un nuovo e non piccolo titolo di gloria! ([81])

Come già detto questo articolo costituisce il punto di arrivo dell'applicazione del linguaggio geometrico elaborato da Segre al caso della geometria su una curva, riassumendone tutti i principali risultati; contemporaneamente costituisce il punto di partenza per la estensione dei metodi usati al caso delle superfici. Si comprende quindi l'entusiasmo di Segre per il risultato ottenuto da Castelnuovo: si tratta appunto di una importante estensione dei risultati e dei metodi dell'articolo di Segre. Sarà questo del passaggio allo studio geometrico delle superfici e alla loro classificazione, uno dei punti centrali dello sviluppo successivo, per almeno un quarantennio, dei lavori dei principali geometri algebrici italiani. Non posso però passare ad altri punti della vita scientifica di Segre senza citare di passaggio almeno due lavori che contengono risultati fondamentali.

Nel 1891([82]) Segre definisce e determina le proprietà di quella che oggi viene chiamata "Varietà di Segre", prodotto di spazi proiettivi. Nel 1896([83]) nello studio delle superfici determina le proprietà inva-

([81]) Lettera a Castelnuovo del 4 agosto 1893.Il lavoro a cui Segre si riferisce è G. Castelnuovo, Sulla razionalità delle involuzioni piane, *Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei*, (5), 2, 1893, pp. 205-209; poi in forma estesa con lo stesso titolo apparso sui *Mathematische Annalen*, 44, 1894, pp. 125 – 155.

([82]) C. Segre, Sulle varietà che rappresentano le coppie di punti di due piani o spazi, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 5, 1891, pp. 192-204; *Opere*, v. I, pp. 173-184.

([83]) C. Segre, Intorno a un carattere delle superficie e delle varietà superiori algebriche, *Atti della R. Accademia Nazionale dei Lincei*, 31, 1895-96, pp. 341-357; *Opere*, v. I, pp. 312-326.

riantive di un carattere delle superfici algebriche che, introdotto da Zeuthen ne 1871[84], viene da lui studiato in modo particolare determinando appunto la sua invarianza per trasformazioni birazionali e si chiama oggi "invariante di Zeuthen-Segre".

8. – Controversie: con Peano e altre

Vedremo più avanti altri contributi di Segre a questi studi; ora vorrei ritornare al periodo 1891-1894, densissimo di avvenimenti sia per quanto riguarda la vita privata di Segre che per le sue ricerche.

Nel 1891 Castelnuovo ottiene la cattedra a Roma e lascia Torino. Il forte rimpianto di Segre è testimoniato ancora una volta dalla corrispondenza:

> Da lunedì tu mi manchi, ed io sento vivamente questa lacuna. Tu accenni a quel po' di giovamento che hai potuto trarre in questi quattro anni dalla mia compagnia. Se ciò è vero, è pur vero che da te io ho avuto un completo ricambio[85]

Nel novembre 1892 Segre ottiene la promozione a professore ordinario e nello stesso periodo compaiono nuovi protagonisti nella scena geometrica italiana e primi tra loro Gino Fano, che si laureerà con Segre nel 1892 e soprattutto Federigo Enriques, laureato a Pisa con De Paolis nel 1891 e trasferito a Roma con una borsa di perfezionamento nell'autunno del 1892. Dalla collaborazione di Enriques con Castelnuovo trarrà un grande impulso il passaggio alla geometria su una superficie algebrica[86], un impulso tanto rapido da spiazzare in qualche modo lo stesso Segre, che aveva intrapreso lo stesso progetto di ricerca. Tratterò più avanti brevemente tale questione.

Sempre nello stesso periodo ha luogo la famosa controversia con

[84] H. G. Zeuthen, Études géométriques de quelques-unes des propriétés de deux surfaces dont les points se correspondent un-à-un, *Mathematische Annalen*, 4, 1871, pp. 21-49.

[85] Lettera di Segre a Castelnuovo del 12 novembre 1892.

[86] Nel periodo considerato, oltre al già citato lavoro di Castelnuovo viene pubblicato F. Enriques, Ricerche di geometria sopra una superficie algebrica, *Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino*, (2), 44, pp. 171-232.

Peano. Ne do qui soltanto una breve sintesi, rinviando alla letteratura per gli approfondimenti ([87]).

Nel 1891 Peano diede inizio alla sua nuova rivista, la Rivista di Matematica; per il primo numero chiese al collega Segre di scrivere un articolo indirizzato ai giovani studenti. L'articolo ([88]) vide la luce nel febbraio 1891 e contiene un'esposizione assai nitida degli ultimi risultati della geometria algebrica, incentrandosi sulla necessità di un uso simultaneo dei risultati sintetici e analitici, dell'algebra, dell'analisi e della topologia per risolvere i grandi problemi geometrici. Non mi soffermerò su questi punti di vista, che del resto pervadono l'intera opera di Segre. I punti che saranno oggetto di aspre critiche da parte di Peano sono soprattutto due: quello riguardante il rigore e quello riguardante l'utilizzazione degli iperspazi in geometria.

Il rigore era naturalmente un argomento nel quale Peano risultava estremamente sensibile e d'altra parte lo stesso Segre si trovava molto coinvolto in tali questioni, come si evince tra l'altro da una famosa lettera a Castelnuovo sul modo di lavorare di Enriques:

> Raccomando poi caldamente il rigore, il rigore, il rigore. Già ho trovato in qualche punto delle osservazioni gratuite di cui io non sono persuaso. Pesi bene ciò che scrive: e se trova qualche intoppo non ci passi sopra. Meglio ritardare la stampa del lavoro piuttosto che scemare l'importanza di questo con dimostrazioni incomplete o proposizioni sbagliate. ([89])

Nel presentare il suo punto di vista sul rapporto tra intuizione e rigore Segre esprime una posizione per altro classica nella matematica:

> Accade spesso che in una prima ricerca si debba sacrificare (sacrifizio molto più grave, trattandosi di matematica!) il rigore. Soventi volte la verità scientifica appare collocata su una vetta eccelsa e per raggiungerla non si hanno dapprima

([87]) Per esempio vedi C. F. Manara, M. Spoglianti, L'idea di iperspazi. Una dimenticata polemica tra G. Peano, C. Segre e G. Veronese, *Atti e Memorie dell'Accademia Nazionale di Scienze, Lettere ed Arti di Modena*, (6), 19, 1977, pp. 109-129.

