
La Matematica nella Società e nella Cultura

RIVISTA DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

GINO FAVERO, PAOLA MODESTI

Dopo Von Neumann e Morgenstern: il dibattito dagli Anni Quaranta agli Anni Cinquanta

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. 6 (2013), n.2, p. 263-298.

Unione Matematica Italiana

[<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2013_1_6_2_263_0>](http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2013_1_6_2_263_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2013.

Dopo Von Neumann e Morgenstern: il dibattito dagli Anni Quaranta agli Anni Cinquanta

G. FAVERO - P. MODESTI

1. – Introduzione

La grande portata innovativa della teoria [93] di von Neumann e Morgenstern, apparsa per la prima volta nell'introduzione di *The Theory of Games and Economic Behavior* del 1944 e destinata ad assumere ben presto il ruolo di paradigma, e i tempi¹ ormai maturi dal punto di vista scientifico-culturale affinché la Teoria delle decisioni in ambito aleatorio “esplosa”, fanno sì che la metà degli Anni Quaranta veda l'aprirsi di un dibattito estremamente fertile, della durata di più di vent'anni. Da quel momento in avanti, tutta l'attenzione si sposta dal contesto deterministico all'ambito aleatorio².

Come avviene spesso alla nascita di una teoria promettente, intervengono nella discussione gli studiosi più eminenti, stimolando approfondimenti e indagini, se non addirittura elaborando teorie originali.

Nel maggio del 1952 si tiene a Parigi il convegno *Colloque sur les Fondaments et Applications de la Theorie du Risk en Econométrie* [16], a cui partecipano i più prestigiosi matematici economici dell'epoca (da de Finetti a Savage, da Arrow a Samuelson, da Friedman ad Allais), nel quale sono esposte, seppur in embrione, le teorie che di lì a poco con-

¹ Esposizioni con una formalizzazione più rigorosa si devono, tra gli altri, a J. Marschak [60] e N. E. Jensen [50].

² È singolare che tale cambiamento di rotta non abbia avuto luogo già negli Anni Trenta dopo l'innovativo contributo di Ramsey che pubblica nel 1926 *Truth and Probability* [78], passato relativamente sotto silenzio fino alla diffusione nel 1954 dell'opera di Savage [82], in cui sono sviluppate simultaneamente per la prima volta una teoria della probabilità ed una teoria dell'utilità.

tribuiranno, opportunamente formalizzate, ad arricchire e ad ampliare la dottrina.

Talvolta un modello matematico calato in un problema economico conduce ad una fredda e ripetitiva utilizzazione di strumenti matematici poveri e non particolarmente interessanti. In altri casi si ricorre ad una matematica così avanzata da portare a perdere di vista il problema economico iniziale.

La teoria dell'utilità di von Neumann e Morgenstern, invece, nasce³ da un problema economico concreto (la rappresentazione delle preferenze), utilizza strumenti matematici adeguati e non eccessivamente pesanti e, allo stesso tempo, costituisce uno stimolo effettivo alla ricerca matematica. È forse la prima teoria matematica sviluppata appositamente per risolvere un problema economico e sembra essere un esempio perfetto di interazione positiva tra scienza economica e scienza matematica.

Ci sembra interessante proporre una rassegna dei principali temi di dibattito, facendo parlare molti degli Autori coinvolti. Ne esce un quadro vivacissimo e, per certi versi, ancora attuale.

Nel prossimo paragrafo presentiamo brevemente, a titolo di premessa, lo stato dell'arte in fatto di teoria dell'utilità in ambito aleatorio fino al contributo di Von Neumann e Morgenstern. Nel paragrafo successivo, introduciamo la discussione sui fondamenti con particolare riferimento alla misurabilità (cardinalità) dell'utilità. Nel quarto paragrafo ripercorriamo le critiche agli assiomi e la celebre polemica tra Allais e Savage. Il quinto paragrafo è dedicato all'avversione al rischio con particolare riferimento al contributo di Friedman e Savage. Nel sesto paragrafo illustriamo alcune generalizzazioni o versioni alternative della teoria. Nell'ultimo paragrafo, presentiamo qualche osservazione conclusiva. Nell'Appendice sono riportati alcuni complementi di natura tecnica, tra i quali, in particolare, il Teorema di Von Neumann e Morgenstern nella sua versione originaria.

³ Per una ricostruzione del contesto politico-economico in cui si inserisce il lavoro dei due Autori, cfr. [52].

2. – Il contesto

Tra la seconda metà del Seicento e l'inizio del Settecento, agli albori della Teoria delle probabilità, si afferma la linea di tendenza secondo la quale il prezzo equo per partecipare ad un gioco d'azzardo è il valore atteso degli importi monetari che ne costituiscono i *payoff* (premi) aleatori. Tale convinzione è messa in crisi dal celebre paradosso di Pietroburgo che permette di mettere a fuoco che una buona valutazione deve basarsi su un'opportuna trasformazione dei *payoff* che rappresenta la *soddisfazione* del vincitore per il premio ottenuto. La trasformazione è detta *funzione di utilità*.

Nel 1738, Daniel Bernoulli pubblica la memoria *Specimen Theoriae Novae de Mensura Sortis* [15] che contiene in embrione la successiva teoria dell'utilità attesa. L'Autore rifiuta il principio del valore atteso ed introduce il concetto di utilità⁴: “Un uomo molto povero si procura un biglietto di una lotteria che, con la stessa probabilità, gli può far vincere 20.000 ducati oppure nulla. [...] Sarebbe sconsiderato se vendesse questo biglietto per 9.000 ducati? A me sembra che la risposta sia negativa. D'altra parte, sono portato a credere che un uomo ricco sarebbe incauto, se rifiutasse di comprare il biglietto della lotteria per 9.000 ducati [...]. Tutti gli uomini non possono usare la stessa regola per valutare il gioco [...]. La determinazione del valore di un gioco non deve essere basata sul suo premio, ma sull'utilità che esso procura [...]. Così, non c'è dubbio che un guadagno di 1.000 ducati è più significativo per un povero che per un ricco”. Stabilito che l'utilità è il giusto criterio di valutazione, il prezzo di un gioco è il cosiddetto valore atteso dell'utilità, cioè la somma di tutti gli addendi ottenuti moltiplicando l'utilità di ogni premio per la relativa probabilità. La funzione d'utilità proposta da Bernoulli è la funzione logaritmica o, più in generale, qualunque funzione monotona crescente e concava. La teoria dell'utilità bernoulliana risolve anche il paradosso di Pietroburgo⁵.

⁴ Cfr. [15], p. 24.

⁵ È interessante osservare che, nello stesso periodo, anche il matematico Gabriel Cramer giunge sostanzialmente alle stesse conclusioni di Bernoulli, come riconosce lo stesso Autore, riportando una lettera di Cramer. Cfr. [15], p. 34.

Per tutto l'Ottocento, lo studio dell'utilità in ambito aleatorio non vede contributi di rilievo. Nel 1926, Frank Plumpton Ramsey pubblica *Truth and probability* [78], saggio nel quale sono sviluppate simultaneamente una teoria della probabilità ed una teoria dell'utilità. Il lavoro di Ramsey è importante, non tanto per la costruzione della funzione d'utilità (che si rivelerà ben presto inadeguata ed eccessivamente macchinosa), ma perché apre definitivamente la strada allo studio dell'utilità in ambito aleatorio ed introduce l'approccio assiomatico alla teoria.

Nel 1939, John Von Neumann e Oskar Morgenstern si incontrano a Princeton. Da tale incontro nasce subito una solida intesa. Alle loro conversazioni si uniscono talvolta Bohr, Veblen, Weyl e lo stesso Einstein. Com'è noto, nel 1944 Von Neumann e Morgenstern pubblicano *The Theory of Games* [93], dove per la prima volta appare in termini rigorosi e formali la teoria assiomatica dell'utilità attesa. Per consentire una lettura agevole di ciò che segue, diamo un brevissimo cenno della teoria dei due Autori nella sua versione 'moderna'⁶.

Si consideri un insieme X di lotterie, cioè un insieme di variabili aleatorie le cui determinazioni sono gli elementi di un insieme S di premi. Su X sia definita l'usuale operazione di miscela. Un individuo è razionale se è in grado di esprimere preferenze su X che soddisfano opportuni assiomi di completezza, transitività, continuità e indipendenza⁷. Si dimostra che le preferenze soddisfano gli assiomi se e solo se esiste una funzione d'utilità $u : S \rightarrow \mathbf{R}$, tale che la lotteria A è preferita o indifferente alla lotteria B se e solo se $E[u(A)] \geq E[u(B)]$, dove con $E[u(\cdot)]$ indichiamo il valore atteso di u . La funzione di utilità u è unica a meno di trasformazioni lineari (affini) crescenti.

Qui ha inizio la nostra trattazione.

⁶ Nell'Appendice, è riportata la versione originaria.

⁷ In realtà, in [93], l'assioma di indipendenza non compare esplicitamente. Avremo modo di riparlarne più avanti.

3. – Discorso sul metodo. Utilità lineare. La misurabilità.

- Il desiderio di rendere massima l'utilità attesa è razionale?
- La funzione di utilità *deve* essere lineare nelle probabilità?
- L'utilità in ambito aleatorio è misurabile?

Nonostante che, a prima vista, i tre quesiti sembrano ben distinti tra loro, un'analisi più approfondita fa emergere collegamenti e legami che mostrano come, in effetti, si tratti di aspetti diversi di un'unica questione.

Why "Should" Statisticians and Businessmen maximize Moral Expectations? Questo è il titolo dell'intervento di Marschak [61] ad un simposio che si tiene a Berkeley nel 1950 e che sembra ben sintetizzare gli interrogativi degli studiosi a proposito della legittimità della teoria di Von Neumann e Morgenstern.

Si considerino un insieme di lotterie con un numero finito di premi, una funzione d'utilità U (o una sua trasformazione lineare) definita sull'insieme dei premi e l'insieme S delle strategie, dove per strategia⁸ si intende la scelta di partecipare ad una lotteria e non alle altre, tenendo conto di tutti i possibili stati del mondo in relazione ai premi delle lotterie. Detto $\mu_u(S)$ il valore atteso dell'utilità della lotteria scelta in base alla strategia S , è sempre razionale⁹ scegliere la strategia $S^* \in S$ tale che:

$$\mu_u(S^*) > \mu_u(S) \quad \forall S \neq S^* \quad ?$$

Marschak prosegue analizzando in termini di utilità attesa la celeberrima scommessa [71] di Pascal, più volte richiamata in letteratura, concludendo che essa costituisce già, e siamo solo nel 1670, un'applicazione del principio dell'utilità attesa.

