
La Matematica nella Società e nella Cultura

RIVISTA DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

ANDREA BACCIOTTI

Disegnare con le equazioni

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. 6 (2013), n.2, p. 299–319.

Unione Matematica Italiana

http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2013_1_6_2_299_0

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2013.

Disegnare con le equazioni

ANDREA BACCIOTTI

1. – Introduzione

Anche il lettore sprovvisto di una formazione matematica approfondita, avrà certamente acquisito, nel corso degli studi secondari, una certa familiarità con i principi della geometria analitica. Partiamo allora da questa, ricordandone l'idea fondante, tradizionalmente attribuita a Cartesio, che consiste nel rappresentare enti geometrici attraverso numeri ed equazioni. In particolare, nel piano riferito alle coordinate x, y , una curva è rappresentata da un'equazione del tipo

$$(1) \quad \Phi(x, y) = 0$$

nel senso che un punto giace sulla curva se e solo se la (1) risulta soddisfatta dalle sue coordinate. Per esempio, una retta¹ passante per l'origine è rappresentata da un'equazione del tipo $mx + ny = 0$; una circonferenza di raggio $r > 0$ e centrata nell'origine da un'equazione del tipo $x^2 + y^2 = r^2$, e così via. Se vogliamo tracciare una di queste curve sullo schermo del nostro computer, possiamo quindi pensare di scrivere un programma che determini, eventualmente attraverso opportune tecniche di approssimazione, tutte le soluzioni (x, y) della (1) e comandi l'accensione dei pixel corrispondenti. In questo senso, possiamo dire che la curva viene “disegnata” dalla sua equazione.

Le curve più comuni di cui si occupa la geometria analitica sono definite da equazioni del tipo (1) in cui $\Phi(x, y)$ è un polinomio di grado al massimo 2. Se i coefficienti del polinomio sono fissati una volta per tutte, si ha evidentemente un'unica curva. Per certe applicazioni,

¹ Nel linguaggio ordinario, il termine *curva* designa una qualunque linea che non sia dritta: nel gergo matematico invece il termine *curva* ha, come vedremo, un significato più generale ed include anche le rette.

conviene tuttavia pensare che uno o più di questi coefficienti possano variare. Per esempio, l'equazione $y = kx^2$ descrive al variare di $k \in \mathbf{R}$ tutta una famiglia di parabole (fa eccezione il caso $k = 0$, nel quale la curva degenera e si riduce ad una retta): tutte passano per l'origine; nessuna passa per un punto della forma $(0, y)$ con $y \neq 0$; per tutti gli altri punti del piano passa una e una sola curva della famiglia. Anche l'equazione $y = x^2 + c$ per $c \in \mathbf{R}$ descrive una famiglia di parabole: ma questa volta la situazione è diversa; infatti per ogni punto del piano, senza eccezioni, passa una e una sola curva.

In questo articolo, ci occuperemo di famiglie di curve che hanno la proprietà di riempire il piano in modo che, come nell'ultimo esempio che abbiamo fatto, per ogni punto passi una e una sola curva della famiglia. Le nostre curve saranno però generate da equazioni di tipo un po' più complicato, chiamate *equazioni differenziali*.

Il modo in cui le curve della famiglia si dispongono nel piano forma un disegno che, per ragioni legate ad alcune importanti applicazioni fisiche, si chiama *ritratto o configurazione di fase*. Le possibilità sono praticamente infinite: classificare le configurazioni in base a certi loro elementi caratteristici di natura geometrica è un problema molto difficile, in larga misura insoluto, che ha stimolato e continua a stimolare i ricercatori almeno dall'epoca di Poincaré in poi. Naturalmente, noi non abbiamo nessuna intenzione di spingerci troppo avanti. Ci limiteremo a vedere come, utilizzando del *software* di uso abbastanza comune come MATLAB, con un po' di pazienza, un po' di intuito, un po' di conoscenze elementari² (e magari, anche un po' di fortuna) si possono ottenere dei disegni non solo interessanti dal punto di vista matematico, ma anche molto belli.

2. – Sistemi dinamici

Come abbiamo già detto, molte curve importanti, ed anche intere famiglie di curve, possono essere rappresentate da equazioni del

² Le nozioni che saranno impiegate nel seguito senza richiamarne esplicitamente la definizione sono quelle di derivata (ordinaria e parziale), vettore, matrice, autovalore, autovettore.

tipo (1). Alternativamente, una curva può essere rappresentata in *forma parametrica* e cioè assegnando due funzioni

$$(2) \quad \begin{cases} x = \alpha(t) \\ y = \beta(t) \end{cases} .$$

Per ogni valore del parametro t per cui α e β siano definite, la (2) determina le coordinate di un punto del piano. Facendo variare t in un certo intervallo $I \subset \mathbf{R}$ (nel nostro caso si avrà sempre $I = \mathbf{R}$, l'intero asse dei numeri reali) il punto di coordinate $(\alpha(t), \beta(t))$ si muove, tracciando una curva. Per esempio, la retta di equazione cartesiana $mx + ny = 0$ può essere³ descritta in forma parametrica assegnando $\alpha(t) = nt$ e $\beta(t) = -mt$.

Fissiamo un valore \bar{t} del parametro e supponiamo che α e β siano entrambe derivabili in \bar{t} . Il punto di coordinate $(\alpha'(\bar{t}), \beta'(\bar{t}))$ individua un vettore del piano, che si chiama *vettore tangente* alla curva nel punto $(\alpha(\bar{t}), \beta(\bar{t}))$. Nella Meccanica, curve del tipo (2) vengono spesso utilizzate per rappresentare traiettorie descritte da un punto materiale che si muove sotto l'azione di una forza: in tal caso, il parametro t rappresenta il tempo e il vettore tangente contiene le informazioni sulla velocità con la quale il punto materiale si muove.

D'altra parte, la traiettoria descritta da un punto materiale che si muove in un campo di forze dipende anche dalla posizione e dalla velocità iniziali: di conseguenza, al variare di queste, l'insieme di tutte le possibili traiettorie costituisce una famiglia di curve.