([88]) C. Segre, Su alcuni indirizzi nelle investigazioni geometriche, *Rivista di Matematica*, 1, 1891, pp. 42-66; Opere, v. IV, pp. 387-412.

([89]) Lettera di Segre a Castelnuovo del 27 maggio 1893.

che sentieri malagevoli su chine pericolose, sì che vi è gran facilità di precipitare negli abissi in cui sta l'errore: soltanto dopo che alla vetta si è giunti per siffatti sentieri, si riesce a tracciare delle strade sicure che conducano ad essa senza pericoli. Così è avvenuto frequentemente che il primo modo di giungere ad una verità non sia stato pienamente soddisfacente, e che solo dopo la scienza sia riuscita a completarne la dimostrazione. Certamente anche qui il matematico non potrà essere veramente contento quando ad un nuovo risultato sia giunto con procedimenti poco rigorosi: egli non si considererà come sicuro di quello finché non l'avrà rigorosamente dimostrato. Ma non rigetterà senz'altro quei procedimenti incompleti nelle ricerche difficili in cui non si possa sostituirli meglio: poiché la storia della scienza lo ammaestra appunto sull'utilità che tali metodi hanno sempre avuto. ((Segre 1891, in Opere, v. (Segre 1891, in Opere, v. IV, p. 398)

Segre presenta come esempi di punti di vista di grande impatto euristico, ma che ancora necessitano di una rigorosa sistemazione il principio di continuità di Poncelet e quello di conservazione del numero di Schubert (vale forse la pena notare che quest'ultimo costituirà il 15° problema di Hilbert su cui si cimenteranno due allievi di Segre, Giambelli e Severi).

Nello stesso numero della rivista Peano rispose duramente: ([90])

Il difetto di rigore in lavori di matematica, non si può, a nostro modo di vedere in alcun modo, difendere o scusare. Noi riteniamo falsa una proposizione, se vi si può trovare un caso d'eccezione; e che non si possa considerare come ottenuto un risultato, finché esso non è rigorosamente provato, ancorché non si conoscano casi d'eccezione. ... Il rigore assoluto che si esige in matematica non significa punto che non si possa studiare una scienza finché non siano analizzati tutti i suoi principii. Ogni autore può assumere quelle leggi sperimentali che gli talentano, e può fare quelle ipotesi che più gli piacciono (...) Fatta la scelta dei punti di partenza spetta alla matematica (che, secondo noi, secondo noi, è una logica perfezionata) dedurre le conseguenze; e queste debbono essere assolutamente rigorose. (p. 66)

Strettamente legate a queste critiche sono quelle relative alla geometria degli iperspazi, legata in particolare alla struttura assiomatica da lui prescelta per la geometria e cioè quella che vede la

([90]) G. Peano, Osservazioni del Direttore sull'articolo precedente, *Rivista di Matematica*, 1, 1891, pp. 66-69.

geometria della retta indipendente da quella del piano e questa da quella dello spazio (per cui ad esempio nella geometria del piano non vale il teorema di Desargues che invece vale nel piano pensato come immerso nello spazio). Dice Peano:

> Il rigore assoluto, se è condizione necessaria affinché un lavoro sia scientifico, non è ancora condizione sufficiente. Un'altra condizione sta nelle ipotesi da cui si parte. Se un autore parte da ipotesi contrarie all'esperienza, o da ipotesi non verificabili coll'esperienza, né esse, né le loro conseguenze, potrà, è vero, dedurre una qualche teoria meravigliosa, da far esclamare: quale vantaggio, se l'autore avesse applicato il suo ragionamento ad ipotesi pratiche! (p. 67)

Come si vedrà più chiaramente qualche mese più tardi, qui Peano ha come obiettivo dell'attacco soprattutto Veronese.

Particolarmente velenosa e a mio avviso particolarmente significativa del tipo di attacco mosso è una osservazione critica di Peano, che ovviamente covava da tempo questa opinione. In questo caso non si tratta di una critica generica sul tema del rigore, ma di una critica mirata ad un importante lavoro del collega e del suo giovane allievo Castelnuovo. Peano scrive infatti:

> Troviamo strano che in giornali autorevoli, e trattandosi di matematica purissima, si trovi scritto: «La démonstration ingénieuse, que ce géomètre y donne de cette importante formule, pourrait lasser sur sa validité absolue des doutes, qui se réfléchiraient sur le n° présent et plus loin...: cependant les confirmations qu'on trouve de ces résultats me portent â penser qu'ils sont absolument vrais...» E noi vorremmo avere per un istante voce autorevole fra i giovani nostri colleghi, per ben convincerli di questa verità, che i lavori in cui fa difetto il rigore non possono far avanzare d'un passo la matematica. (p. 66)

La citazione è tratta dal già da me esaminato lavoro di Segre sulle rigate algebriche apparso nei *Mathematische Annalen*(91) che a sua volta si riferisce ad un lavoro altamente significativo di Castelnuovo(92).

(91) C. Segre, Recherches générales sur les ... cit.
(92) G. Castelnuovo, Una applicazione della geometria enumerativa alle curve algebriche, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 3, 1889, 27-37.

Il complesso delle critiche rappresenta quindi una ben netta presa di distanze dal programma di ricerca di Segre. Penso comunque che il matematico di Saluzzo abbia tenuto ben presente queste critiche nelle sue raccomandazioni ad Enriques.