⁸ Il concetto di strategia (che tuttavia non è indispensabile per impostare il problema) richiama l'idea di "azione" che dopo pochi anni sarà formalizzata rigorosamente da Savage [82].

⁹ In realtà la domanda, in questi termini, è mal posta: von Neumann e Morgenstern definiscono l'utilità di una lotteria *direttamente* sulla entità-lotteria; perciò se la funzione di utilità rispecchia le preferenze dell'individuo, è ovvio che egli desideri massimizzarla. Il problema riguarda semmai alcune versioni modificate della teoria, nelle quali si costruisce la funzione di utilità di lotterie partendo esplicitamente dalle utilità di eventi o beni certi opportunamente pesate con le probabilità.

La questione sottesa all'interrogativo di Marschak porta alla distinzione tra teoria normativa e teoria descrittiva, distinzione che si rivelerà in seguito di fondamentale importanza nel dibattito sulla scelta degli assiomi. In estrema sintesi: una teoria descrittiva si propone di studiare e descrivere il comportamento degli individui; una teoria normativa ha come obiettivo la presentazione di un insieme di regole a cui un individuo razionale 'dovrebbe' attenersi. Non si tratta di due ambiti totalmente scollegati: una teoria descrittiva si arricchisce dal confronto tra il comportamento effettivo ed il comportamento ideale degli individui e deve talvolta prendere in considerazione comportamenti indotti dall'uso concreto dei modelli normativi (si pensi, per esempio, a quanto avviene nei mercati finanziari); una teoria normativa non avrebbe senso se prescindesse completamente dal comportamento effettivo degli individui, prescrivendo assiomi violati sistematicamente nella realtà empirica.

In questi anni l'interazione tra le due teorie è particolarmente evidente e, poiché la teoria dell'utilità attesa è agli inizi, coloro che se ne occupano sono estremamente attenti a non introdurre assiomi poco realistici. Escono numerosissimi studi contenenti il risultato di esperimenti e di *test* atti ad estrapolare il comportamento degli individui (si distribuisce un questionario anche al convegno di Parigi). Ricordiamo in proposito l'iper-citato articolo di Mosteller e Nogee [68], *An Experimental Measurement of Utility*, che sembra confermare che l'idea di rendere massima l'utilità attesa è condivisa dalla maggior parte degli individui, oltre ad aggiungere che è possibile, sulla base di funzioni di utilità ricavate empiricamente, predire i comportamenti futuri degli intervistati anche in situazioni complicate. Gli Autori osservano inoltre che gli assiomi di von Neumann e Morgenstern in qualche caso sono violati, senza però che questo ne comprometta la significatività e che, a dispetto dell'esperienza, molti individui insistono nel compiere scelte che potrebbero, nel lungo periodo, portarli alla rovina.

Tornando alla questione iniziale, dal punto di vista sia normativo, sia descrittivo il semplice principio di rendere massima l'utilità attesa sembra accettabile e, scrive nel 1952 Bruno de Finetti¹⁰, "La conce-

¹⁰ Cfr. [24], p. 686.

zione di von Neumann e Morgenstern (che [...] si riduce in un certo senso a quella della ‘speranza morale’ di Daniele Bernoulli¹¹) fornisce una nozione di ‘utilità’ (misurabile) che può essere accettata da coloro che respingevano i modi di definirla basati su altro ordine di idee (e, in particolare, io l’accetto)¹².”

Il principio di rendere massima l’utilità attesa è accettato da quasi tutti gli studiosi e l’utilità è intesa, il più delle volte, nel senso di von Neumann e Morgenstern.

Ciononostante, si propone ugualmente qualche teoria alternativa. Si tratta, per lo più, di generalizzazioni: si accetta il principio di massimizzare l’utilità attesa, ma si attribuisce alla funzione di utilità una forma più generale oppure si rifiuta *in toto* la teoria dell’utilità attesa per individuare il massimo di un funzionale che dipende in modo più o meno complicato dai premi e dalla distribuzione di probabilità della lotteria in esame.

Una classificazione semplice delle possibili caratteristiche di una funzione di utilità, riferita però solo a importi monetari e senza la pretesa di esaurire tutti i casi, è fornita da Archibald in un lavoro [5] del 1959.

Detta $u = u(x, p)$ la funzione di utilità di una lotteria che fa vincere il premio x con probabilità p e zero con probabilità $1 - p$, l’Autore descrive quattro possibili funzioni di utilità:

- la funzione di utilità è lineare sia in p sia in x . È il criterio del valore atteso;
- la funzione di utilità è lineare in x : $u(x, p) = xg(p)$. L’utilità marginale del guadagno è costante;
- la funzione di utilità è lineare in p : $u(x, p) = pf(x)$. È l’utilità *à la* von Neumann e Morgenstern: la linearità in p implica che nes-

¹¹ Cfr. [15].

¹² De Finetti, consapevole dei pregi e dei difetti dell’approccio assiomatico, prosegue segnalando i pericoli derivanti sia dalla costruzione di teorie coerenti, ma eccessivamente astratte, i cui fondamenti potrebbero rivelarsi del tutto arbitrari, sia dalla preoccupazione esagerata di considerare molti aspetti della realtà (e qualche volta persino degli errori di osservazione) che, portata alle estreme conseguenze, potrebbe impedire la costruzione di qualsiasi teoria.

suna utilità specifica sia attribuita al piacere (o alla ripulsa) del gioco¹³;

- la funzione di utilità non è lineare né in p né in x , è crescente rispetto ad entrambe. Tale ipotesi permette di considerare i numerosi fattori che influiscono sulle decisioni dell'individuo, ma, per la sua eccessiva generalità, sembra non permettere valutazioni esaurienti.

Da quest'ultima versione di funzione di utilità al concetto di utilità rappresentata da un funzionale estremamente generico, il passo è breve: oltre a Tintner che introduce [90] la nozione di "funzione generatrice delle scelte aleatorie" e a Georgescu Roegen¹⁴, ricordiamo, in particolare, il contributo di Maurice Allais.

Nel 1953, Allais pubblica un durissimo articolo [1] nel quale attacca la teoria di von Neumann e Morgenstern e si scaglia contro i "neobernoulliani" accusandoli di intolleranza e di tirannia.

L'Autore afferma che la dottrina corrente è accettabile solo in prima approssimazione, in quanto non considera affatto le circostanze psicologiche che intervengono nelle scelte dell'individuo, quali, per esempio, il piacere del gioco. Inoltre, non c'è motivo per sostenere che il comportamento di un individuo che non desidera rendere massima l'utilità attesa non è razionale.

Si forniscono numerosi controesempi nei quali si mostra come gli assiomi possano essere violati anche da soggetti razionali (accenneremo più avanti al celeberrimo *Paradosso di Allais*).

¹³ Samuelson propone di includere il piacere del gioco nella valutazione dei premi, suggerimento che però lascia aperto il problema della loro misurazione [83].

¹⁴ Georgescu Roegen [43, 44] osserva che le teorie consuete partono dall'idea apparentemente innocua che l'unico desiderio di un individuo sia di possedere la maggior quantità possibile di beni materiali. In verità, almeno nella società moderna, ognuno considera, insieme al bene desiderato, le azioni necessarie per ottenerlo. "In altre parole, [la scelta avviene] tra insiemi costituiti da due tipi di coordinate $[X, A]$ dove X è un vettore di beni e A è l'azione con la quale si ottiene X ." Per i beni ogni individuo dovrebbe avere ben chiara la propria scala di preferenze, per le azioni entrano in gioco valori che dipendono dalla matrice culturale della società in cui vive il soggetto. "Un concreto atto di scelta non è in generale una scelta culturalmente libera." Cfr. [44], p. 264.

L'impostazione di Georgescu Roegen, certamente originale, ma di scarsa concretezza, sembra riecheggiare l'utilità del prestigio sociale suggerita da Pigou [73] all'inizio del secolo.

Per quanto riguarda la parte costruttiva, Allais osserva che la teoria ha attraversato tre fasi. Detti g_1, g_2, \dots, g_n i guadagni monetari messi in palio in una lotteria, dette p_1, p_2, \dots, p_n le rispettive probabilità oggettive e p'_1, p'_2, \dots, p'_n le rispettive probabilità soggettive, emergono diverse tendenze:

- prima di Bernoulli, si proponeva di attribuire ad ogni lotteria l'indice V espresso dal valore atteso degli importi monetari:

$$V = \sum_{i=1}^n p_i g_i$$

- con Bernoulli e, in seguito, con von Neumann e Morgenstern, introdotta la funzione di utilità $s'(g_i)$ definita sugli importi monetari, il valore di una lotteria è stato fatto coincidere con la sua utilità attesa:

$$s'(V) = \sum_{i=1}^n p_i s'(g_i)$$

- altri Autori hanno accettato l'idea precedente, sostituendo le probabilità soggettive alle probabilità oggettive:

$$s'(V) = \sum_{i=1}^n p'_i s'(g_i)$$

Nessuna di queste proposte soddisfa Allais che ne propone una quarta:

- dette γ la funzione di utilità dei premi e $\Psi(\gamma)$ la densità di probabilità, si ha:

$$s'(V) = h[\Psi(\gamma)]$$

dove h è un funzionale¹⁵ opportuno.

¹⁵ Come per gli altri Autori, anche nel caso di Allais ci manteniamo fedeli alla simbologia originaria, anche se non sempre limpidissima.

Allais difenderà la sua teoria per tutta la vita, polemizzando e confrontandosi anche duramente con numerosi colleghi. Riportiamo in proposito due commenti autorevoli.

Il primo è di Marschak¹⁶ e compare proprio in una raccolta di interventi curata dallo stesso Allais nel 1979: “Nessuna ipotesi può erigersi a descrivere il ‘reale’ comportamento di uomini impreparati, senza esperienza, impulsivi, membri della nostra e di altre culture. Piuttosto queste [di von Neumann e Morgenstern] o altre ipotesi affermano di essere modelli di un comportamento ‘razionale’. Una sfida agli psicologi: sviluppate metodi per formare *Decision Maker!*”.

Il secondo contributo è di de Finetti¹⁷: il considerare circostanze accessorie “porta, senza alcuna utilità, ad incorporare nello schema, rendendolo torbido e farraginoso, tutto ciò che di nebuloso c’è ed è bene che ne resti al di fuori. Circostanze accessorie esistono anche nel caso di scelte non aleatorie: anche le compere [. . .] dipendono spesso in pratica da circostanze analoghe (compagnia, esempio, presentazione in vetrina, euforia o depressione, aver vinto o guadagnato facilmente del denaro, ecc., ecc.), eppure non ci sarebbe convenienza a rigettare lo schema teorico generale della preferibilità come punto di partenza per lo studio dell’economia.”.