Il richiamo alla Meccanica classica suggerisce un'altra osservazione: supponiamo di ripetere più volte un'esperimento, sempre in uno stesso campo di forze e a parità di condizioni iniziali. Naturalmente ci aspettiamo di ottenere sempre la stessa traiettoria, anche se tra un esperimento e l'altro sarà trascorso un po' di tempo. In particolare, se si calcola, per ogni esperimento, il vettore tangente alla traiettoria in uno stesso punto dello spazio ci aspettiamo di trovare sempre lo stesso

³ Di regola, è più facile passare dalla forma parametrica (2) a quella cartesiana (1) che non viceversa; mettere in relazione le diverse maniere di rappresentare una stessa curva è un problema interessante di cui però non ci occuperemo in questo articolo.

risultato. Tuttavia, se si considera una famiglia di curve del tipo (2) in generale, con $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ assegnate in modo del tutto arbitrario, questa aspettativa potrebbe essere non soddisfatta. In ciò consiste essenzialmente la differenza tra i sistemi *tempo-varianti* e quelli *tempo-invarianti*⁴. Per assicurare che una famiglia di curve del tipo (2) rappresenti davvero un sistema tempo-invariante è necessario fare qualche restrizione.

Continuando a limitare la nostra esposizione al piano, col termine *sistema dinamico* (tempo-invariante) intenderemo una coppia di funzioni continue

$$(3) \quad \begin{cases} x = \alpha(t, P) \\ y = \beta(t, P) \end{cases}$$

definite per ogni $t \in \mathbf{R}$ e per ogni punto P del piano, dotate delle seguenti proprietà:

$$(i) \quad P = (\alpha(0, P), \beta(0, P))$$

$$(ii) \quad \alpha(t+s, P) = (\alpha(t, (\alpha(s, P), \beta(s, P))) e \beta(t+s, P) = \beta(t, (\alpha(s, P), \beta(s, P)))$$

per ogni coppia $t, s \in \mathbf{R}$ e ogni punto P del piano. Intuitivamente, la (ii) significa che se Q è il punto che si trova sulla curva $(\alpha(t, P), \beta(t, P))$ in corrispondenza di un valore \bar{t} del parametro, allora per ogni $\bar{s} \in \mathbf{R}$, il punto che si trova sulla stessa curva in corrispondenza del valore del parametro $\bar{t} + \bar{s}$ coincide con quello che si trova sulla curva $(\alpha(t, Q), \beta(t, Q))$ in corrispondenza del valore \bar{s} del parametro. Usando un linguaggio un po' più sofisticato, si può dire che la rappresentazione parametrica trasferisce sulla curva la struttura di gruppo additivo della retta reale.

La proprietà (ii) conferisce la coerenza necessaria a superare certe ambiguità insite nella rappresentazione (3). Grazie ad essa, è infatti possibile dimostrare che per ogni sistema dinamico e ogni punto P del piano, esiste un unico vettore $F(P)$ che dipende solo da P e che coincide col vettore tangente alla curva (3) calcolato per $t = 0$.

⁴ I sistemi tempo-invarianti si dicono anche *autonomi* o *stazionari*.

Viceversa, supponiamo di avere una funzione che assegni un vettore $F(P)$ ad ogni punto P del piano. Funzioni di questo tipo si chiamano anche *campi vettoriali*. Si pone il problema di determinare, se esistono, delle curve o possibilmente intere famiglie di curve, con la proprietà che se una di queste passa per un punto P allora il suo vettore tangente in quel punto è proprio $F(P)$. Risolvere questo problema equivale a risolvere un sistema di *equazioni differenziali* (ordinarie e invarianti nel tempo). Simbolicamente, un sistema di due equazioni differenziali in due variabili si scrive

$$(4) \quad \begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$$

dove con (x, y) abbiamo indicato le coordinate (incognite) del punto P e con (f, g) le componenti del vettore $F(P)$. Un importante teorema di Analisi Matematica afferma che se le funzioni f, g sono abbastanza regolari (per esempio, continue e dotate di derivate parziali continue) e se la lunghezza del vettore $F(P)$ non cresce troppo in fretta quando P si allontana dall'origine, allora il sistema (4) è risolubile nel senso che è possibile provare l'esistenza di una coppia di funzioni $x = \alpha(t, P)$, $y = \beta(t, P)$ soddisfacenti le condizioni (i), (ii) e tali che per ogni P , il vettore tangente in P alla curva da esse definita coincide con $F(P)$.

La coppia di funzioni $x = \alpha(t, P)$, $y = \beta(t, P)$ si dice la *soluzione* del sistema (4) corrispondente allo *stato iniziale* P . La curva descritta dalle equazioni $x = \alpha(t, P)$, $y = \beta(t, P)$ si dice anche l'*orbita* del campo vettoriale F passante per P . L'insieme di tutte le orbite costituisce quello che abbiamo chiamato *ritratto o configurazione delle fasi* del sistema (4).

3. – Ritratti di fase

Nell'interpretazione meccanica, un sistema di equazioni differenziali stabilisce una relazione tra diverse quantità fisiche; nel caso della (4), tali quantità sono la posizione occupata da un punto materiale in un campo di forze a un determinato istante e la sua velocità allo stesso istante. Si possono immaginare relazioni più complesse: per esempio,

le applicazioni del secondo principio della dinamica (principio di Newton) coinvolgono l'accelerazione e conducono a scrivere equazioni nelle quali compaiono le derivate seconde.

Equazioni differenziali intervengono anche in altre discipline applicate, come in elettrotecnica, in economia, nello studio di certi processi chimici, biologici e ecologici. Capire come si dispongono nel piano le orbite del sistema può essere di aiuto per effettuare previsioni o simulazioni sull'evoluzione dei fenomeni fisici dei quali l'equazione costituisce un modello.