La polemica proseguì nello stesso numero della rivista (pp. 154-159), con una dichiarazione di Segre e una risposta di Peano. Ovviamente Segre risponde soprattutto sul tema, che lo toccava nel vivo, dell'articolo:

> Si trattava di questo: che non avendo io altro modo di risolvere un'importante questione che di ricorrere ad una formola generale data poco prima da un altro geometra, credevo però dovere di onestà ... di avvertire che la dimostrazione ingegnosa (conseguenza diretta del principio dell'invariabilità del numero, ...) di quella formola mi pareva potesse lasciare il dubbio che vi fosse qualche eccezione.... Ora il Direttore della Rivista non ammette che in un caso simile si possa considerare il risultato come veramente ottenuto:ed in sostanza la stessa cosa avevo detto io nel mio articolo (§ VI), esprimendo ripetutamente il concetto che l'ideale del matematico non è raggiunto finché non s'è conseguito una precisione ed un rigore completi. Ma dove noi differiamo è nelle conseguenze che ne tragghiamo. Egli stupisce che una cosa siffatta si pubblichi, e giunge fino ad augurarsi di poter ben convincere i giovani suoi colleghi di questa verità, che i lavori in cui fa difetto il rigore non possono fare avanzare d'un passo la matematica. Io invece credevo ... che in tutti i rami della matematica, nell'aritmetica come nell'analisi infinitesimale, nella geometria come nella meccanica teoretica, il periodo di scoperta avesse nella maggior parte dei casi preceduto quello del rigore ...; e che tutta una moltitudine di cognizioni a cui così si era giunti per vie non perfettamente rigorose non solo avessero fatto avanzare di qualche passo la matematica, ma avessero anzi costituito una gran parte dei materiali con cui essa s'è fatta, e sui quali poi si è proceduto, e finora solo in una parte di essa, al lavoro, critico atto a renderla assolutamente rigorosa. (p. 155)

La risposta di Peano, oltre a ribadire il suo punto di vista, contiene un ulteriore attacco, ancor più velenoso, al lavoro pubblicato da Segre sulla base della sua tesi([93]), ed in particolare alla definizione di spazio

([93]) C. Segre, Studio sulle quadriche ..., cit.

lineare ad n dimensioni. Peano aveva senz'altro ragione: la definizione di spazio proiettivo di Segre è difettosa, soprattutto se confrontata con quella, del tutto rigorosa e perfettamente "moderna" data da Peano qualche anno prima. Però, come ho già detto prima, la definizione di Segre, peraltro facilmente correggibile, sta a fondamento di spettacolari applicazioni. Per dirla con Enriques tale definizione costituisce un *ordinario istrumento di lavoro* per i geometri italiani e non una astrazione fine a se stessa.

9. – Lo sviluppo della "scuola" e la definitiva consacrazione internazionale

Il periodo in esame è anche il momento in cui si rafforza il ruolo istituzionale di Segre. Tra l'altro nel 1893 egli entra a far parte, con Bertini, D'Ovidio, Aschieri e Veronese della commissione incaricata di esaminare la possibilità di promozione da straordinario a ordinario di tre matematici italiani Pasquale Del Pezzo, Francesco Gerbaldi e Giovan Battista Guccia. La commissione respinse tutte e tre le richieste (94), con grande severità. Per vari motivi si può a posteriori non condividere il giudizio, ma credo che non sia discutibile la buona fede di Segre, che scriveva a Castelnuovo:

> Ti pare che siamo stati severi? Noi abbiamo preso tutte le nostre deliberazioni in pieno accordo, convinti di far bene, e d'introdurre maggior serietà nei concorsi e promozioni. (95)

L'epilogo della vicenda è noto. Per diretto intervento di Cremona il giudizio della commissione venne annullato e ne fu nominata un'altra che ne capovolse l'esito.

Del Pezzo lega le scelte della commissione a uno scontro circa la leadership della geometria italiana. Non so quanto una tale opi-

(94) Per maggiori informazioni su tale concorso si può vedere M. R. Enea, *Francesco Gerbaldi e i matematici dell'Università di Palermo*, Pristem/Storia, 2013.

(95) Lettera di Segre a Castelnuovo del 16 ottobre 1893.

nione fosse giusta, ma vale la pena riportarla. Il matematico napoletano attribuisce il giudizio a *una ambizione immoderata di assorgere a dittatore dove ieri si marciava da fante. Certi nuovi venuti intendono assegnare altrui il compito, tracciare la via, e contrapporsi perfino ad uomini eminenti, che padri e avi a generazioni di matematici hanno già legato indissolubilmente il loro nome alle più geniali e feconde teorie delle scienze, assicurandolo immortale.*(96)

Forse le polemiche e gli scontri testimoniano del ruolo sempre più evidente occupato dal giovane piemontese nella comunità matematica italiana. Ma altri importanti avvenimenti segnano in quegli anni la vita, personale e scientifica, di Segre. Il 26 marzo 1893 infatti Segre sposò Olga Michelli, una giovane anconetana di una famiglia culturalmente assai ricca e soprattutto dotata di un'alta sensibilità musicale. Il 14 aprile 1894 nacque la primogenita Elena, seguita il 28 ottobre 1897 da Adriana. Entrambe le figlie sposarono intellettuali di grande respiro, nel 1918 Riccardo Fuà Elena(97) e Federico Guglielmo Morpurgo Adriana(98).

La vita familiare assorbì molto il nostro, come bonariamente gli rimproverò Castelnuovo:

> Quella prodigiosa attività si affievolì naturalmente, quando egli sentì il bisogno di versare nell'intimità della famiglia la dolcezza di sentimenti di cui prima colleghi e discepoli erano soli a godere.(99)

(96) Citato in M. R. Enea, *op. cit.*, p. 48.