Concludiamo con un cenno alle teorie che non fanno riferimento in alcun modo all’utilità attesa, rimandando per una trattazione più estesa al celebre articolo [7] di Arrow, *Alternative Approaches to the Theory of Choice in Risk-Taking Situations* del 1951, limitandoci a segnalare le complesse teorie di Neyman-Pearson (1933), Rubin (1949) e Chernoff (1949) [7].

Ricordiamo, in particolare, A. Wald che già nel 1939 comincia ad elaborare una teoria, probabilmente dovuta anche ad esperienze personali molto negative, secondo la quale per ogni scelta si deve considerare la peggiore fra le conseguenze possibili e scegliere l’opportunità che offre la migliore fra le conseguenze peggiori [94]. Questa proposta potrebbe essere ricondotta al gioco a somma zero fra due

¹⁶ Cfr. [62] in [3], p. 163.

¹⁷ Cfr. [24], p. 696.

giocatori che sono l'individuo e la natura: il primo sceglie l'azione, la seconda lo "stato-ipotesi" e l'individuo riceve la conseguenza determinata dalle due azioni congiunte. Il paragone è calzante per quanto riguarda la totale non conoscenza delle ipotesi; lascia invece a desiderare per quanto concerne la volontà dei giocatori. La natura, infatti, non ha un particolare interesse a giocare contro l'individuo.

Infine, accenniamo a G. L. S. Shackle che nel 1949 presenta [85] una teoria estremamente complicata nella quale, per ogni azione, ad ogni possibile guadagno è associata una sorpresa potenziale. Le coppie (guadagno, sorpresa) sono ordinate e l'utilità di ogni coppia cresce al crescere del guadagno e diminuisce al crescere dell'effetto sorpresa. La teoria di Shackle non si basa sull'idea di comportamento razionale, ma sulla considerazione che per l'individuo è quasi impossibile considerare simultaneamente eventi che si escludono reciprocamente.

Ancora de Finetti scrive¹⁸: "Quanto alle costruzioni radicalmente diverse, penso non abbiano alcuna giustificazione che quella storica: di apparire in un'epoca in cui nel campo delle concezioni sulle probabilità sussistono paurosi disorientamenti tali da scoraggiare chi dovrebbe riconoscere in tale teoria il fondamento per le proprie dottrine."

La questione della misurabilità (cardinalità) è senza dubbio la più spinosa.

Per quanto riguarda l'utilità in ambito certo, negli Anni Cinquanta il concetto di utilità ordinale è ormai unanimemente accettato, seppur con qualche rimpianto o malumore¹⁹.

L'utilità di von Neumann e Morgenstern sembra invece essere cardinale e suscita, proprio per questo, numerose critiche.

Il più feroce detrattore è Baumol che nel 1951 pubblica *The Neumann-Morgenstern Utility Index: an Ordinalist View* [11], che ben sintetizza alcune tra le obiezioni più significative. Com'è possibile, si chiede Baumol, che la funzione di utilità di von Neumann e Morgenstern sia l'unica, la sola, la vera?

¹⁸ *Ibidem.*

¹⁹ Cfr., per esempio, [81] e, più in generale, per l'utilità in ambito certo, [47].

Von Neumann e Morgenstern concedono alla funzione di utilità due gradi di libertà (i due coefficienti delle trasformazioni lineari ammesse), ma questo non è sufficiente. Anche Baumol, come Allais, è critico verso gli assiomi che conducono ad un'utilità cardinale (necessariamente più rigidi rispetto ai postulati per l'utilità ordinale), i quali, riguardando anche aspetti di natura psicologica, vietano all'individuo di avere caratteristiche non in linea con le ipotesi iniziali. Ma anche se l'individuo si riconosce negli assiomi, rimane da chiedersi se l'indice numerico che ne scaturisce, non sia arbitrario. Infatti, prosegue l'Autore, qualsiasi scala di misura è, in un certo senso, arbitraria, non essendoci ragione di preferire un indice ad un altro. Inoltre, nei problemi di scelta, due indici sono perfetti sostituti se conducono alle stesse decisioni e quindi qualsiasi indice che aumenti al crescere della quantità di un bene o al crescere della sua desiderabilità è un indice di utilità perfetto: restringere l'insieme delle funzioni ammissibili è dunque un atto assolutamente non necessario (ma si potrebbe replicare che proprio per questo è anche non particolarmente limitante).

A Baumol e, più in generale, agli ordinalisti, rispondono in parecchi, ribadendo sostanzialmente la distinzione tra teoria normativa e teoria descrittiva. Una risposta estremamente semplice è fornita da Savage²⁰: l'utilità di von Neumann e Morgenstern non si candida ad essere l'unica utilità accettabile o universalmente riconosciuta, ma è una tra le rappresentazioni possibili con il pregio della semplicità e della verosimiglianza. L'errore di von Neumann e Morgenstern, se errore c'è stato, è di non averla chiamata *utilità à la von Neumann e Morgenstern*.

Una risposta più articolata viene da un articolo²¹ di Friedman e dello stesso Savage, *The Expected Utility Hypothesis and the Measurability of Utility*. Lo scopo di una teoria scientifica è permettere di prevedere fenomeni non ancora verificatisi, affermando qualcosa che, a priori, potrebbe anche non accadere, ma che, di fatto, se la

²⁰ Cfr. [82], p. 97.

²¹ Si tratta del secondo di due articoli [41, 42] che Friedman e Savage dedicano all'utilità e che si distinguono per una straordinaria ampiezza di vedute.

teoria è corretta, accade. L'utilità ordinale in ambito aleatorio non ha un grosso potere di previsione. Pertanto è inevitabile indagare nella direzione dell'utilità cardinale²².

Ma perché accettare proprio l'utilità di von Neumann e Morgenstern? Innanzi tutto, le loro ipotesi sono plausibili almeno per via indiretta, cioè non tanto sulla base di esperimenti, quanto in virtù della loro ragionevolezza teorica. Inoltre si tratta di assunzioni coerenti con il resto della dottrina economica, sostenute per di più da un'assiomatizzazione rigorosa.

Concludiamo questo paragrafo con alcune righe del lavoro di Friedman e Savage: affermare che ogni convenzione che tratta l'utilità come misurabile è indesiderabile o non necessaria "sarebbe negare all'economia un modo di parlare o di esprimere teorie che è stato trovato utile, se non indispensabile, nelle altre scienze [...].

[Coloro che sostengono ciò] dovrebbero negare a loro stessi il piacere di parlare di guadagno monetario, di quantità di denaro, di dimensione della popolazione come di entità misurabili²³."

4. – Gli assiomi

Come era prevedibile, molto vivace è anche la discussione sulla plausibilità degli assiomi di von Neumann e Morgenstern. Sembra continuare a sussistere una certa confusione tra teoria normativa e teoria descrittiva: ogni assioma è violentemente messo sotto accusa, non appena un individuo si dice intenzionato a violarlo. D'altra parte, alcune obiezioni sono fondate.

"È naturale che l'ipotesi dell'utilità attesa [...] sia stata sfidata [...]. Ciò che von Neumann ed io abbiamo fatto è: (a) riconoscere il fatto

²² Un'altra argomentazione a favore della misurabilità dell'utilità è la famosa analogia con la misurabilità della temperatura, a proposito della quale segnaliamo comunque lo scetticismo di Georgescu Roegen [44] per il quale non si tratta di un paragone calzante in quanto, mentre la scala della temperatura, una volta fissata, è unica per tutti gli individui, la scala delle preferenze e la funzione di utilità che ne consegue sono strettamente personali.

²³ Cfr. [42], p. 474.

innegabile che nel nostro mondo alcune situazioni sono incerte e hanno stretti legami con le probabilità [...]; (b) stabilire un insieme di assiomi che esprimono precisamente le asserzioni²⁴.". Con queste parole, a trentacinque anni di distanza dall'uscita di *The Theory of Games*, Oskar Morgenstern apre l'intervento sollecitatogli da Allais. L'Autore prosegue affermando con forza che, dopo tanti anni, non si sono avute contestazioni degne di nota, le dimostrazioni e gli sviluppi matematici non hanno rivelato errori, gli assiomi appaiono tuttora trasparenti (anzi, più semplici ed eleganti di quanto non lo siano gli assiomi delle successive rielaborazioni²⁵).

Prima di entrare nel merito dei singoli gruppi di assiomi, premettiamo qualche osservazione.

Innanzitutto, uno dei pregi, generalmente riconosciuto, degli assiomi di von Neumann e Morgenstern sta nel fatto che la teoria che ne deriva permette di 'trattare' anche giochi dalla struttura molto complicata, dei quali si considera unicamente la struttura finale dei premi. In secondo luogo, ricordiamo che si è discusso molto della legittimità di un assioma o di un altro e sul concetto di individui coerenti. Riportiamo il pensiero in proposito di de Finetti e di Jensen.

Scrive²⁶ il primo: "Non possiamo escludere che esistano individui che cadono in 'incoerenze' e allora gli atteggiamenti possibili sono due. O riteniamo che tali incoerenze sono fatti incidentali e accessori nel senso che corrispondono [...] a svista di cui ciascuno si correggerebbe [...] ed allora ci limiteremo a teorizzare le opinioni 'coerenti' ed attribuiremo ogni deviazione alla scelta non sufficientemente precisa [...]. O riteniamo che esista da parte di certi individui [...] un modo di comportarsi sistematicamente e consapevolmente diverso e potrà valer

²⁴ Cfr. [66], p. 175.

²⁵ A proposito di alcune tra le critiche più frequenti, Morgenstern prosegue osservando che nel 1944 sia lui sia von Neumann erano consapevoli (e infatti l'avevano accennato) sia della possibilità di lavorare con probabilità soggettive, sia del fatto che stavano trascurando di attribuire un'utilità specifica al gioco: il fatto è che, come già sottolineato da Savage, la loro funzione di utilità vuole essere 'solo un'approssimazione di una realtà indubitabilmente più ricca e molto più complicata'.

²⁶ Cfr. [24], p. 690.

la pena di cambiare la teoria o allargandola per includere tale caso o aggiungendone una diversa.”.

E Niels Erik Jensen aggiunge²⁷: “In particolare, i matematici lavorano in assoluta libertà nella selezione degli assiomi [...]. Prima di accettare i teoremi ricavati su questa base, gli assiomi dovrebbero essere esaminati in un contesto concreto dove conducono a risultati peculiari. In questo modo emergono i loro limiti e le loro imperfezioni.”.