Per intraprendere questo studio, in genere si comincia esaminando l'eventuale esistenza di orbite speciali. Le più semplici da trovare sono i *punti d'equilibrio*: si tratta di curve degeneri rappresentate da funzioni costanti, che si riducono a singoli punti. I punti d'equilibrio sono tutti e solo quelli per cui $f(P) = 0$, e quindi si individuano abbastanza facilmente.

Se il sistema è formato da equazioni lineari, cioè

$$(5) \quad \begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

l'origine è sicuramente un punto d'equilibrio. La disposizione delle orbite nelle vicinanze dell'origine determina la configurazione globale.

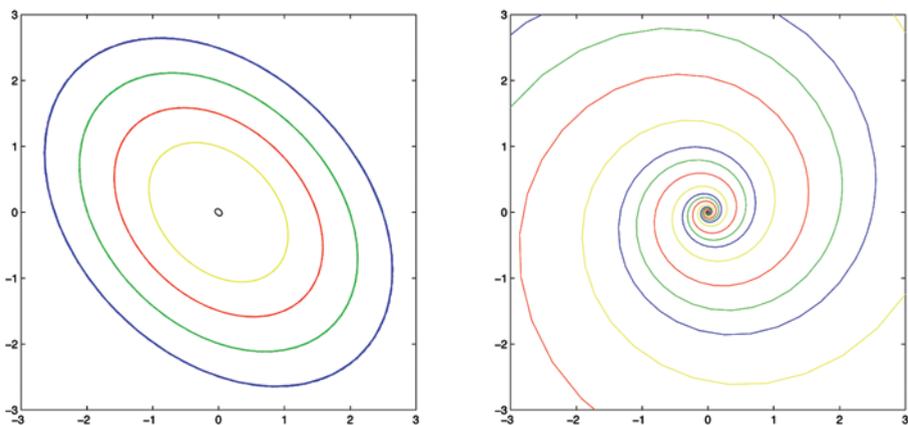


Fig. 1. – La configurazione di sinistra prende il nome di *centro*; la configurazione di destra prende il nome di *fuoco*.

I ritratti di fase generati da un sistema lineare nel piano possono essere classificati in base alle proprietà algebriche della matrice

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Per esempio, esaminiamo le configurazioni presentate nella Figura 1. Quella di sinistra si ottiene se gli autovalori sono immaginari puri: in tal caso le orbite sono ellissi. Quella di destra si ottiene se gli autovalori sono non reali ma con parte reale diversa da zero: in questo caso le orbite sono spirali logaritmiche. Più precisamente, se gli autovalori hanno entrambi parte reale negativa tutte le traiettorie convergono verso l'origine, che viene così a caratterizzarsi come un punto d'equilibrio *attrattivo*; se invece gli autovalori hanno entrambi parte reale positiva, le traiettorie divergono e l'origine si dirà un punto d'equilibrio *repulsivo*. Se gli autovalori sono reali e discordi, la disposizione è simile a quella mostrata a sinistra nella Figura 2, nella quale le orbite somigliano a iperboli (e sono effettivamente iperboli se gli autovalori sono opposti, cioè uguali in valore assoluto e di segno contrario). La configurazione della Figura 2 a destra infine si ha quando gli autovalori sono reali e concordi (le orbite sono effettivamente para-

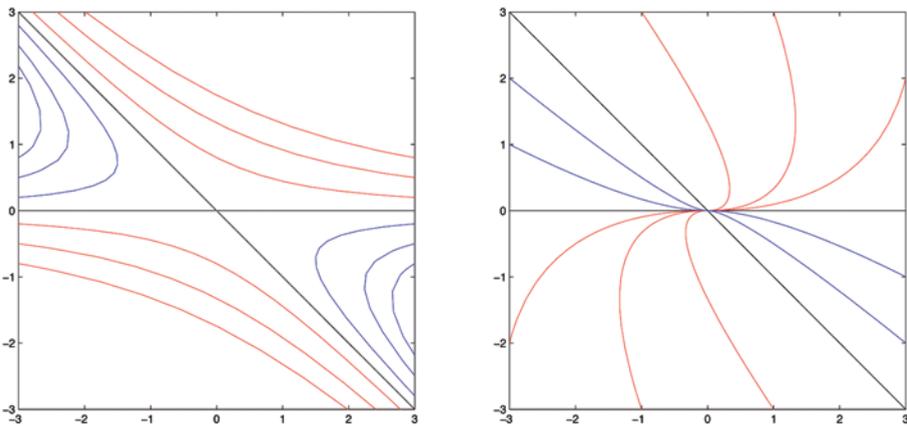


Fig. 2. — La configurazione di sinistra prende il nome di *sella*; la configurazione di destra prende il nome di *nodo*.

bole solo se uno dei due autovalori è esattamente il doppio dell'altro).

Se le equazioni del sistema non sono lineari, le cose si complicano. Infatti, la conoscenza del comportamento delle soluzioni nelle vicinanze dei punti di equilibrio non è più sufficiente per risalire al comportamento globale. Inoltre, in generale non è possibile risolvere esplicitamente le equazioni. Viene allora l'idea di aiutarsi col computer. Vi sono programmi (quelli che sono stati usati per produrre le figure di questo articolo fanno parte del *software* MATLAB) che permettono di "integrare" numericamente, cioè con particolari metodi di approssimazione, le equazioni e quindi di disegnare sullo schermo alcune delle curve ottenute⁵.

Naturalmente, non possiamo pensare che configurazioni di fase interessanti dal punto di vista matematico o dal punto di vista estetico possono essere ottenute partendo da equazioni scritte completamente a caso.

4. – Sistemi Hamiltoniani

Un sistema del tipo (4) si dice hamiltoniano se esiste una funzione $H(x, y)$ a valori reali tale che

$$f(x, y) = \frac{\partial H}{\partial y}(x, y), \quad \text{e} \quad g(x, y) = -\frac{\partial H}{\partial x}(x, y).$$

Un sistema hamiltoniano in \mathbf{R}^2 si presenta quindi nella forma

$$(6) \quad \begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) \\ \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}(x, y) \end{cases}.$$

⁵ Integrare numericamente un sistema del tipo (4) significa, grosso modo, sostituire le derivate con i rispettivi rapporti incrementali. Aniché risolvere delle equazioni differenziali, si calcola iterativamente una successione di punti. Intuitivamente, un metodo di integrazione numerica produrrà risultati tanto più precisi quanto più piccolo è l'incremento. L'idea è semplice, ma per garantirsi davvero una buona precisione è necessario ricorrere ad espedienti talvolta anche molto raffinati che sono oggetto di insegnamento nei corsi di Analisi Numerica.