(97) Figlio di Elena Segre fu il famoso economista Giorgio Fuà che così ricorda la madre: *Mia madre conosceva diverse lingue, inoltre era raffinata intenditrice di musica classica e valente pianista, Per molti anni è stata presidentessa della Società degli amici della musica di Ancona, fondata da suo zio Guido Michelli* Intervista a Giorgio Fuà nel sito http://web1.sssup.it/exallievi/intervfua.html

(98) Ad Adriana e il marito si riferisce certamente questo trafiletto presente in rete nel sito http://www.aiol.it/contenuti/cultura/storia/ *Nel paese di Polverigi, in provincia di Ancona, il mezzadro Attilio Pigliapoco e sua moglie Lidia aiutarono, nascondendoli, Federico Morpurgo, sua moglie Adriana e le loro due figlie.*

(99) G. Castelnuovo, Commemorazione del socio nazionale Corrado Segre, *Atti della R. Accademia dei Lincei*, (5), 33, 1924, pp. 353-359.

Corrado Segre con la moglie Olga e le figlie Elena e Adriana.

Ma come detto prima la vera novità scientifica di quegli anni, sia per Segre come anche per tutta la geometria italiana, fu l'irrompere nella scena di Federigo Enriques, entrato in contatto con Castelnuovo sul finire del 1892, ma in stretto contatto con lui a partire dall'anno successivo. La vicenda, scientifica e umana, delle relazioni tra il matematico veneto e quello livornese è nota([100]). Questa vicenda si intreccia profondamente con quella di Segre e ne darò quindi una sintesi schematica.

Enriques fu a Roma e poi a Torino per qualche mese nell'autunno 1893, poi a Bologna, prima come incaricato, dal 1894 e poi dal 1896, quando ottenne la cattedra. Durante questo periodo strinse un rapporto particolarmente stretto con Castelnuovo (anche sul piano personale: quest'ultimo sposò nel luglio 1896 la sorella di Enriques, Elbina). È il periodo eroico della creazione della geometria su di una superficie, cui già Castelnuovo e Segre stavano concentrando i loro interessi.

([100]) La fonte principale è oggi U. Bottazzini, A. Conte, P. Gario (a cura di), *Riposte Armonie*, Bollati Boringhieri, 1996.

Il vero e proprio ingresso di Enriques nel campo dello studio delle superfici algebriche si ebbe nel 1893, con un lavoro([101]) presentato da Segre stesso all'accademia torinese con parole che ne esaltano sia il valore intrinseco, sia la continuità con il programma suo e di Castelnuovo:

> Nel riferirvi, due anni sono, intorno all'importante memoria del sig. Castelnuovo intitolata "Ricerche generali sopra i sistemi lineari di curve piane", accolta poi fra i volumi della nostra Accademia, noi avevamo accennato come le ricerche in essa contenute potessero servire d'introduzione allo studio delle serie lineari di curve sopra una superficie qualunque fatto nel senso della geometria sopra la superficie, vale a dire di quella geometria che studia le proprietà invariabili per trasformazioni birazionali della superficie. Il lavoro che ora viene presentato dal sig. Enriques segue per l'appunto quest'indirizzo. [...] vogliamo esplicitamente rilevare come il sig. Enriques oltre che nell'uso degli accennati metodi geometrici, anche nella ricerca di nuovi fatti si spinge notevolmente al di là dei pochi lavori (...) che finora si avevano intorno al suo argomento. E questo poi è di tanto interesse ed importanza pei rami più elevati della matematica ed in pari tempo offre tante difficoltà che ogni progresso che si faccia merita di essere largamente incoraggiato.([102])

Malgrado il fatto che Segre con Castelnuovo, avesse enunciato il programma di ricerca su cui poi i due cognati svilupparono una impressionante mole di risultati, egli partecipò solo parzialmente agli sviluppi della teoria delle superfici algebriche *ritagliandosi come argomento il tema delle singolarità*([103]).

([101]) F. Enriques, Ricerche di geometria sulle superficie algebriche, *Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino*, (2), 44, 1893, pp. 171-232.

([102]) C. Segre, E. D'Ovidio, Relazione intorno alla Memoria intitolata: Ricerche di geometria sulle superficie algebriche del dott. F. Enriques, *Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino*, 28, 1893, 867-868. Citato in P. Gario 2008, Guido Castelnuovo: una biografia ipertestuale, Roma, *Accademia Nazionale dei Lincei, Archivi privati*, http://archivi-matematici.lincei.it/Castelnuovo/Biografia/index.htm.

([103]) P. Gario, Segre, Castelnuovo, Enriques. Una collaborazione mancata?, Abstract del *Convegno Homage to Corrado Segre*, Torino, 28-30 novembre 2013. Nella esposizione orale della comunicazione (che verrà pubblicata) sono state introdotte ipotesi interessanti su tale mancata collaborazione: http://ricerca.mat.uniroma3.it/GVA/Segre150/ gario.html. Nel sito del convegno: http://www.accademiadellescienze.it/attivita/iniziative-culturali/corrado-segre si possono vedere anche i video degli interventi.

Comunque su questo tema, certo non secondario per la geometria algebrica, negli anni successivi al '94 Segre ottenne risultati di assoluto rilievo. Mi limiterò soltanto a qualche accenno([104]). L'idea iniziale era quella di un lavoro, che "accompagnasse" quelli di Castelnuovo ed Enriques, dando fondamento rigoroso alla loro riduzione di una superficie generale a una con solo singolarità ordinarie. Dopo aver esaminato criticamente le lacune esistenti nelle (poche) trattazioni precedenti dell'argomento Segre, nel dicembre 1894, è pronto ad affiancare il lavoro dei due amici in tempi assai brevi:

> Spero di potere in questi otto dieci giorni di vacanza che ancora mi rimangono riflettere tanto sui punti più minuti della dimostrazione ... da acquistare la piena certezza della verità della cosa. Ed allora prenderò, a seconda dei casi, una delle varie risoluzioni che tu saggiamente mi sottoponi: o di darvi da pubblicare un sommario del mio ragionamento, o di pubblicarlo io stesso, ecc. ecc.([105])

Ancora nel febbraio '95 Segre spera ancora di fare "squadra" con i due amici:

> Avrei molto piacere di uscire in vostra compagnia. Così appunto sarebbe tutta la nostra scuola rappresentata!([106])

Ma già nel marzo si avrà una svolta drammatica, che renderà impossibile il raggiungimento dell'obiettivo di Segre e che in qualche modo contribuirà al dissolvimento del gruppo:

> Riguardo alla mia Nota mi è accaduto, presso al termine della redazione definitiva, di accorgermi di una svista di una certa di una certa gravità che avevo

([104]) Rinvio per gli approfondimenti agli esaustivi lavori di Paola Gario: P. Gario, Resolution of Singularities of Surfaces by P. Del Pezzo. A Mathematical Controversy with Segre, *Archive for History of Exact Sciences*, 40, 1989, pp. 247-274 e id., Singolarità e geometria sopra una Superficie nella Corrispondenza di C. Segre con G. Castelnuovo, *Archive for History of Exact Sciences*, 43, 1991, pp. 145-188, nonché alla citata corrispondenza negli Archivi Lincei.