Si tratta insomma, ancora una volta, della ben nota questione dei rapporti tra assiomi e comportamento reale degli individui: la soluzione equilibrata consisterebbe nella scelta di postulati credibili e realistici, senza esagerare nell'esigere un'aderenza totale ai fenomeni empirici e senza pretendere, d'altra parte, di dare alla teoria una valenza assoluta.

Infine, osserviamo, ancora con Jensen, che almeno parte dell'asprezza del dibattito, nonché il suo protrarsi nel tempo sono da imputarsi al fatto che la 'riabilitazione' di un'utilità cardinale costituisce per la maggior parte degli studiosi, da tempo rassegnati all'analisi delle curve di indifferenza, una sorpresa spesso recepita con fastidio che finisce per provocare reazioni ipercritiche.

E veniamo agli assiomi. Numerosi autori esprimono critiche e rielaborano gli assiomi di von Neumann e Morgenstern a seconda dei propri gusti e della propria sensibilità economico-matematica. Ripercorreremo gli assiomi, presentando le obiezioni più frequenti nel dibattito facendo riferimento alla teoria (riportata brevemente nell'Appendice) nella forma in cui è presentata nel testo originale.

Sia U un insieme convesso. Tale assunzione non riceve critiche neppure dal punto di vista empirico. Serve solo a delimitare il campo delle applicazioni, senza porre restrizioni sostanziali.

Il primo assioma VNM1 riguarda l'esistenza di una relazione d'ordine completo \succ sull'insieme U . Richiedere la completezza esclude per l'individuo la possibilità di non essere in grado di esprimere una preferenza, perché, per esempio, posto davanti ad alternative complesse e molto diverse tra loro, *appiattendolo* i casi di indecisione sull'indiffe-

²⁷ Cfr. [50], p. 229.

renza. L'indifferenza fa registrare qualche malumore per quanto riguarda la transitività: la differenza tra coppie alternative successive in una serie potrebbe essere impercettibile per l'individuo e, ciononostante, il primo gioco della serie potrebbe essere percepito nettamente preferibile all'ultimo. Perciò, assumere la transitività dell'indifferenza è una sorta di idealizzazione²⁸.

La questione della percettibilità è, in effetti, piuttosto delicata.

Scrive²⁹ de Finetti: “[...] un concetto leggermente più elaborato consiste nel basarsi sulla ‘soglia del percettibile’: si ammette di poter determinare in ogni punto qual è l’ampiezza dell’aumento o diminuzione di utilità che riesce impercettibile a un individuo; come scala si adotta allora quella in cui tale soglia si mantiene costante.”. Se “la nozione è pressoché fine a se stessa, poco male. Ma credere di avere un concetto scientifico ben definito sarebbe altra cosa. Il limite fra percettibile e impercettibile è non solo vagamente definibile, ma vi è una contraddizione fra l’idealizzazione richiesta per definire la probabilità (anche per differenze minime) e quella che vorrebbe procedere oltre rimangiandosi tale promessa.”.

I primi due assiomi del secondo gruppo VNM2 stabiliscono la monotonia delle preferenze, mentre gli ultimi due costituiscono una sorta di assioma archimedeo, atto a garantire che non esiste una lotteria (o un premio) infinitamente migliore o peggiore delle altre. Questa richiesta dà adito a numerose discussioni. In particolare, nel 1963 Becker, deGroot e Marschak presentano³⁰ uno studio sperimentale che mostra come questi assiomi siano spesso violati.

Si pensi infatti ad una situazione in cui si ha $u \succ v \succ w$. Per la maggior parte degli individui non esiste una probabilità α che rende indifferente v ad $\alpha u + (1 - \alpha)w$. Il comportamento reale, d'altra parte tenderebbe a dimostrare il contrario: ogni individuo accetta quotidianamente di affrontare situazioni che comportano la possibilità, magari minima, di incorrere in circostanze tragiche (per esempio, un incidente grave).

²⁸ Cfr., in particolare, [6].

²⁹ Cfr. [24], p. 693.

³⁰ Cfr. [13], ma anche, seppur successivo, [19].

Inoltre, paradossalmente, se così non fosse, l'individuo non farebbe più niente e questo, a partire dall'atto di non nutrirsi per non ingerire alimenti avvelenati, lo porterebbe velocemente alla morte.

L'assioma archimedeo è introdotto proprio allo scopo di evitare la presenza di alternative eccezionali davanti alle quali si potrebbero avere reazioni inconsulte che, come tali, non avrebbe senso assoggettare alla teoria e che si rivelerebbero difficilmente conciliabili con la struttura archimedeo di \mathbf{R} , codominio della funzione di utilità.

Il terzo gruppo di assiomi VNM3 ha lo scopo di eliminare i cosiddetti *framing effect*: non importa l'ordine in cui u e v appaiono in una miscela, né il modo in cui si arriva ai risultati finali (se, cioè, essi sono o non sono il frutto di più lotterie composte tra loro). È proprio quest'ultima richiesta che sancisce il fatto che non esiste un'utilità (positiva o negativa) dovuta al piacere o alla ripulsa del gioco.

Fin qui gli assiomi originali di von Neumann e Morgenstern. Ma al convegno di Parigi, Samuelson presenta un nuovo assioma che, pur innescando accesissime discussioni, diviene in pochi anni, parte integrante della teoria. Si tratta dell'assioma di indipendenza (che ritroveremo in una veste più generale nella teoria dell'utilità [82] di Savage con il nome di *Sure-Thing Principle*):

$$u \succ v \quad \Rightarrow \quad \alpha u + (1 - \alpha)w \succ \alpha v + (1 - \alpha)w$$

$$\forall \alpha \in [0, 1], \quad \forall u, v, w \in U$$

Samuelson richiede quindi che la scelta del decisore sia influenzata solo dagli aspetti per cui due alternative differiscono effettivamente: la preferenza per un premio rispetto ad un altro (o per una lotteria rispetto ad un'altra) è indipendente dagli altri premi (lotterie) coinvolti.

Dopo il convegno di Parigi, l'Autore pubblica [83] nel 1952 *Probability, Utility and the Independence Axiom* in cui fa notare che, a differenza di quanto avviene per la teoria dell'utilità in ambito certo, la teoria dell'utilità attesa sembra prescrivere l'additività dell'utilità rispetto ad ogni singolo bene: non vi sono influenze di un bene sull'altro. Pertanto, se si vuole descrivere il comportamento di un individuo che desidera rendere massima l'utilità cardinale bernoulliana, si deve assumere l'assioma di indipendenza.

C'è dunque una lacuna negli assiomi di von Neumann e Morgenstern? No: tali assiomi implicano l'assioma di indipendenza, come dimostra³¹ Malinvaud in una nota [58] presentata dapprima a Parigi ed in seguito sullo stesso numero di *Econometrica* in cui appare l'articolo di Samuelson.

L'assioma suscita immediatamente aspre polemiche e, da più parti, si presentano controesempi di comportamenti che lo violano.

Accenniamo a due interventi che riceveranno molta attenzione da parte degli studiosi, gli interventi di Wold e di Allais. Wold, pur accettando l'utilità monetaria, rifiuta [95] tale proprietà se applicata ad un concetto di utilità più esteso. Infatti, osserva l'Autore (del quale riassumiamo e in parte semplifichiamo le argomentazioni), supponiamo che un individuo preferisca la quantità A di latte alla quantità B di vino e sia C un quantitativo di latte superiore a B ; poiché è $A \succ B$, per l'assioma di indipendenza deve essere:

$$\frac{1}{12}A + \frac{11}{12}C \succ \frac{1}{12}B + \frac{11}{12}C$$

Ora: se l'individuo può ripetere la scelta più di una volta (e può, perché la teoria del consumatore è statica), ha la possibilità di immagazzinare il latte oppure di saziarsene; egli potrebbe così trovarsi a desiderare anche il vino. Ma, per l'assioma di indipendenza, si vede costretto a bere latte per tutta la vita.

A Wold risponde, tra gli altri, Savage osservando che il fatto che la teoria del comportamento del consumatore in situazioni non di rischio sia statica (con particolari ipotesi riguardanti la possibilità di immagazzinamento e la linearità dei prezzi), non motiva il fatto che la teoria del consumatore in circostanze di rischio debba essere statica nello stesso senso. Da questo non segue che se la teoria di von Neumann e Morgenstern non è statica, non possa essere oggetto di osservazioni ripetute: essa può ugualmente essere sottoposta al vaglio degli esperimenti con l'unica avvertenza per coloro che conducono i *test* di non ripeterli più volte con lo stesso individuo.

³¹ Nell'Appendice è riportato un cenno della dimostrazione.

Il *paradosso di Allais*, anch'esso [1, 2, 3] presentato al convegno di Parigi, si prefigge di dimostrare che la teoria di von Neumann e Morgenstern è normativamente insoddisfacente da tutt'altra angolazione.

Si considerino la scelta tra il gioco *A* che fa vincere 100 milioni di franchi con certezza e il gioco *B* che fa vincere 500 milioni di franchi con probabilità 0,1, cento milioni con probabilità 0,89 e nulla con probabilità 0,01 e la scelta tra il gioco *C* che fa vincere 100 milioni con probabilità 0,11 e nulla con probabilità 0,89 e il gioco *D* che fa vincere 500 milioni con probabilità 0,1 e nulla con probabilità 0,9. Molti individui preferiscono il gioco *A* al gioco *B* in quanto, trattandosi in entrambi i casi di somme molte elevate, non ritengono valga la pena di affrontare il rischio (anche minimo) di non vincere nulla. Le stesse persone, però, il più delle volte, preferiscono *D* a *C* in quanto, essendo la struttura dei giochi molto simile, non danno importanza ad una piccola variazione di rischio e mirano alla cifra più alta.

Si verifica facilmente che le due scelte sono incompatibili³² e ciò che lascia più perplessi nel constatare l'incompatibilità delle scelte *A* e *D* è che esse appaiono assolutamente ragionevoli, mentre, addirittura, violano l'assioma di indipendenza. Allais dimostra che è assurdo scegliere simultaneamente *A* e *D*, a meno di non accettare l'idea (che, appunto, contraddice l'assioma di indipendenza) che l'individuo sia psicologicamente influenzabile dal contesto di presentazione del premio.