La configurazione di fase di un sistema hamiltoniano è in larga misura determinata dalle proprietà della funzione H ; in particolare, dalla disposizione e dalla natura dei suoi punti stazionari. Vediamo perché. Ricordiamo innanzitutto la definizione di insieme di livello. Se c è un numero reale, l'insieme di livello c della funzione H si indica con L_c ed è costituito da tutti i punti (x, y) tali che $H(x, y) = c$. In simboli,

$$L_c = \{(x, y) : H(x, y) = c\}$$

(naturalmente, per certi valori di c , L_c potrebbe essere vuoto). Siano $x = x(t)$, $y = y(t)$ soluzioni del sistema (6); si ha

$$H'(x(t), y(t)) = \frac{\partial H}{\partial x} x' + \frac{\partial H}{\partial y} y' = \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial x} = 0$$

per ogni $t \in \mathbf{R}$. Una funzione la cui derivata è nulla in tutti i punti di un intervallo, è necessariamente costante. Si arriva pertanto alla conclusione che le soluzioni del sistema (6) variano in modo da lasciare inalterato il valore di H ; tale valore può essere calcolato note che siano le condizioni iniziali. Come ulteriore conseguenza, si ha che ogni orbita del sistema (6) deve essere contenuta in un qualche insieme di livello di H : in generale però, un insieme di livello può contenere più orbite.

Ora non è troppo difficile immaginare come sono fatti gli insiemi di livello nelle vicinanze di un punto stazionario. Per esempio, se si tratta di un massimo o di un minimo, è ragionevole aspettarsi che gli insiemi di livello siano curve chiuse, mentre se si tratta di una sella, è ragionevole aspettarsi che abbiano l'andamento tipico delle linee che si osservano su una carta topografica nei pressi di un passo di montagna⁶.

Si comincia così a delineare un possibile procedimento, il cui inizio consiste nel trovare l'espressione esplicita di una funzione che abbia i suoi punti di massimo o di minimo e i suoi punti di sella situati in po-

⁶ In realtà, queste conclusioni non sono vere in generale: le eccezioni sono però abbastanza artificiali e per gli scopi di questo articolo possono essere trascurate.

sizioni predeterminate. Questo può non essere un esercizio banale, ma avere un punto di partenza è sicuramente meglio che sperare di azzeccare una configurazione di fase interessante procedendo alla cieca con esperimenti casuali.

D'altra parte, la struttura hamiltoniana è abbastanza restrittiva e impone una notevole rigidità nelle proprietà geometriche della configurazione di fase.

Per rendersene conto, osserviamo che, a prescindere da certi casi degeneri, la disposizione delle orbite di un sistema del tipo (4) nelle vicinanze di un punto di equilibrio P è analoga alla disposizione delle orbite del sistema lineare definito dalla matrice

$$(7) \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}$$

dove si intende che le derivate sono calcolate in P . Se il sistema è hamiltoniano, la matrice (7) diventa

$$(8) \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \\ -\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} & -\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} \end{pmatrix}.$$

Si vede facilmente che, sempre a prescindere dai casi degeneri, vi sono solo due casi possibili: o gli autovalori della (8) sono reali e opposti, oppure sono puramente immaginari (cioè con parte reale nulla) e coniugati. Ciò significa che nelle vicinanze di un punto d'equilibrio non degeneri, le orbite di un sistema hamiltoniano assumono una configurazione analoga o a quella della Figura 1 di sinistra oppure a quella della Figura 2, sempre a sinistra.

Per superare queste rigidità e "rompere" le simmetrie entro le quali ci costringe la struttura hamiltoniana, possiamo divertirci ad aggiungere o togliere un termine ad una o entrambe le equazioni del sistema. Risultati interessanti si ottengono già limitando le modifiche a termini

lineari che si annullano nel punto di equilibrio scelto (e che possiamo quindi considerare “piccoli” nelle sue vicinanze). Poiché gli autovalori dipendono in maniera continua dagli elementi di una matrice, è chiaro che se il punto scelto è del tipo sella (cioè se gli autovalori della matrice (8) sono reali e opposti), una piccola modifica non cambierà la situazione. Ma se la configurazione del punto scelto è di tipo centro (autovalori puramente immaginari), una piccola modifica può spostare gli autovalori a destra o a sinistra dell’asse immaginario. Una configurazione di tipo centro può quindi facilmente essere trasformata in una configurazione di tipo fuoco (analoga cioè a quella della Figura 1 a destra) attrattivo o repulsivo.

Nel fare queste modifiche, bisogna però fare molta attenzione: infatti una quantità che assume valori piccoli in una regione circoscritta dello spazio può diventare anche molto grande quando ci si allontana da questa regione. Una piccola modifica concepita per alterare localmente le caratteristiche geometriche delle orbite nelle vicinanze di un certo punto, può avere conseguenze globali di grossa portata e difficilmente prevedibili a priori.

Nel seguito, presenteremo e discuteremo quattro esempi, con l’intento di illustrare quanto abbiamo cercato di esporre fino a questo momento. Questi esempi saranno anche l’occasione per introdurre nuovi concetti e fare altre osservazioni interessanti.