([105]) Lettera di Segre a Castelnuovo del 24 dicembre 1894, in P. Gario, Singolarità e geometria ... cit.

([106]) Lettera del 9 febbraio 1895, ivi.

commessa! Spero di ripararla: ma con le occupazioni in corso non potrò farlo tanto presto.(107)

Rinvio per i dettagli del travagliato iter del lavoro al citato articolo di Paola Gario. Gli articoli di Castelnuovo ed Enriques(108) vennero pubblicati nel 1896 nello stesso numero del giornale e consecutivamente; invece l'articolo di Segre(109) apparve l'anno successivo. Il lavoro di Segre, per quanto non ancora completo, costituirà, insieme a quello di Beppo Levi(110), la base necessaria di tutti i lavori riguardanti la teoria delle superfici: una pietra miliare per i risultati della scuola italiana. Ma è certo che dopo il 1897, la corrispondenza di Segre con Castelnuovo si riduce sia in quantità che in qualità scientifica (non in qualità umana,i rapporti personali restarono strettissimi; anche la corrispondenza con Klein era già praticamente cessata con il 1894): ormai la "scuola di Segre" continua a svilupparsi fondamentalmente attraverso i suoi mirabili corsi. Gli interventi relativi alla geometria algebrica saranno sporadici, ma ancora di livello altissimo. Mi limito a citare un piccolo lavoro di grande impatto del 1900 nel quale egli mostra come la dimostrazione di Nöther(111) sulla risoluzione di una trasformazione cremoniana nel prodotto di un numero finito di trasformazioni quadratiche sia errata e che quindi il gran numero di lavori che su questo teorema si basavano erano da considerarsi ancora da dimostrarsi. L'osservazione era del tutto esatta e testimonia della vi-

(107) Lettera del 18 marzo 1895, ivi.

(108) G. Castelnuovo, Alcuni risultati sui sistemi lineari di curve appartenenti ad una superficie algebrica, *Memorie della Società Italiana delle Scienze, detta dei XL*, (3), 10, 1896, pp. 82-102; F. Enriques, Introduzione alla geometria sopra le superficie algebriche, *Memorie della Società Italiana delle Scienze, detta dei XL*, (3), 10, 1896, pp. 82-1021-81.

(109) C. Segre, Sulla scomposizione dei punti singolari delle superficie algebriche, *Annali di Matematica pura e applicata*, (2), 25, 1897, pp. 2-54; *Opere*, v. I, pp. 327-379.

(110) B. Levi, Sulla riduzione dei punti singolari delle superficie algebriche dello spazio ordinario per trasformazioni quadratiche, *Annali di Matematica pura e applicata*, (2), 26, 1897, pp. 219-254.

(111) M. Nöther. Über Flächen, welche Schaaren rationaler Curven besitzen, *Mathematische Annalen*, (2), 3, 1870, pp. 161-227; C. Segre, Un'osservazione relativa alla riducibilità delle trasformazioni cremoniane e die sistemi lineari di curve piane per mezzo di trasformazioni quadratiche, *Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino*, 36, 1900-01, pp. 377-383; Opere, v. I, pp. 433-439.

sione rigorosa della matematica del nostro che avrà il piacere di vedere la sua obiezione superata da una mirabile dimostrazione dell'amico Castelnuovo([112]).

Dopo il 1897, se il riferimento principale della geometria italiana diveniva il duo Castelnuovo-Enriques, cui nel nuovo secolo si aggiungeva Francesco Severi, da ogni parte Segre veniva riconosciuto come il caposcuola della geometria algebrica italiana e i riconoscimenti non mancavano. Nel 1897 Segre, che nell'estate 1891 aveva compiuto un lungo viaggio scientifico in Germania, partecipa al primo congresso internazionale dei matematici a Zurigo dove sarà il vice presidente della sezione geometria; in tutti questi anni, inoltre, il successo di Segre come insegnante fu grandissimo. Dopo Castelnuovo si laureeranno con lui o ne seguiranno i corsi come perfezionandi Federico Amodeo (90-91), Gino Fano ('92), Federigo Enriques ('92-'93), Beppo Levi ('96), William Young, Grace Chisholm ('98-'99), Alberto Tanturri ('99), Francesco Severi (1900), Giovanni Giambelli ('01), Julian Coolidge ('03-'04), Alessandro Terracini ('11), Eugenio Togliatti ('12), Beniamino Segre ('23)([113]).

In questi anni uno dei principali lavori di Segre consistette nella stesura del capitolo Mehrdimensionale Raume([114]) della Enzyklopedie di Klein. Il lavoro che venne pubblicato solo dopo molti anni dal suo inizio, nel 1918, costituisce un'esposizione assai significativa dei metodi iperspaziali. Preceduto da una introduzione storica, l'articolo costituisce un'esposizione completa della geometria proiettiva iperspaziale, in realtà l'esposizione più organica disponibile. Come si evince dalla corrispondenza, Segre avrebbe voluto completare questo lavoro con un più ampio trattato sui metodi iperspaziali in geometria algebrica, un trat-

([112]) G. Castelnuovo. Le trasformazioni generatrici del gruppo cremoniano nel piano, *Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino*, 36, 1901, pp. 861-874.