Racconta³³ lo stesso Allais a proposito del convegno di Parigi: "Nel 1952, le risposte di Savage concernenti due assiomi contraddissero i suoi stessi assiomi. La spiegazione che egli diede è in qualche modo

³² Infatti, detta u la funzione di utilità di von Neumann e Morgenstern, per la prima scelta si ha:

$$0,11u(100) > 0,1u(500) + 0,1u(0)$$

mentre per la seconda:

$$0,11u(100) < 0,1u(500) + 0,1u(0)$$

³³ Cfr. [2], p. 5.

sorprendente. Si limitò a dire: ‘Poiché i miei assiomi sono totalmente evidenti, le mie risposte che, in effetti, sono incompatibili con i miei assiomi, sono spiegate dal fatto che non ci avevo pensato a sufficienza.’. La reazione scandalizzata di Allais non coglie esattamente il senso delle parole di Savage³⁴ che sta ipotizzando che, se un individuo viola un assioma che continua ad apparire ragionevole, lo stesso individuo³⁵ è sicuramente disposto ad ammettere la superficialità della propria risposta ed a cambiare idea. Va però aggiunto che non sempre gli individui sono disponibili a cambiare scelta anche dopo essere stati correttamente informati³⁶.

In effetti, si possono costruire molti paradossi³⁷ che violano gli assiomi di von Neumann e Morgenstern, ma, come osserva³⁸ de Finetti, prendendo spunto da un controesempio proposto da Morlat, “[...] in ogni campo [...] si possono costruire esempi ingannevoli [...] ed è ben lecito attribuire anche nel caso presente alla capziosità dell’esempio il paradosso della risposta.”. E più avanti conclude: “Il paradosso concernerebbe, in altri termini, non la validità del principio, ma la facoltà di valutare correttamente i termini della sua applicazione in qualche caso.”.

³⁴ Fishburn osserva che “Se Savage fosse stato disposto ad indebolire i suoi assiomi di ordinamento con il principio di riduzione, non ci sarebbe stata contraddizione tra la difesa dello *Sure-Thing Principle* e le sue risposte iniziali alle domande di Allais che rivelavano violazioni dell’indipendenza.”. Cfr. [40], p. 826.

³⁵ Sul versante della psicologia sociale, è interessante osservare che proprio negli Anni Cinquanta nasce la Teoria della dissonanza cognitiva di Leon Festinger che studia l’incoerenza dell’individuo ed i meccanismi psicologici con i quali egli tenta di ridurla [29, 86].

³⁶ Cfr., tra gli altri, nella letteratura di circa trent’anni dopo, Moskowitz [67] e Machina [57]. Quest’ultimo in particolare osserva che il paradosso di Allais appartiene ad una categoria di fenomeni che risentono dell’*effetto della conseguenza comune* che consiste nel fatto che la ‘conseguenza comune’ (in questo caso, per esempio, la probabilità 0,89 di vincere 100 sia *A* sia con *B*) condiziona fortemente la scelta a differenza di quanto afferma l’assioma di indipendenza, nel senso che orienta, se molto favorevole, verso la decisione meno rischiosa e viceversa. L’Autore osserva peraltro che esiste anche l’*effetto del rapporto comune*, esemplificato, anche in questo caso, da un controesempio di Allais, che consiste nel fatto che l’individuo tende a sopravvalutare, se non troppo alta, la probabilità del risultato più estremo.

³⁷ Il paradosso di Allais è senz’altro il più noto della Teoria delle decisioni insieme al celebre paradosso di Ellsberg [27] che fa riferimento alla teoria di Savage [82].

³⁸ Cfr. [24], p. 697.

Concludiamo l'analisi del dibattito sugli assiomi³⁹ sulla falsariga della sintesi proposta da Jensen [50].

La teoria di von Neumann e Morgenstern richiede che:

- gli individui abbiano una conoscenza approfondita delle situazioni di rischio, nonché degli effetti conseguenti alla decisione presa, e siano pienamente consapevoli dei propri obiettivi in modo che le preferenze rivelate da ognuno siano stabili;
- una variazione infinitesima delle probabilità susciti sempre una reazione;
- ogni premio sia valutato in sé e non in relazione alla probabilità che lo accompagna o agli altri premi in palio nella stessa lotteria;
- “[...] tutti gli assiomi abbiano un’evidenza intuitiva così spiccata che non sembri privo di senso assumere che ogni decisore li accetterà come norme di comportamento coerente.” Il principio dell’utilità attesa “deve perciò essere considerato come una norma di decisione e valutata secondo le applicazioni che permette⁴⁰.”

5. – Il rischio

Nel 1948 Milton Friedman e Leonard Savage pubblicano *The Utility Analysis of Choices Involving Risk*, articolo [41] nel quale propongono una rilettura della teoria di von Neumann e Morgenstern allo scopo di mettere in luce i rapporti tra utilità, rischio e preferenze, rilettura destinata al successo e, ancora oggi, comunemente accettata. Il principio di rendere massima l’utilità attesa, scrivono gli Autori, ha, da sempre, incontrato diffidenze e rifiuti a causa della legge dell’utilità marginale decrescente. Infatti, se l’utilità marginale del denaro (d’ora in avanti ci riferiremo solo all’utilità della moneta) decresce all’aumentare del guadagno, un individuo che intende renderla massima in ogni situazione non parteciperà mai neanche ad un gioco equo. L’incremento della sua utilità nel vincere un dollaro sarebbe minore del decremento di utilità causato dalla perdita di un dollaro: l’utilità attesa è negativa.

³⁹ Cfr. anche [26].

⁴⁰ Cfr. [50], p. 243.

Naturalmente queste considerazioni sono contraddette di continuo dall'effettivo comportamento degli individui che giocano d'azzardo, scommettono e partecipano a lotterie. Agli occhi di Friedman e Savage l'ambiguità sta nel fatto che nessuno ha mai messo in chiaro che, almeno in ambito aleatorio (ma è noto che la questione è dibattuta anche in ambito certo), non c'è alcun bisogno di assumere l'utilità marginale decrescente⁴¹.

Nel successivo paragrafo 4, gli Autori introducono la parte più originale della loro teoria. Valgano le seguenti ipotesi:

- i) in ambito certo l'individuo preferisce guadagni elevati a guadagni esigui;
- ii) un individuo con reddito basso tende ad acquistare assicurazioni;
- iii) un individuo con reddito basso tende ad acquistare biglietti delle lotterie;
- iv) molti individui con reddito basso acquistano sia assicurazioni sia biglietti delle lotterie;
- v) usualmente le lotterie hanno più di un premio.

È ovvio che se la funzione di utilità di un individuo è ovunque concava, egli desidererà comprare un'assicurazione equa, ma non acquistare un biglietto della lotteria e viceversa. Segue allora che la più semplice funzione di utilità (di classe C^1) compatibile con le ipotesi ii), iii) e iv) presenta un tratto concavo seguito da un tratto convesso. Sarebbe auspicabile fornire indicazioni sulla forma della funzione di utilità per individui dal reddito alto, ma sarebbe difficile raccogliere informazioni affidabili e la progressività delle imposte potrebbe dar luogo a distorsioni. Infine, si dimostra che l'ipotesi v) è incompatibile con la funzione appena descritta, ma si può ovviare facilmente al problema aggiungendo un opportuno segmento concavo alla parte terminale della curva.

Osservano Friedman e Savage⁴²: “[...] una possibile interpretazione della teoria consiste nel considerare i due segmenti concavi verso il basso come corrispondenti a livelli socio-economici qualitativamente

⁴¹ Qualche ulteriore considerazione è riportata nell'Appendice.

⁴² Cfr. [41], p. 301.

diversi, e il segmento concavo verso l'alto [corrispondente] alla transizione tra due livelli.”.

Naturalmente questa interpretazione semplifica notevolmente i molteplici risvolti del fenomeno sociale: possono esistere più di due classi socio-economiche oppure classi sociali con caratteristiche difficili da mettere a fuoco; inoltre possono esistere individui terribilmente avari e giocatori accaniti.

L'articolo di Friedman e Savage riscuote subito un certo consenso e non scatena particolari obiezioni. L'intervento più significativo che appare in questi anni non è di stampo polemico, ma si limita a proporre una variante. Si tratta del lavoro di Markowitz, *The Utility of Wealth*, del 1952 [59]. L'Autore accetta sostanzialmente la forma della funzione di utilità proposta da Friedman e Savage, ma suppone che, indipendentemente dai livelli socio-economici, l'utilità marginale sia crescente per piccoli aumenti dei guadagni ordinari e decrescente per aumenti più cospicui. La novità più rilevante consiste nell'introduzione di un terzo punto di flesso per la funzione di utilità, dovuto ad un'ulteriore fascia di guadagni (molto bassi) tale che l'individuo preferisce il rischio di una grossa perdita al pagamento di un'assicurazione.

Infine, tra gli interventi critici verso Friedman e Savage, segnaliamo i contributi di Allais e di Robertson. Quest'ultimo in particolare, nell'articolo del 1954, sottolinea che l'idea che l'utilità *à la* von Neumann e Morgenstern tenga implicitamente conto dell'amore per il gioco non convince più di tanto: l'amore per il gioco va considerato in sé, altrimenti la teoria è lacunosa [81].

Per un ulteriore contributo sul concetto di rischio bisognerà attendere il 1964 quando Pratt [74] e di lì a poco Arrow (1965) [8] porranno le celebri misure dell'avversione al rischio.

6. – Gli altri

Prima di concludere, proponiamo una veloce rassegna⁴³ di tematiche e risultati in parte estranei al percorso seguito fin qui. Tralasciamo i

⁴³ Per ragioni di completezza, faremo cenno anche a qualche lavoro proposto in anni successivi al periodo fin qui considerato.

contributi di de Finetti (e Daboni) [24, 20], i cui risultati sulle medie associative possono essere rilette in termini di utilità, e di Savage [82] che introduce nella teoria la probabilità soggettiva, in quanto teorie ben note, autonome e non del tutto riconducibili al dibattito stimolato da von Neumann e Morgenstern. Per ragioni simili ci limitiamo ad accennare ai lavori di Herstein e Milnor [46] e di Anscombe ed Aumann [4].

Sulle differenze di utilità

In ambito certo si è dibattuto a lungo sul concetto di un' utilità che si prefigga di valutare non solo le preferenze, ma anche la loro intensità. In questo contesto sono centrali le differenze di utilità. A tale proposito, Schoemaker scrive⁴⁴: “L' utilità cardinale nel contesto neoclassico si riferisce all' intensità delle preferenze.”. Ma “dal punto di vista teoretico della misurazione, l' utilità cardinale ha piuttosto un significato diverso, poiché è riferita alle possibili trasformazioni della scala sottostante [...]. Dal punto di vista della misura, la teoria dell' utilità di von Neumann e Morgenstern è cardinale, in quanto la sua scala gode delle proprietà di un intervallo. D' altra parte, dal punto di vista delle preferenze, la teoria dell' utilità di von Neumann e Morgenstern è ordinale in quanto si limita a fornire una graduatoria delle lotterie.”.