5. – Esempi

Cominciamo con la funzione

$$(9) \quad H = x^2 + y^2 - x^3$$

I punti critici di H sono le soluzioni del sistema (non lineare)

$$(10) \quad \begin{cases} \frac{\partial H}{\partial x} = 2x - 3x^2 = 0 \\ \frac{\partial H}{\partial y} = 2y = 0 \end{cases}$$

e coincidono ovviamente con i punti d’equilibrio del sistema hamiltono-

niano (6) definito dalla (9) che nel nostro caso si scrive

$$(11) \quad \begin{cases} \dot{x} = 2y \\ \dot{y} = -2x + 3x^2. \end{cases}$$

Si verifica facilmente che le uniche soluzioni del sistema (10) sono $O = (0, 0)$ e $A = (2/3, 0)$. Per studiarne la natura, si considera la matrice (cosiddetta hessiana)

$$(12) \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 6x & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Quando si pone $(x, y) = (0, 0)$, la (12) ha l'unico autovalore 2 (con molteplicità 2) e quindi O è un punto di minimo; quando invece si pone $(x, y) = (2/3, 0)$ gli autovalori della (12) sono 2 e -2 e quindi A è un punto di sella. Osserviamo che $H(O) = 0$ e $H(A) = 4/27$.

Le linee di livello di H nelle immediate vicinanze di O sono curve chiuse: in linea di principio, ciascuna di esse potrebbe contenere più orbite del sistema (11): ma se ce ne fossero davvero più di una, queste dovrebbero essere separate da punti di equilibrio che non abbiamo trovato. In conclusione vicino ad O si hanno effettivamente orbite chiuse⁷, corrispondenti a soluzioni periodiche del sistema (11). Per essere precisi, questa conclusione vale per tutti gli insiemi di livello L_c con $0 < c < 4/27$. Per $c = 4/27$, l'insieme di livello include infatti A , che è, come abbiamo visto, un punto di equilibrio.

Una verifica diretta mostra che l'insieme di livello c con $c = 4/27$ coincide con l'insieme dei punti di coordinate (x, y) tali che

$$y^2 = \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 \left(x + \frac{1}{3}\right).$$

Tale insieme ha la forma di un cappio. Se lo si osserva "zoomando" su un piccolo intorno del punto A , si ha l'impressione che esso sia formato da due tratti di curva che si incrociano. Ciascuno di questi tratti in realtà

⁷ Orbite chiuse si chiamano anche *cicli*.

è formato da parti di orbite diverse, separate dal punto di equilibrio. Localmente, la situazione appare quindi simile a quella della Figura 2 di sinistra, dove si osservano chiaramente quattro orbite “speciali” che sembrano incontrarsi nell’origine (più esattamente, le loro rappresentazioni parametriche tendono all’origine per $t \rightarrow +\infty$ o per $t \rightarrow -\infty$). Ma se si guarda col “grandangolo”, ci si accorge che le orbite “speciali” che sembrano incontrarsi in A in realtà sono tre: una di queste gioca infatti un doppio ruolo, in quanto la sua rappresentazione parametrica tende verso A sia per $t \rightarrow +\infty$ che per $t \rightarrow -\infty$. Potremmo spingerci a pensare che si tratti di due orbite sovrapposte. Orbite di questo tipo si dicono *omocline*. Più in generale, orbite “speciali” che dividono il piano in regioni nelle quali si osservano comportamenti qualitativamente diversi si dicono anche *separatrici*. La configurazione di fase del sistema (11) è riprodotta nella Figura 3 a sinistra⁸.

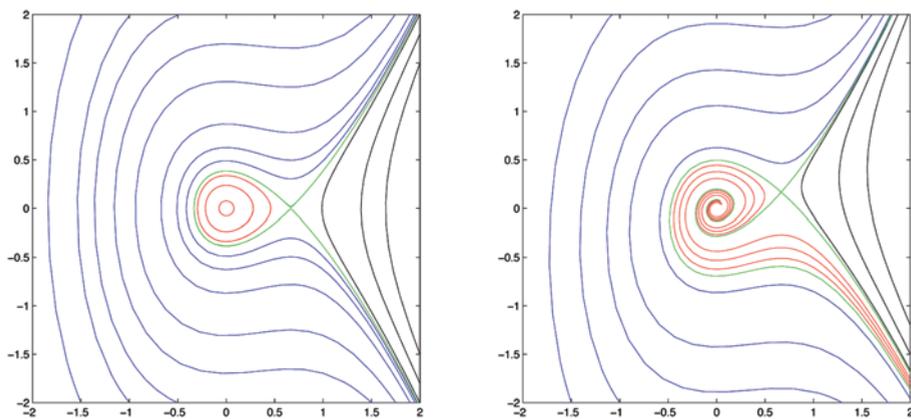


Fig. 3. – A sinistra la configurazione del sistema hamiltoniano (11); a destra la configurazione del sistema modificato (13).

⁸ Per disegnare una qualunque orbita bisogna assegnarne i valori iniziali. Se questi valori sono noti solo approssimativamente, l’orbita disegnata non sarà proprio quella voluta ma una molto vicina. Sfortunatamente, vicino a una separatrice si trovano spesso orbite che hanno un comportamento divergente: per questa ragione è difficile disegnarle. Nel caso della Figura 5 due delle separatrici sono state disegnate con un trucco, che consiste nell’invertire di segno le equazioni del sistema. In questo modo, si cambia il senso di percorrenza delle orbite, ma non la loro forma geometrica.

Operiamo adesso una modifica, aggiungendo alla prima equazione del sistema il termine $-x/2$. Consideriamo cioè il sistema

$$(13) \quad \begin{cases} \dot{x} = -\frac{1}{2}x - 2y \\ \dot{y} = 3x^2 - 2x \end{cases}$$

Questa modifica ha l'effetto di alterare il bilancio delle relazioni geometriche che rendono possibile la formazione di cicli.

Ripetendo i passaggi precedenti, questa volta troviamo i punti di equilibrio $O = (0, 0)$ e $B = (2/3, 1/6)$. Gli autovalori della matrice (7) calcolata nel punto B hanno parte reale negativa e la configurazione, vicino a B , sarà simile a quella della Figura 3 a destra: tutte le orbite che si trovano a passare vicino a B vengono attratte da B (per $t \rightarrow +\infty$). La modifica ha anche l'effetto di distruggere l'orbita omoclina. Le orbite "speciali" che sembrano incontrarsi in A adesso sono davvero quattro (Figura 3 a destra).