([113]) Cfr. A. Conte, L. Giacardi, P. Novaria, *Corrado Segre (1863-1924). A cent'anni dalla nascita*, KWB, Torino, 2013.

([114]) C. Segre, Mehrdimensionale Raume, *Enzyklopädie der mathematische Wissenschaften*, III e, 7, 1918, pp. 769-972. La presenza di matematici italiani (ma sarebbe meglio dire della "Segre connection") nella sezione geometrica della enciclopedia è massiccia e sicuro indizio del crescente prestigio internazionale della scuola: ad essa parteciparono, oltre a Segre, Loria, Castelnuovo, Enriques, Fano e Berzolari.

tato (sempre scritto in tedesco, diretto quindi a un ampio pubblico internazionale) su cui aveva già raggiunto un accordo preliminare con l'editore Teubner([115]), ma che non venne realizzato.

Quasi tutta l'attività scientifica di Segre in questo periodo si riflette nei quaderni delle lezioni di geometria superiore. Vorrei portare un solo esempio che mi sembra tipico e significativo. Nell'anno accademico 1899-1900 il corso si svolse sul tema della geometria enumerativa, basandosi sull'impostazione di Heinrich Schubert([116]). Segre non aveva in modo diretto contribuito a questa parte della geometria algebrica (anche se, come è ovvio, ne aveva più volte utilizzato i risultati). Eppure dal suo corso, cui presero parte Francesco Severi – laureato da poco a Padova con Veronese – Giovanni Giambelli e Alberto Tanturri, scaturì una gran messe di risultati di alto livello, tra i quali i primi lavori di Severi e i migliori di Giambelli. Rinviando alla letteratura per un esame del corso([117]) e dei lavori successivamente prodotti, mi limito a rilevare che nello stesso 1900 Hilbert avrebbe posto tra i suoi famosi problemi (il 15°) lo *stabilire rigorosamente e con un'esatta determinazione dei limiti della loro validità quei numeri geometrici che soprattutto Schubert ha determinato sulla base del cosiddetto principio di posizione speciale o della conservazione del numero per mezzo del calcolo numerativo da lui sviluppato*, problematica che riecheggia spesso nel corso di Segre attraverso i suoi continui richiami ai possibili errori dovuti a una non meditata utilizzazione del principio di conservazione del numero. Se si dovesse valutare quindi l'apporto di Segre a questa particolare disciplina occorrerebbe non riferirsi soltanto ai suoi

([115]) Il titolo avrebbe dovuto essere: *Vorlesungen über algebraische Geometrie mit besonderer Berücksichtigung der Mehrdimensionalen Räume.*

([116]) In particolare con H. Schubert, *Kalkül der abzählenden Geometrie*, Leipzig, 1879.

([117]) Cfr. A. Brigaglia, Introduzione al quaderno 13, in L. Giacardi, I Quaderni di Corrado Segre.... cit.; S. Kleiman, Problem 15. Rigorous Foundation of Schubert's Enumerative Calculus, in Browder F. (ed.) *Mathematical developments arising from Hilbert problems*, A.M.S., Providence, 1976, pp. 445-482; D. Laksov, Remarks on G. Z. Giambelli's work and life, in A. Brigaglia, C. Ciliberto, E. Sernesi, 1860-1940. Algebra e Geometria: il contributo italiano, *Supplemento ai Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 2, 36, 1994, pp. 207-218 lavori diretti, ma anche a quelli dei suoi allievi. Ne verrebbe fuori un quadro in cui, ancora una volta, si manifesta come il nostro abbia contribuito in modo essenziale allo sviluppo della geometria([118]).

Forse il momento di massimo riconoscimento del ruolo di Segre si ebbe nell'agosto del 1904, durante il congresso internazionale dei matematici di Heidelberg, quando venne incaricato di presentare una relazione generale. In questo lavoro di rassegna, Segre espresse in modo compiuto la sua visione della matematica e più in particolare della geometria come punto di incontro di varie tecniche e discipline. Ne risulta una visione unitaria lontanissima da ogni forma di esclusivismo. La carrellata che egli offre delle tendenze geometriche che si presentavano all'inizio del nuovo secolo è suggestiva e getta una luce più precisa sulla sua concezione della matematica, confermando, con un respiro maggiore, le concezioni che aveva cominciato ad elaborare sin dalla sua tesi di laurea, venti anni prima.

Cosicché uno dei punti iniziali riguarda la sua visione dell'interazione dialettica tra ricerca del rigore (che in qualche modo richiede alla geometria di liberarsi, "purificarsi" dall'intuizione sensibile) e la fantasia creatrice.

Riferendosi ai fondamenti (Peano, Veronese, Pieri e, naturalmente, Hilbert, ma tipicamente non Fano o Enriques) dice:

> Essi svolgono la geometria in modo esclusivamente deduttivo, senz'alcun ricorso all'intuizione spaziale... Cosicché le parole punto, retta, movimento, ecc. non esigono più l'interpretazione consueta, ma possono riceverne parecchie, diverse tra loro, di qualsiasi natura, per esempio puramente aritmetiche ... *Così l'intuizione spaziale ha cessato di essere necessaria. Ciò che caratterizza la geometria d'oggidì è ... la forma dei suoi problemi o dei suoi ragionamenti*!

Ma d'altra parte, come aveva già indicato nella sua polemica con Peano, *occorre lasciar libera la fantasia che guida alla scoperta; mentre è opera posteriore lo stabilire il tutto in modo rigoroso*! (Opere, v. IV, pp. 458 e 459).

([118]) Si veda in particolare l'analisi dettagliata dell'opera di Severi sull'argomento in L. B. Van der Waerden, The foundations of algebraic geometry from Severi to André Weil, *Archive for the History of Exact Sciences*, 7, 1971, pp. 171-180.