In un lavoro [54] del 1957, Luce e Raiffa osservano che per von Neumann e Morgenstern i rapporti tra differenze di utilità sono invarianti per trasformazioni lineari, ma che da questo non segue che se $x_4 \prec x_3 \prec x_2 \prec x_1$ e $u(x_1) - u(x_2) > u(x_3) - u(x_4)$, lo scambio tra x_2 e x_1 è preferito allo scambio tra x_4 e x_3 . Perciò, l' utilità di von Neumann e Morgenstern non misura l' intensità delle preferenze in ambito certo e, di conseguenza, il concetto di utilità marginale assume un significato diverso: non è più la misura dell' incremento di soddisfazione, ma si riferisce al “tasso marginale di sostituzione tra x e la probabilità di vincere il premio predetto del biglietto della lotteria”, come scriverà⁴⁵

⁴⁴ Cfr. [87], p. 542.

⁴⁵ Cfr. [12], p. 548.

in seguito Baumol. Non vi può essere, quindi, alcuna identificazione tra l'utilità di von Neumann e Morgenstern e l'utilità in senso neoclassico, perché entrano in gioco fattori estremamente diversi, primi tra tutti la valutazione delle intensità delle preferenze in ambito certo e l'atteggiamento di fronte al rischio in ambito aleatorio. La teoria di von Neumann e Morgenstern, aggiunge Schoemaker, assume solo implicitamente l'esistenza di un'utilità neoclassica, senza la quale non sarebbe possibile determinare il certo equivalente delle lotterie.

Il concetto di differenze di utilità sembrerebbe essere una sorta di nozione primitiva. Tra i molti Autori che se ne occupano, ci limitiamo a ricordare Scott e Suppes [84] e Debreu [22], che, alla fine degli Anni Cinquanta, propongono sistemi di assiomi che garantiscono l'esistenza di una funzione $v(x)$ che rappresenta le preferenze ordinali e conserva l'ordine delle differenze in ambito certo, e Luce e Tukey, che, pochi anni dopo, riusciranno a ricavare $v(x)$ dalle preferenze rivelate [56]. Va comunque osservato che questa classe di teorie paga lo scotto dell'utilizzazione di ipotesi troppo restrittive, che portano inevitabilmente ad un'eccessiva perdita di generalità.

*Generalizzazioni*⁴⁶

Un primo importante sviluppo della teoria di von Neumann e Morgenstern è costituito dal celebre articolo [46] del 1953 di Herstein e Milnor, *An Axiomatic Approach to Measurable Utility*. Gli Autori sviluppano la teoria nel caso di un insieme infinito di premi ed introducono la famosa definizione di insieme mistura⁴⁷: "L'economista spesso considera un insieme S che è, allo stesso tempo, un insieme mistura e un insieme totalmente ordinato dove l'operazione di mistura è [...] una mistura di probabilità, l'ordine è un ordine di preferenza ed S è l'insieme delle lotterie.". Il sistema di assiomi proposto è composto da tre assiomi sostanzialmente equivalenti alle assunzioni di von Neumann e Morgenstern, da cui si ricava l'esistenza di una funzione di

⁴⁶ Cfr. anche [39].

⁴⁷ Cfr. [46], p. 293.

utilità da S in \mathbf{R} , lineare e unica a meno di trasformazioni lineari crescenti⁴⁸.

Anche in ambito aleatorio si considera il caso di conseguenze multidimensionali, con particolare interesse per le utilità additive e lessicografiche, peraltro incompatibili tra loro. Delle prime si occupano, alla fine degli Anni Cinquanta, Churchman, Ackoff e Arnoff (1957) [18] e Raiffa e Schlaifer (1961) [77], ma bisognerà aspettare ancora qualche anno, così come per l'utilità lessicografica [35], per una parola definitiva da parte di Fishburn⁴⁹.

Naturalmente anche il modello dell'utilità attesa con probabilità soggettive dà luogo a molteplici sviluppi. Alcuni spunti arricchiscono anche il dibattito sull'utilità di von Neumann e Morgenstern.

Un primo indirizzo di ricerca prende spunto dal lavoro di Ramsey [78]. Nel 1956 Davidson e Suppes propongono un approccio che differisce dalla linea di Ramsey per tre aspetti⁵⁰: "(1) l'insieme di base dei premi e delle loro probabilità è finito; (2) i premi sono ugualmente distanziati rispetto alle utilità e (3) non si richiedono scelte tra un'opzione con un premio certo e un gioco.". Gli Autori proseguono osservando che quest'ultima caratteristica offre, almeno in parte, una soluzione al problema dell'eliminazione dell'utilità specifica della partecipazione al gioco. Segnaliamo infine che alcuni degli Autori che si ispirano a Ramsey, tra i quali Suppes [89] e, più avanti, ancora Fishburn [32], Pfanzagl [72] e Luce e Krantz [53], ottengono la misura di probabilità e di utilità simultaneamente, a differenza di Ramsey che determina per prima la funzione di utilità e di Savage che procede nella direzione contraria. Un modello diverso è proposto nel 1959 da Debreu, il quale presenta un sistema di assiomi che garantisce l'esistenza di una

⁴⁸ In seguito, Fishburn discuterà [38] il caso più generale delle misture di probabilità p su un'algebra di sottinsiemi di X , giungendo alla rappresentazione:

$$u(p) = \int u(x)dp(x)$$

⁴⁹ Fishburn mostra che esiste un'utilità additiva se e solo se valgono un assioma di ordinamento, un opportuno *Sure-Thing Principle*, un assioma archimedeo e l'assioma di indipendenza [30, 31].

⁵⁰ Cfr. [21], p. 264.

funzione di utilità continua sullo spazio $C \times C$, dove C è lo spazio delle conseguenze [23]. Nella stessa direzione lavorano Milnor (1953) [64] e Chernoff (1954) [17].

Una seconda tendenza si rifà alla trattazione di Savage [82]. Si mantengono vicini al lavoro originale Luce e Raiffa (1957) [54], Luce e Suppes (1965) [55], Arrow (1966) [7] e Fishburn (1975) [37]. Nel 1967 Tversky mette in relazione il modello dell'utilità attesa con probabilità soggettive con una particolare classe di matrici dette additive [91].

Varianti della teoria di Savage sono invece fornite, tra gli altri, da Suppes (1956) [89], Stigum (1972) [88], Roberts (1974) [80], Richter (1975) [79] e Narens (1976) [70]. In particolare, Suppes costruisce un modello basato, nello stesso tempo, sull'evento di Ramsey e sulle azioni di Savage.

Una celebre impostazione sostanzialmente diversa è proposta nel 1963 da Anscombe e Aumann, i quali definiscono le probabilità soggettive per un numero finito di stati a partire dalle lotterie [4]. Nell'intenzione degli Autori⁵¹, la costruzione effettuata "si può reinterpretare come un metodo per definire probabilità molto complesse in termini di probabilità elementari." Infine, tra le generalizzazioni del modello di Anscombe e Aumann, ricordiamo il contributo di Ferreira (1972) che considera il caso di infiniti stati del mondo [28] ed alcuni modelli basati su lotterie particolari dovuti a Pratt, Raiffa e Schlaifer (1964, 1965) [75, 76], Fishburn (1969, 1970, 1972, 1975) [33, 34, 36, 37], Balch (1974) [9], Balch e Fishburn (1974) [10] e Myerson (1979) [69].

Infine, segnaliamo due tra i principali modelli di teoria dell'utilità con le probabilità condizionate, modelli che mirano a raggiungere un livello di generalità che ricorda il percorso di Savage: la teoria di Luce e Krantz (1971) [53] e la teoria dei *mono-sets* di Jeffrey (1965, 1978) [48, 49] e di Domotor (1978) [25] secondo la quale, dato l'evento A , $u(A)$ è il rapporto tra una misura con segno di A e la sua misura di probabilità.

Concludiamo con un commento⁵² di Fishburn: le teorie dell'utilità attesa "presentano differenze ed analogie nelle loro nozioni di base,

⁵¹ Cfr. [4], p. 199.

⁵² Cfr. [39], p. 190.

assiomi e teoremi di rappresentazione. Tutte le teorie si servono di una relazione di preferenza \succ o di preferenza-indifferenza \succeq su un insieme di enti, spesso visti come azioni, e parecchie teorie usano più di una di queste rielaborazioni. Ci sono sempre un assioma di ordinamento e una o più di una condizione d'indipendenza [...]. La maggior parte delle teorie si serve anche di un assioma archimedeo che assicura che la funzione di utilità sia a valori reali.”. Ogni teoria va giudicata in base “alla capacità di caratterizzare una vasta gamma di situazioni in un contesto realistico, alla semplicità e al fascino intuitivo degli assiomi di preferenza e all'interpretabilità delle condizioni strutturali ed all'eleganza delle caratteristiche della rappresentazione.”.

7. – Conclusioni

“Un'esplosione si è verificata nei fondamenti della Teoria delle decisioni in condizioni di rischio e di incertezza negli ultimi dieci anni. Le sfide a lungo sopite di Allais (1953) agli assiomi di indipendenza di von Neumann e Morgenstern, di Allais e di Ellsberg (1961) allo *Sure Thing Principle* di Savage (1954) e di May (1954) e di Tversky (1969) alla transitività delle preferenze sono risorte a nuova vita tramite una conferma empirica molto estesa⁵³.”

“[...] l'utilità [di von Neumann e Morgenstern] era arrivata allo stato di una specie di divinità, protetta da preti. Un'opinione non ortodossa fino a poco tempo fa era considerata un sacrilegio [...]. La situazione ora è diversa⁵⁴.”

“Quindici anni fa la teoria della scelta in condizioni di incertezza poteva essere annoverata tra le ‘storie di successo’ dell'analisi economica [...]. Oggi, la scelta in condizioni di incertezza è un campo in movimento: la teoria *standard* è stata sfidata da più parti, dall'interno e dall'esterno del settore economico⁵⁵.”

⁵³ Cfr. [40], p. 825, [1], [27], [82], [63] e [91].

⁵⁴ Cfr. [14], p. 122.

⁵⁵ Cfr. [57], p. 121.

Sono gli *incipit* di tre lavori della seconda metà degli Anni Ottanta di Fishburn, Bernard e Machina, a testimonianza del fatto che le perplessità manifestate, tra gli altri, da Allais al Congresso di Parigi, sembravano destinate a restare inascoltate. E così fu per oltre trent'anni, anche per il rispetto di cui godeva la teoria di von Neumann e Morgenstern. Ma le numerose violazioni sperimentali degli assiomi, le perplessità emerse nel corso degli anni, ben sintetizzate in un famoso lavoro di Kahneman e Tversky del 1979 [51], il testo [3], ancora del 1979, promosso dal gruppo di *Theory and Decision*, il dibattito che abbiamo descritto unitamente alla naturale evoluzione del pensiero hanno lanciato una sfida alla Teoria delle decisioni ed hanno preparato il terreno per i nuovi potenti modelli che saranno sviluppati a partire dalla fine degli Anni Ottanta e che vedranno come caposaldo il famosissimo lavoro di Gilboa e Schmeidler [45].