L'analisi di questo esempio conferma l'impressione che il ritratto di fase originato da un sistema hamiltoniano sia in qualche senso il fragile risultato di precise relazioni di uguaglianza riconducibili alla funzione H .

Il secondo esempio che proponiamo si costruisce a partire dalla funzione

$$H = \frac{1}{2}(x^4 - x^2 - y^2)$$

(il coefficiente $1/2$ è inessenziale: serve solo a semplificare un po' i calcoli). I punti stazionari di H sono $O = (0, 0)$, $A = (-1/\sqrt{2}, 0)$, $B = (1/\sqrt{2}, 0)$. In O c'è un massimo, in A e B vi sono selle. Non ci dilungheremo sulla discussione, che è simile a quella del caso precedente; ci limitiamo ad osservare che per il sistema hamiltoniano associato ad H

$$(14) \quad \begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x - 2x^3 \end{cases}$$

la configurazione locale nelle vicinanze di O si presenta come un centro,

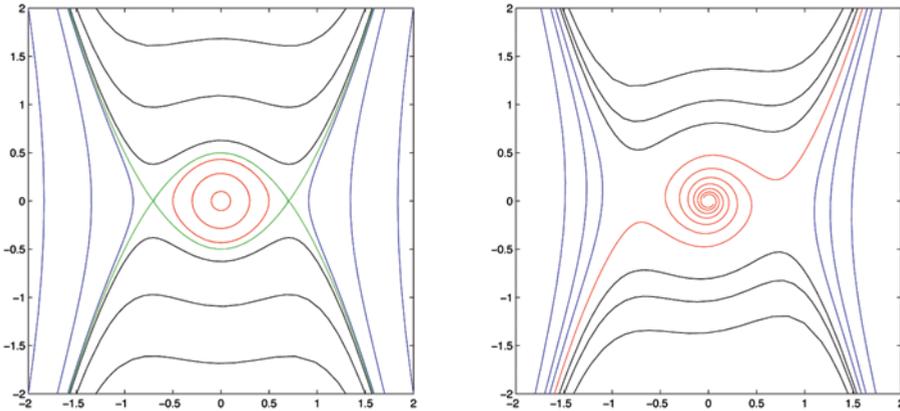


Fig. 4. – A sinistra la configurazione del sistema hamiltoniano (14); a destra la configurazione del sistema modificato (15)

mentre si presenta come una sella sia nelle vicinanze di A che nelle vicinanze di B (vedi Figura 4 a sinistra).

Osserviamo che $H(A) = H(B) = -1/8$. D'altra parte si ha

$$H = \frac{1}{2}(x^4 - x^2 - y^2) + \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \left[\left(x^2 - \frac{1}{2} \right)^2 - y^2 \right].$$

Quindi l'insieme di livello $c = -1/8$ è formato dall'unione delle due parabole $y = \pm(x^2 - \frac{1}{2})$. Tale insieme comprende otto orbite: i punti di equilibrio A e B , quattro orbite non limitate e due limitate. L'orbita limitata che giace nel semipiano $y > 0$ converge ad A per $t \rightarrow +\infty$ e a B per $t \rightarrow -\infty$. Quella che giace nel semipiano $y < 0$, all'opposto, converge ad A per $t \rightarrow -\infty$ e a B per $t \rightarrow +\infty$. Orbite che convergono verso due distinti punti d'equilibrio (verso uno dei due per $t \rightarrow +\infty$ e verso l'altro B per $t \rightarrow -\infty$) si chiamano *eterocline*. Assieme ai due punti A e B esse delimitano una regione contenente O e coperta da cicli. Si noti che non ci sono orbite omocline.

Modifichiamo adesso il sistema nel modo seguente

$$(15) \quad \begin{cases} \dot{x} = -\frac{1}{10}x - y \\ \dot{y} = x - \frac{1}{10}y - 2x^3 \end{cases}$$

I termini aggiunti sono “piccoli” nelle vicinanze dell’origine e hanno lo scopo di trasformarla in un punto attrattivo. Il coefficiente $1/10$ ha il solo scopo di rendere più facilmente interpretabile la configurazione di fase, che è quella mostrata nella Figura 4 a destra.

Il terzo esempio si costruisce a partire dalla funzione

$$H = -\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{x^4}{4}$$

che dà luogo al sistema hamiltoniano

$$(16) \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x - x^3 . \end{cases}$$

I punti stazionari di H sono tre: $O = (0, 0)$, $A = (-1, 0)$, $B = (1, 0)$. Questa volta O è un punto di sella, mentre A e B sono punti di minimo. L’insieme L_0 è formato da tutti i punti di coordinate (x, y) tali che

$$-\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{x^4}{4} = 0 .$$

Si tratta di una curva celebre a forma di “otto”, nota in geometria algebrica come Lemniscata di Gerono, il cui punto doppio coincide con O . L’insieme L_0 contiene tre orbite del sistema (16): il punto d’equilibrio O e due orbite omocline. Gli altri due punti d’equilibrio A e B si trovano all’interno delle regioni limitate da L_0 .

Per inciso, se alla seconda equazione del sistema si aggiunge un termine forzante del tipo $\varphi(t) = \sin t$ si ottiene un caso particolare dell’equazione di Duffing, che è uno degli esempi più studiati della teoria del caos deterministico.

Passiamo adesso a considerare il sistema

$$(17) \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x - y - x^3 \end{cases}$$

che differisce dal sistema (16) per l’aggiunta del termine $-y$ nella seconda equazione. I punti d’equilibrio non cambiano, sono sempre gli stessi tre: A , B e O . Come sappiamo, per analizzare il comportamento

delle orbite nelle vicinanze dei punti d'equilibrio si ricorrere alla matrice (7) che nel nostro esempio diventa

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - 3x^2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Nel punto O , gli autovalori di questa matrice sono reali e opposti: l'origine rimane dunque una sella anche per il sistema modificato: come prevedibile, l'aggiunta di un termine che è piccolo vicino a zero non cambia le cose. Nei punti A e B , gli autovalori risultano complessi coniugati, con parte reale strettamente negativa. Questi punti diventano quindi dei fuochi attrattivi per il sistema modificato. La configurazione è mostrata nella Figura 5.