Non è qui certo il caso di ripercorrere il ricchissimo intervento del matematico piemontese, voglio solo ricordare che tra i molti, e per certi versi profetici, sguardi rivolti all'avvenire ricordo quello che individuava come prossima l'unificazione tra geometria algebrica e aritmetica:

> La teoria aritmetica delle forme nel campo dei numeri interi equivale a una geometria del reticolo costituito dai punti colle coordinate intere ... col tempo la unione della geometria colla teoria delle funzioni non [basterà], ma come terza alleata [dovrà] entrare la teoria dei numeri! (p. 467)

Così il 1904 sanciva definitivamente il passaggio da Cremona (morto l'anno precedente) a Segre quale principale riferimento della geometria italiana. Nel successivo congresso internazionale di Roma, di cui uno dei principali organizzatori fu l'amico Castelnuovo, Segre ebbe l'onorifico compito di far parte (insieme a Max Nöther e Henri Poincaré) della commissione per assegnare la medaglia Guccia (fonte di ispirazione per la successiva medaglia Field). La medaglia fu conferita, secondo i suoi desideri, al più brillante tra i giovani continuatori della scuola geometrica italiana, Francesco Severi.

Come era avvenuto per Cremona questi riconoscimenti coincisero con un certo distacco dal filone principale della ricerca per la quale aveva indicato la strada e i metodi. Ma a differenza di Cremona, l'operosità scientifica di Segre non fu travolta dalle esigenze organizzative e non ebbe sosta. Seguendo la sua linea di pensiero egli rimase più un apripista che un esploratore diretto dei sentieri da lui intrapresi. Nel periodo successivo al 1904, oltre all'amata problematica della geometria su di un'algebra, Segre nell'ultimo ventennio di attività scientifica diede inizio a un settore di ricerca largamente nuovo: la geometria proiettiva differenziale.

Come al solito, le idee di Segre si sviluppano in un lungo arco di tempo. I primi interessamenti in direzione delle problematiche della geometria differenziale avviene, credo, nel quadro di uno dei corsi di geometria, quello del 1891-92, dedicato alla geometria generale, sul quale così scriveva a Castelnuovo:

> Continuo a divertirmi con la geom. Delle superficie. È proprio un errore di dedicare quasi tutti i corsi di geom super agli enti algebrici. Gli enti generali sono pure interessantissimi ([119])

Darò qui solo una visione di massima dell'importante argomento, rinviando per approfondimenti alla(peraltro non abbondante) letteratura sull'argomento. ([120]) Il primo lavoro di questo indirizzo arriverà comunque nel 1897([121]) quando Segre, nel quadro del suo studio sulle singolarità, determina con metodi proiettivo – differenziali alcuni invarianti legati, appunto, alle singolarità, tra cui famoso resterà l'invariante di Mehmke – Segre, un invariante proiettivo legato al contatto tra due curve.

Dovranno passare altri dieci anni prima della pubblicazione del lavoro che può ritenersi realmente fondante di una disciplina in larga misura nuova([122]). Ancora una volta Segre parte dalle trattazioni prevalentemente analitiche della teoria geometrica delle equazioni differenziali, rileggendole dal punto di vista proiettivo e generalizzandole a spazi di dimensione superiore.

> I metodi che applicheremo son tali che si potranno estendere quasi immediatamente ad equazioni lineari di ogni ordine e con un numero qualunque di variabili indipendenti ... Se non erro si troverà in questa direzione un fertile campo di studi analitico-geometrici da coltivare (Segre, 1906, in Opere v. II, p. 21)

Qualche anno dopo, in un nuovo lavoro Segre, viene impostato un vero e proprio programma di ricerca fondante per questa nuova disciplina([123]).

([119]) Lettera di Segre a Castelnuovo del 16 maggio 1892

([120]) Si veda l'introduzione di A. Terracini al volume II delle Opere di Segre; inoltre A. Brigaglia, C. Ciliberto, *Italian algebraic geometry between the two world wars,* Queen's papers in pure and applied mathematics, 1995, pp. 131-140; F. Fava, Introduzione ai quaderni 29 e 37, in L. Giacardi, I Quaderni di Corrado Segre ..., cit.

([121]) C. Segre, Su alcuni punti singolari delle curve algebriche e sulla linea parabolica di una superficie, *Atti della R. Accademia dei Lincei,* (5), 6, 1897, pp. 168-175; *Opere*, v. II, pp. 1-8.

([122]) C. Segre, Su una classe di superficie degl'iperspazii legate colle equazioni lineari alle derivate parziali del 2° ordine, *Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino*, 42, 1906 – 07, pp. 559-591; *Opere*, v. II, pp. 20-49.

([123]) C. Segre, Preliminari da una teoria delle varietà luoghi di spazi, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 30, 1910, pp. 87-121; *Opere*, v. II, pp. 71-114.

Ancora una volta si tratta di “un nuovo campo di ricerche geometriche”. Stavolta comunque, a differenza del caso delle geometrie su un algebra, l’impulso dato da Segre venne compreso e sviluppato dai suoi allievi, in particolare quelli dell’ultimo decennio. Così saranno Terracini, Togliatti, Beniamino Segre a sviluppare le idee del maestro, oltre a Bompiani (allevo di Castelnuovo a Roma) e soprattutto Guido Fubini, allievo di Bianchi a Pisa e poi docente a Torino dal 1908. Non è ben chiaro se e in che modo si siano sviluppati contatti tra i due su questo argomento. Per dirla con le parole di Segre, *sarebbe cosa da farsi.*

Segre continuò ad essere sempre mirabilmente produttivo sul piano scientifico e proprio al campo della geometria proiettiva differenziale appartiene il suo ultimo lavoro([124]).