8. – Appendice

8.1 – L'utilità di von Neumann e Morgenstern

Presentiamo brevemente la teoria dell'utilità di von Neumann e Morgenstern, seguendo il testo originario [93].

Sia U un insieme di entità $u, v, w \dots$. Siano definite in U una relazione $u > v$ ed un'operazione tale che:

$$\forall \alpha, \quad 0 < \alpha < 1 \quad \alpha u + (1 - \alpha)v \in U$$

Si considerino gli assiomi:

VNM1 – La relazione d'ordine $u > v$ è una relazione d'ordine completa per gli elementi di U (e $u < v$ è da intendersi come $v > u$).

VNM2 – Ordine e combinazioni:

$$2.1 - u < v \Rightarrow u < \alpha u + (1 - \alpha)v \quad \forall \alpha \mid 0 < \alpha < 1$$

$$2.2 - u > v \Rightarrow u > \alpha u + (1 - \alpha)v \quad \forall \alpha \mid 0 < \alpha < 1$$

$$2.3 - u < w < v \Rightarrow \exists \alpha, 0 < \alpha < 1 \mid \alpha u + (1 - \alpha)v < w$$

$$2.4 - u > w > v \Rightarrow \exists \alpha, 0 < \alpha < 1 \mid \alpha u + (1 - \alpha)v > w$$

VNM3 – Algebra delle combinazioni:

$$3.1 - \alpha u + (1 - \alpha)v = (1 - \alpha)v + \alpha u \quad \forall \alpha \mid 0 < \alpha < 1$$

$$3.2 - \alpha[\beta u + (1 - \beta)v] + (1 - \alpha)v = \gamma u + (1 - \gamma)v$$

$$\text{con } \gamma = \alpha\beta, 0 < \alpha, \beta, \gamma < 1$$

TEOREMA. – Se valgono gli assiomi VNM1-3 esiste una corrispondenza tra l'insieme U e l'insieme dei numeri reali:

$$u \longrightarrow \rho = V(u)$$

tale che:

i) $u > v \Rightarrow V(u) > V(v)$

ii) $V(\alpha u + (1 - \alpha)v) = \alpha V(u) + (1 - \alpha)V(v)$

iii) la funzione V è unica a meno di trasformazioni lineari crescenti.

La dimostrazione del teorema, contenuta nell'Appendice della seconda edizione [93] del 1947, è molto complessa ed è strutturata in ben ventitré passi.

È opportuna qualche osservazione:

- von Neumann e Morgenstern usano il simbolo $>$ sia per la relazione naturale $u > v$ sugli elementi di U sia per la relazione numerica $V(u) > V(v)$ e la stessa notazione $\alpha \dots + (1 - \alpha) \dots$ sia per la mistura $\alpha u + (1 - \alpha)v$ sia per l'operazione $\alpha V(u) + (1 - \alpha)V(v)$;
- la probabilità di von Neumann e Morgenstern è una frequenza, anche se gli stessi Autori segnalano in una nota che è possibile un'assiomatizzazione congiunta di utilità e probabilità (il che, tra l'altro, fa supporre la loro conoscenza del lavoro di Ramsey [78]);
- ogniqualvolta si considera una mistura tra due elementi u e v di U , gli eventi che corrispondono ad u e a v sono da considerarsi stocasticamente indipendenti.

Così Morgenstern commenterà l'intera costruzione⁵⁶ più di trent'anni dopo: "All'inizio, volevamo semplicemente postulare

⁵⁶ Cfr. [65], p. 810.

un'utilità numerica, ma io feci osservare allora, conoscendo i miei amici economisti, che questo sarebbe stato impossibile da accettare e fuori moda, perché predominava l'analisi con le curve di indifferenza che a nessuno di noi due piaceva. Non ci volle molto a costruire gli assiomi sui quali si fonda la teoria attuale, che ci davano un solido concetto di utilità, l'utilità attesa, numerica, a meno di una trasformazione lineare [...]. La costruzione degli assiomi per la nostra utilità attesa ci riuscì in modo molto naturale."

8.2 – La nota di Malinvaud

Gli assiomi di von Neumann e Morgenstern, osserva Malinvaud, sono scritti in termini di classi di equivalenza $u, v, w \dots$ da intendersi come insiemi di eventi.

Due eventi x_1 e x_2 appartengono alla stessa classe u se e solo se l'individuo è indifferente tra i due ($x_1 \sim x_2$).

Von Neumann e Morgenstern definiscono l'operazione:

$$\alpha u + (1 - \alpha)v = w \in U \quad \forall \alpha \in (0, 1)$$

La teoria che segue ha significato solo se w è a sua volta una classe di equivalenza. Assumerlo per ipotesi, come fanno von Neumann e Morgenstern, implica l'assioma di indipendenza.

Infatti, se w è una classe di equivalenza, deve essere:

$$\alpha x_1 + (1 - \alpha)y \in w \quad \text{e} \quad \alpha x_2 + (1 - \alpha)y \in w$$

$$\forall x_1, x_2 \in u, \forall y \in v$$

Poiché queste relazioni devono valere per ogni u e per ogni v , segue:

$$x_1 \sim x_2 \quad \Rightarrow \quad \alpha x_1 + (1 - \alpha)y \sim \alpha x_2 + (1 - \alpha)y \quad \forall y \in v$$

che è proprio l'assioma di indipendenza, seppure in una forma leggermente diversa da quella vista precedentemente.

8.3 – Sull'avversione al rischio di Friedman e Savage

Sia $u = u(I)$ una funzione di utilità crescente definita sui guadagni certi I . Si considerino la lotteria A che fa vincere I_1 con probabilità α e I_2 con probabilità $1 - \alpha$ e la vincita certa dell'importo I_0 che indicheremo con B . Si ha:

$$u(A) = \alpha u(I_1) + (1 - \alpha)u(I_2) \qquad u(B) = u(I_0)$$

Detto \hat{I} il valore atteso di A , sia $I_0 = \hat{I}$. Se⁵⁷ l'individuo preferisce A a B , ama il rischio e:

$$u(A) > u(\hat{I})$$

Von Neumann e Morgenstern non sembrano ritenere questo punto molto rilevante, ma per Friedman e Savage questa osservazione assolve la teoria, almeno in parte, dall'accusa di non considerare l'amore o l'avversione per il rischio. Infatti tale fenomeno, pur non essendo considerato esplicitamente, sembra ai due Autori ben *rappresentato* dalla differenza $u(A) - u(\hat{I})$. Sia ora I^* il certo equivalente di A , cioè il guadagno certo⁵⁸ tale che $u(A) = u(I^*)$. Se è $I^* > \hat{I}$, il giocatore è propenso al rischio e sarà disposto a pagare fino ad un massimo di $I^* - \hat{I}$ per partecipare al gioco, mentre nel caso contrario si avrà avversione al rischio e la somma $\hat{I} - I^*$ sarà la cifra massima che il giocatore accetterà di pagare per comprare un'assicurazione. Segue infine il celebre percorso per dedurre la funzione di utilità di un individuo tramite esperimenti.

⁵⁷ Osserviamo l'avvenuto cambiamento di prospettiva rispetto all'ottica di Bernoulli: per l'Autore settecentesco il problema consisteva nel trovare il prezzo giusto di un gioco [15], partendo da una funzione di utilità preassegnata. Gli autori moderni si propongono di determinare la funzione di utilità disponendo del prezzo equo, posto uguale al valore atteso del gioco. Cfr. anche [44], p. 261.

⁵⁸ La funzione u è per ipotesi strettamente monotona crescente. Se u è continua, I^* esiste ed è unico.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [1] M. ALLAIS, *Le comportement de l'homme rationnel devant le risque: Critique des postulats et axiomes de l'école américaine*, *Econometrica*, **21** (1953), 503-546.
- [2] M. ALLAIS, *Allais Paradox*, in J. EATWELL, M. MILGATE, P. NEWMANN (a cura di), *The New Palgrave: Utility and Probability*, Macmillan, New York, (1990), 3-9.
- [3] M. ALLAIS, O. HAGEN (a cura di), *Expected Utility Hypotheses and the Allais Paradox*, D. Reidel, Dordrecht, 1979.
- [4] F. J. ANSCOMBE, R. J. AUMANN, *A Definition of Subjective Probability*, *Annals of Mathematical Statistics*, **34** (1963), 199-205.
- [5] G. C. ARCHIBALD, *Utility, Risk and Linearity*, *Journal of Political Economy*, **67** (1959), 437-450.
- [6] W. E. ARMSTRONG, *The determinateness of the Utility Function*, *The Economic Journal*, **49** (1939), 453-467.
- [7] K. J. ARROW, *Alternative Approaches to the Theory of Choice in Risk-Taking Situations*, *Econometrica*, **19** (1951), 404-437.
- [8] K. J. ARROW, *Exposition of the Theory of Choice under Uncertainty*, *Synthese*, **16** (1966), 253-269.
- [9] M. BALCH, *On Recent Developments, in Subjective Expected Utility*, in M. BALCH, D. MC FADDEN, S. WU (a cura di), *Essays on Economic Behavior under Uncertainty*, North Holland, Amsterdam, (1974), 45-54.
- [10] M. BALCH, P. C. FISHBURN, *Subjective Expected Utility for Conditional Primitives, in Subjective Expected Utility*, in M. BALCH, D. MC FADDEN, S. WU (a cura di), *Essays on Economic Behavior under Uncertainty*, North Holland, Amsterdam, (1974), 55-69.
- [11] W. J. BAUMOL, *The Neumann-Morgenstern Utility Index: an Ordinalist View*, *Journal of Political Economy*, **59** (1951), 61-66.
- [12] W. J. BAUMOL, *Economic Theory and Operations Analysis*, Prentice Hall, Engewood Cliff, 1972.
- [13] G. M. BECKER, M. H. DEGROOT, J. MARSCHAK, *An Experimental Study of some Stochastic Models for Wagers*, *Behavioral Science*, **8** (1963), 239-268.
- [14] G. BERNARD, *The Present State of Utility Theory*, in L. DABONI, A. MONTESANO, M. LINES (a cura di), *Recent Developments in the Foundations of Utility and Risk Theory*, R. Reidel, Dordrecht, (1986), 121-132.
- [15] D. BERNOULLI, *Exposition of a New Theory on the Measurement of Risk*, *Econometrica*, **22** (1954), 23-56; I ed.: *Specimen Theoriae Novae de Mensura Sortis*, *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, **5** (1738), 175-192.
- [16] Centre National de la Recherche Scientifique, *Colloque sur les Fondaments et Applications de la Theorie du Risk en Econométrie*, *Colloques Internationaux du C.N.R.S.*, vol. **40**, C.N.R.S., Parigi, 1953.
- [17] H. CHERNOFF, *Rational Selection of Decision Functions*, *Econometrica*, **22** (1954), 422-443.
- [18] C. W. CHURCHMAN, R. L. ACKOFF, E. L. ARNOFF, *Introduction to Operations Research*, John Wiley and Sons, New York, 1957.
- [19] C. H. COOMBS, *Portfolio Theory and the Measurement of Risk*, in M. KAPLAN, S. SCHWARTZ (a cura di), *Human Judgement and Decision Processes*, Academic Press, New York, (1975), 63-86.
- [20] L. DABONI, *On the Axiomatic Treatment of the Utility Theory*, *Metroeconomica*, **36** (1984), 203-209.
- [21] D. DAVIDSON, P. SUPPES, *A Finitistic Axiomatization of Subjective Probability and Utility*, *Econometrica*, **24** (1956), 264-275.