Come ultimo esempio, consideriamo il sistema hamiltoniano

$$(18) \quad \begin{cases} \dot{x} = -y + y^3 \\ \dot{y} = x - x^3 \end{cases}$$

definito dalla funzione

$$H = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + \frac{y^4}{4} - \frac{y^2}{2}.$$

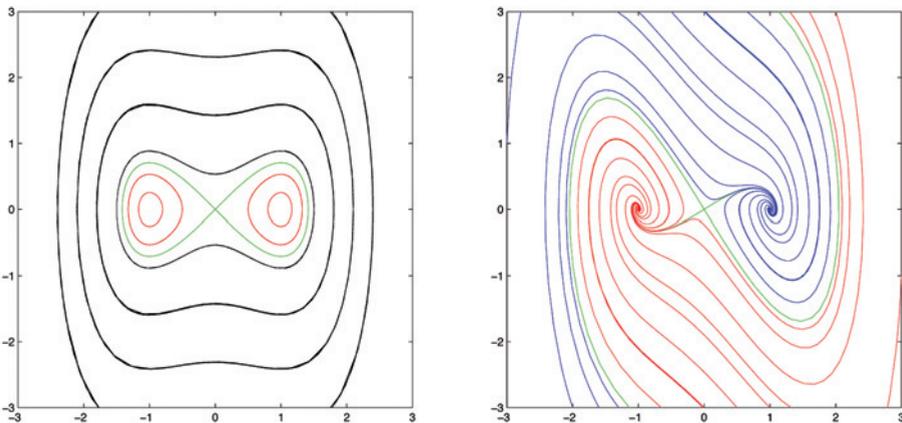


Fig. 5. – A sinistra la configurazione del sistema hamiltoniano (16); a destra la configurazione del sistema modificato (17)

Questo sistema presenta ben nove punti di equilibrio, di seguito elencati:

$$O = (0, 0), C_1 = (1, 1), C_2 = (-1, 1), C_3 = (-1, -1), C_4 = (1, -1),$$

$$S_1 = (1, 0), S_2 = (0, 1), S_3 = (-1, 0), S_4 = (0, -1) .$$

Calcolando in corrispondenza di ciascuno di essi la matrice (7), si vede che S_1, S_2, S_3, S_4 sono punti di sella, mentre O, C_1, C_2, C_3, C_4 sono centri (la configurazione è mostrata nella Figura 6 a sinistra).

Consideriamo poi il sistema modificato

$$(19) \quad \begin{cases} \dot{x} = -\frac{x}{10} - y + y^3 \\ \dot{y} = -\frac{y}{10} + x - x^3 . \end{cases}$$

La modifica, anche in questo caso, si può considerare “piccola” se x e y sono “piccoli”, e cioè in un intorno dell’origine: essa è concepita con lo scopo di distruggere la configurazione di centro del punto O (che rimane un punto d’equilibrio anche per il sistema modificato), trasformandolo in un fuoco attrattivo. Non è però facile prevedere le conseguenze di questa modifica sugli altri punti di equilibrio. Osservando la Figura 6 a destra, si nota che vi sono ancora quattro

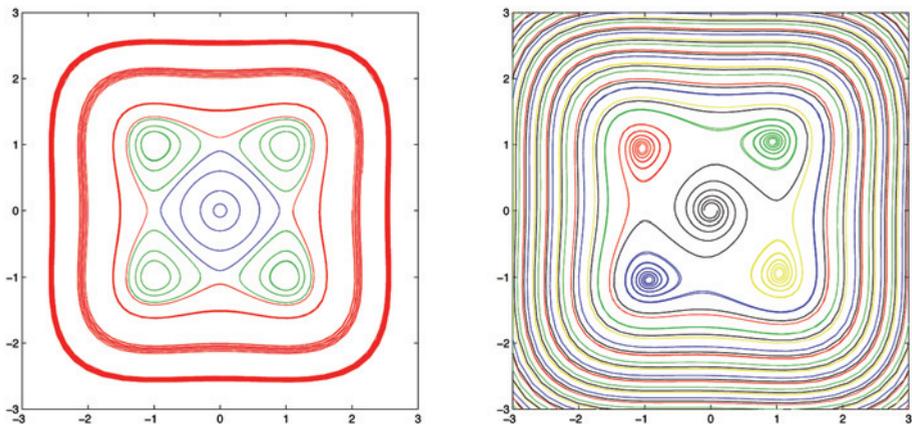


Fig. 6. – A sinistra la configurazione del sistema hamiltoniano (18); a destra la configurazione del sistema modificato (19).

punti di sella, la cui posizione appare però leggermente spostata rispetto a quella di S_1, S_2, S_3, S_4 . Anche i punti C_1, C_2, C_3, C_4 appaiono leggermente spostati, e cambiano la loro natura diventando tutti fuochi attrattivi⁹. Ma la cosa più interessante è osservare la disposizione complessiva delle orbite. Se si escludono otto orbite speciali (separatrici) che vengono attratte, due per ciascuno, dai quattro punti di sella, una qualunque altra orbita è attratta, per $t \rightarrow +\infty$, da uno dei cinque fuochi attrattori. La regione coperta da tutte le orbite che vengono attratte da un dato punto d'equilibrio si chiama *regione d'attrazione*. Nel nostro esempio, le regioni d'attrazione sono cinque, e si avvolgono l'una attorno all'altra formando spire di spessore sempre più sottile. Via via che ci si allontana dall'origine, diventa quindi sempre più difficile posizionare il sistema in modo da prevedere verso quale punto d'equilibrio l'orbita sarà attratta.

Questo esempio evidenzia una situazione molto simile a quella che nella teoria del caos deterministico, viene definita dal termine *sensibilità rispetto ai dati iniziali*.