Non possiamo lasciare questa rapida carrellata sull’opera scientifica di Segre senza ricordare l’eccezionale opera da lui compiuta nella formazione dei docenti attraverso la sua attività nella Scuola di Magistero, dove insegnò dal 1887 al 1891 e poi ancora dal 1907 al 1921 divenendone direttore nel 1916([125]). Segre esprime chiaramente il suo punto di vista sull’insegnamento, assolutamente in linea con quanto elaborato dalla tradizione italiana (Cremona, Betti, Novi) e sul piano internazionale ancora una volta da Felix Klein e anche con le sue concezioni sulla ricerca. Per lui l’insegnamento della matematica deve fare apprendere:

> a ragionar bene; a non contentarsi di parole vacue; a trarre conseguenze dalle premesse, a riflettere e scoprire da sé;... a parlare con precisione *e la matematica che si insegna* deve nascere dal mondo esterno e poi a quello applicarsi *e guidare l’allievo* non solo a dimostrare le verità già note, ma anche a fare le scoperte, a risolvere da sé i problemi... al rigore perfetto si può giungere più avanti.

Come si vede c’è una perfetta sintonia tra le concezioni espresse dal

([124]) C. Segre, Le curve piane d’ordine n circoscritte ad un $(n + 1)$-latero completo di tangenti ed una classe particolare di superficie con doppio sistema coniugato di coni circoscritti, *Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino*, 59, 1923-24, pp. 145-162; Opere, v. II, pp. 193-207.

([125]) Si veda il Quaderno 40 in L. Giacardi, I Quaderni di Corrado Segre... cit. e l’articolo L. Giacardi, *Educare alla scoperta. Le lezioni di Corrado Segre alla Scuola di Magistero,* Bollettino dell’Unione Matematica Italiana, sezione A, s. VIII, VI-A, 2003, pp. 141-164. Le citazioni utilizzate sono prese da questo contributo.

matematico piemontese e quelle più tardi sviluppate (con maggiore risonanza nazionale e internazionale) da Enriques e Castelnuovo e poi diffusi nella tematica della didattica di oggi anche attraverso l'opera eccezionale di Emma Castelnuovo, figlia di Guido. Anche in questo caso si forma un gruppo che manifesta una straordinaria unità di intenti e comunità di visione dei problemi, anche se in questo caso non credo che si possa parlare di una scuola e soprattutto di un capo scuola, ma piuttosto di reciproche influenze ancora in parte da indagare.

Segre fu sempre un fermo difensore del carattere internazionale della ricerca scientifica e, come si è visto, strettamente legato alla scuola geometrica tedesca di Goettingen; pertanto non condivise l'estrema durezza dei matematici delle nazioni vincitrici (in particolare dei francesi con Picard in testa) che esclusero per molti anni (per i matematici fino al congresso internazionale di Bologna del 1928) i tedeschi dalle comunicazioni internazionali e prima di tutto dai congressi dei matematici di Strasburgo e di Toronto del 1920 e del 1924. Su questo problema la posizione del matematico di Saluzzo determinò una certa diffidenza anche tra i suoi colleghi più vicini, ma molto più presi dagli entusiasmi patriottici. Ne è prova questa lettera di Somigliana a Volterra che, riferendosi a Segre, scrive accusandolo di:

> vivere come nel limbo dei Santi Padri, ignorando la guerra, privi di qualunque antipatia o simpatia per alcuno, salvo il dovuto rispetto ai tedeschi. *E ritenendo inopportuno un suo incontro con Hadamard perchè:* Ora francamente io penso, che Hadamard sarà venuto in Italia per qualche cosa di più che una semplice esposizione di teorie analitiche; e che il metterlo a contatto con questi elementi potrebbe fargli riportare un'impressione del nostro paese, che non è quella che desideriamo ([126])

Segre espresse nella sua corrispondenza il suo punto di vista, scrivendo ad esempio a Klein: *Dopo tante vicende, dopo tante tristezze, io ho sempre conservato per Lei l'affetto e la venera-*

([126]) Lettera di Somigliana a Volterra. Citata in P. Nastasi, *Matematica e matematici. Dall'unità alla metà del Novecento*, in rete in http://media.accademiaxl.it/pubblicazioni/Matematica/indice.htm *zione che avevo cominciato a professarle fin da studente universitario* ([127]).

Fu probabilmente la vicinanza di sentimenti internazionalisti nei confronti della scienza a determinare il profondo riavvicinamento con Guccia (ricordiamo i profondi dissensi degli anni '90). Così in occasione del Congresso di Heidelberg del 1904, quando si doveva dare l'annunzio della medaglia Guccia e della commissione ad esso preposta, a un iniziale rifiuto di Segre così Guccia rispondeva:

> Altri nomi non faccio e ti prego di non farne. O te o nessuno! ... Ond'è che io torno, con tutte le mie forze a pregarti, a supplicarti, di recedere, per amor mio e per amore della Scienza da quel rifiuto. ([128])

E sempre la certezza della condivisione di questi sentimenti portava il successore di Guccia, Michele De Franchis, a rivolgersi a lui per mantenere legati al Circolo i soci tedeschi, impedendo le dimissioni di Max Nöther:

> La prego vivamente di scrivergli che, se è solo per considerazioni di delicatezza che egli si è dimesso noi lo preghiamo di ritirare le dimissioni, in quanto il Circolo non fa e non farà mai distinzioni di nazionalità o di razze fra i matematici. ([129])

Penso che sia stato proprio l'intervento di Segre a far recedere Nöther dalle dimissioni. Una testimonianza non secondaria di quello sforzo di *costruzione di un'identità internazionale per la Scuola italiana di geometria algebrica* ([130]) cui il nostro ha tanto contribuito.

Segre morì, nel pieno della sua operosità scientifica, il 18 maggio 1924.

Aldo Brigaglia
Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Palermo
Via Archirafi, 34 - 90123 Palermo
e-mail: aldo.brigaglia@math.unipa.it

([127]) Lettera di Segre a Klein del 24 febbraio 1921.

([128]) Lettera di Guccia a Segre del 27 luglio 1904.

([129]) Lettera di De Franchis a Segre del 1 ottobre 1919, Archivio del Circolo Matematico di Palermo.

([130]) L'espressione è tratta dall'intervento di E. Luciano e C. S. Roero al citato convegno *Homage to Corrado Segre*.