6. – Considerazioni conclusive

Nel tracciare la configurazione di fase di un sistema dinamico sullo schermo del computer, si può trarre vantaggio dall'uso del colore, anche per enfatizzare l'aspetto estetico. Nei disegni presentati in questo articolo, abbiamo più che altro utilizzato il colore per differenziare regioni nelle quali le orbite presentano diversi comportamenti. Per esempio, nel caso del sistema (19), la colorazione permette di visualizzare più chiaramente il fenomeno delle varie regioni di attrazione che si avvolgono.

Molti altri esempi possono essere trattati sulla base dell'approccio delineato in questo articolo: per ottenere un buon disegno, è impor-

⁹ Confermare la veridicità di queste affermazioni sulla base di un ragionamento rigoroso è tutt'altro che banale. Non è infatti chiaro come si possa fare a calcolare le coordinate dei punti d'equilibrio del sistema (19) se non numericamente, ricorrendo di nuovo al computer. Di conseguenza, anche gli autovalori della matrice (7) potranno essere determinati solo in modo approssimato.

tante mettere molta cura nella scelta delle condizioni iniziali con le quali le orbite vengono tracciate. La teoria dei sistemi dinamici offre altri spunti, non sviluppati in questo articolo, ma che potrebbero essere sfruttati per produrre disegni interessanti. Supponiamo per esempio di introdurre un parametro nelle equazioni: può accadere che la configurazione delle fasi subisca cambiamenti qualitativamente importanti quando il parametro, lasciato variare, oltrepassa certi valori critici. Si dice che il sistema presenta, in corrispondenza di tali valori, una *biforcazione*.

Il lettore che fosse interessato ad approfondire la teoria dei sistemi dinamici, ha a disposizione una vastissima letteratura, che spazia dai vari manuali scritti a fini didattici (sia pure di livello universitario) fino a libri che sono veri e propri rendiconti di ricerca avanzata ([1, 4, 5, 6, 7, 8], solo per citarne alcuni).

La teoria dei sistemi dinamici, come già osservato, ha legami molto stretti con varie discipline applicative. Alcuni dei sistemi studiati in questo articolo possono essere pensati come modelli matematici in grado di rappresentare semplici esperimenti fisici. Per esempio un sistema del tipo (5), se gli autovalori sono immaginari puri, descrive le piccole oscillazioni di un pendolo galileiano (senza attrito) oppure, alternativamente, un semplice circuito elettrico con resistenza trascurabile.

Il sistema (16) ha un comportamento simile a quello di un sistema conservativo con un grado di libertà con due punti di equilibrio stabili (per esempio, una versione semplificata di un campo di forza gravitazionale generato da due pianeti di massa uguale vicini tra loro). La modifica introdotta in (17) può essere pensata come un termine dissipativo (per esempio un attrito). Sistemi come (16), (19) si dicono anche *multistabili* perché quasi tutte le traiettorie convergono verso l'uno o l'altro dei punti di equilibrio presenti nel sistema. I sistemi multistabili intervengono nello studio dei modelli biodinamici, e in particolare delle reti neurali.

Concludiamo con qualche considerazione in merito allo strumento informatico. MATLAB è un prodotto commerciale molto diffuso nelle Facoltà di Ingegneria, dove viene impiegato sia per la ricerca che per l'insegnamento. Non è limitato all'integrazione delle equazioni differenziali, ma fornisce supporti numerici per la risoluzione approssimata

di vari problemi di analisi e di geometria. La diffusione dei calcolatori e in particolare lo sviluppo delle potenzialità grafiche è stato ed è a tutt'oggi di grande aiuto nello studio dei sistemi dinamici piani. Negli ultimi trent'anni, molti programmi sono stati realizzati a questo scopo: la loro evoluzione è andata di pari passo con l'evoluzione dell'elettronica e dei sistemi di programmazione. A prescindere da alcuni tentativi "artigianali" (per esempio [3]), il primo software di successo dedicato essenzialmente alla didattica fu PHASER, concepito da H. Koçak e distribuito con un dischetto da 3,5 pollici allegato al libro [9]. Di PHASER, esiste oggi una versione con una grafica molto raffinata, reperibile in Internet. In Internet si trovano anche altri programmi specifici, commerciali e non. Tra quelli che, limitatamente agli usi didattici, possono essere liberamente scaricati, uno dei più popolari è PPLANE, software prodotto presso la Rice University e ampiamente utilizzato in ambiente ingegneristico ([2]). PPLANE è di uso facile e intuitivo, è dotato di molti accessori e dispone anche di un'ampia galleria di sistemi relativi a semplici modelli di interesse applicativo.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [1] VLADIMIR I. ARNOLD, *Ordinary differential equations*, Springer, Berlin 1992
- [2] DAVID ARNOLD, JOHN C. POLKING, *Ordinary Differential Equations using MATLAB* (Second edition), Prentice Hall, 1999.
- [3] ANDREA BACCIOTTI, PAOLO BOIERI, PAOLA MORONI, *A computer approach to nonlinear planar systems of ODE's*, Comput. Educ. 11(4), 1987, pp. 253-265,
- [4] MARTIN BRAUN, *Differential equations and their applications: an introduction to applied mathematics*, Springer, New York 1993.
- [5] ROBERT L. DEVANEY, *An introduction to chaotic dynamical systems*, Benjamin-Cummings, Menlo Park 1986.
- [6] JOHN GUCKENHEIMER, PHILIP HOLMES, *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcation of vector fields*, Springer, New York 1983.
- [7] JACK K. HALE, HSEYIN KOÇAK, *Dynamics and bifurcations*, Springer, New York 1991.
- [8] MORRIS W. HIRSCH, STEPHEN SMALE, *Differential equations, dynamical systems, and linear algebra*, Academic Press, Boston 1974.
- [9] HSEYIN KOÇAK, *Differential and difference equations through computer experiments*, Springer, New York 1986.

Andrea Bacciotti

Dipartimento di Scienze Matematiche, Politecnico di Torino

C.so Duca degli Abruzzi, 24 - 10129 Torino - Italy

E-mail: andrea.bacciotti@polito.it