- [22] G. DEBREU, *Theory of value*, John Wiley and Sons, New York, 1959.
- [23] G. DEBREU, *Cardinal Utility for Even-Chance Mixtures of Sure Prospects*, Review of Economic Studies, **26** (1959), 174-177.
- [24] B. DE FINETTI, *Sulla preferibilità*, Giornale degli Economisti, **11** (1952), 685-709.
- [25] Z. DOMOTOR, *Axiomatization of Jeffrey Utilities*, Synthese, **39** (1978), 165-210.
- [26] W. EDWARDS, *The Theory of Decision Making*, Psychological Bulletin, **51** (1954), 380-417.
- [27] D. ELLSBERG, *Risk, Ambiguity and the Savage Axioms*, The Quarterly Journal of Economics, **75** (1961), 643-669.
- [28] P. E. FERREIRA, *On Subjective Probability and expected Utilities*, Annals of Mathematical Statistics, **43** (1972), 928-933.
- [29] L. FESTINGER, *A Theory of Cognitive Dissonance*, Stanford University Press, Stanford, 1957.
- [30] P. C. FISHBURN, *Indipendence in Utility Theory with Whole Products Sets*, Operations Research, **13** (1965), 28-45.
- [31] P. C. FISHBURN, *Additive Utilities with Incomplete Product Sets: Applications to Priorities and Assignments*, Operations Research, **15** (1967), 537-542.
- [32] P. C. FISHBURN, *Preference-Based Definitions of Subjective Probability*, Annals of Mathematical Statistics, **38** (1967), 1605-1617.
- [33] P. C. FISHBURN, *A General Theory of Subjective Probability and Expected Utilities*, Annals of Mathematical Statistics, **40** (1969), 1419-1429.
- [34] P. C. FISHBURN, *Utility Theory for Decision Making*, John Wiley and Sons, New York, 1970.
- [35] P. C. FISHBURN, *A Study of Lexicographic Expected Utility*, Management Science, **17** (1971), 672-678.
- [36] P. C. FISHBURN, *Subjective Expected Utility with Mixture Sets and Boolean Algebras*, Annals of Mathematical Statistics, **43**, (1972), 917-927.
- [37] P. C. FISHBURN, *A Theory of Subjective Expected Utility with Vague Preferences*, Theory and Decision, **6** (1975), 287-310.
- [38] P. C. FISHBURN, *Expected Utility Theories: a Review Note*, in R. HENN, O. MOESCHLIN (a cura di), *Mathematical Economics and Game Theory*, Springer-Verlag, Berlino, (1977), 270-301.
- [39] P. C. FISHBURN, *Subjective Expected Utility: a Review of Normative Theories*, Theory and Decision, **13** (1981), 139-199.
- [40] P. C. FISHBURN, *Reconsiderations in the Foundation of Decisions and Uncertainty*, The Economic Journal, **97** (1987), 825-841.
- [41] M. FRIEDMAN, L. J. SAVAGE, *The Utility Analysis of Choices Involving Risk*, Journal of Political Economy, **56** (1948), 279-304.
- [42] M. FRIEDMAN, L. J. SAVAGE, *The Expected Utility Hypothesis and the Measurability of Utility*, Journal of Political Economy, **60** (1952), 463-474.
- [43] N. GEORGESCU ROEGEN, *Choice, Expectations and Measurability*, The Quarterly Journal of Economics, **68** (1954), 503-534.
- [44] N. GEORGESCU ROEGEN, *Utility*, in D. L. SILLS, R. K. MERTON (a cura di), *International Encyclopedia of Social Sciences*, vol. **16**, Macmillan and the Free Press, Londra, (1968), 236-267.
- [45] I. GILBOA, D. SCHMEIDLER, *Maxmin Expected Utility with Non-Unique Prior*, Journal of Mathematical Economics, **18** (1989), 141-153.
- [46] I. N. HERSTEIN, J. MILNOR, *An Axiomatic Approach to Measurable Utility*, Econometrica, **21** (1953), 291-297.
- [47] B. INGRAO, G. ISRAEL, *La mano invisibile*, Laterza, Bari, 2006.
- [48] R. C. JEFFREY, *The Logic of Decision*, McGraw-Hill, New York, 1965.

- [49] R. C. JEFFREY, *Axiomatizing the Logic of Decisions*, in C. A. HOOKER, J. J. LEACH, E. F. MC CLENNEN (a cura di), *Foundations and Applications of Decision Theory*, D. Reidel, Dordrecht, vol. 1 (1978), 227-231.
- [50] N. E. JENSEN, *An introduction to Bernoullian Utility Theory: I, II*, *The Swedish Journal of Economics*, **69** (1967), 163-183, 229-247.
- [51] D. KAHNEMAN, A. TVERSKY, *Prospect Theory: an Analysis of Decision under Risk*, *Econometrica*, **47** (1979), 263-290.
- [52] R. LEONARD, *Von Neumann, Morgenstern and the Creation of Game Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 2010.
- [53] R. D. LUCE, D. H. KRANTZ, *Conditional Expected Utility*, *Econometrica*, **39** (1971), 253-271.
- [54] R. D. LUCE, H. RAIFFA, *Games and Decisions*, John Wiley and Sons, New York, 1957.
- [55] R. D. LUCE, P. SUPPES, *Preference, Utility and Subjective Probability*, in R. D. LUCE, R. R. Bush, E. Galanter (a cura di), *Handbook of Mathematical Psychology*, vol. 3, John Wiley and Sons, New York, 1965.
- [56] R. D. LUCE, J. W. TUKEY, *Simultaneous Conjoint Measurement: a new Type of Fundamental Measurement*, *Journal of Mathematical Psychology*, **1** (1964), 1-27.
- [57] M. J. MACHINA, *Choice under Uncertainty: Problems solved and unsolved*, *The Journal of Economic Perspectives*, **1** (1987), 121-154.
- [58] E. MALINVAUD, *Note on Von Neumann-Morgenstern's Strong Independence Axiom*, *Econometrica*, **20** (1952), 679.
- [59] H. MARKOWITZ, *The Utility of Wealth*, *Journal of Political Economy*, **60** (1952), 151-158.
- [60] J. MARSCHAK, *Rational Behavior, Uncertain Prospects and Measurable Utility*, *Econometrica*, **18** (1950), 111-141.
- [61] J. MARSCHAK, *Why "Should" Statisticians and Businessmen maximize Moral Expectations?*, *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability 1950*, Berkeley University of California Press, Berkeley, (1951), 493-506.
- [62] J. MARSCHAK, *Utilities, Psychological Values, and Decision Makers*, in [3], (1979), 163-174.
- [63] K. O. MAY, *Intransitivity, Utility and the Aggregation of Preference Patterns*, *Econometrica*, **22** (1954), 1-13.
- [64] J. MILNOR, *Games against Nature*, *Econometrica*, **21** (1953), 49-59.
- [65] O. MORGENSTERN, *The collaboration between O. Morgenstern and J. von Neumann on the Theory of Games*, *Journal of Political Economy*, **14** (1976), 805-816.
- [66] O. MORGENSTERN, *Some Reflections on Utility*, in [3], (1979), 175-183.
- [67] H. MOSKOWITZ, *Who accepts Savage's Axiom?*, *Behavioral Sciences*, **19** (1974), 368-373.
- [68] F. MOSTELLER, P. NOGEE, *An Experimental Measurement of Utility*, *Journal of Political Economy*, **59** (1951), 371-404.
- [69] R. B. MYERSON, *An Axiomatic Derivation of Subjective Probability, Utility and Evaluation Functions*, *Theory and Decision*, **11** (1979), 339-359.
- [70] L. NARENS, *Utility Uncertainty Trade-Offs Structures*, *Journal of Mathematical Psychology*, **13** (1976), 296-322.
- [71] B. PASCAL, *Pensées*, Editions Flammarion, Parigi, 1998; I ed.: Guillaume Desprez, Parigi, 1670.
- [72] J. PFANZAGL, *Subjective Probability derived from the Morgenstern-von Neumann Utility Concept*, in M. Shubik (a cura di), *Essays in Mathematical Economics*, Princeton University Press, Princeton, (1967), 237-251.
- [73] A. C. PIGOU, *Some Remarks on Utility*, *The Economic Journal*, **64** (1903), 665-678.
- [74] J. W. PRATT, *Risk Aversion in the Small and in the Large*, *Econometrica*, **32** (1964), 122-136.
- [75] J. W. PRATT, H. RAIFFA, R. SCHLAIFER, *The Foundations of Decision under Uncertainty: an Elementary Exposition*, *Journal of American Statistical Association*, **59** (1964), 353-375.

- [76] J. W. PRATT, H. RAIFFA, R. SCHLAIFER, *Introduction to Statistical Decision Theory*, McGraw-Hill, New York, 1965.
- [77] H. RAIFFA, R. SCHLAIFER, *Applied Statistical Decision Theory*, Harvard Business School, Boston, 1961.
- [78] F. P. RAMSEY, *Truth and Probability*, in *Philosophical Papers*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990; I ed.: 1931.
- [79] M. K. RICHTER, *Rational Choice and Polynomial Measurement Models*, Journal of Mathematical Psychology, **12** (1975), 99-113.
- [80] F. S. ROBERTS, *Laws of Exchange and Their Applications*, Siam Journal of Applied Mathematics, **26** (1974), 260-284.
- [81] D. H. ROBERTSON, *Utility and All What?*, The Economic Journal, **13** (1954), 58-68.
- [82] L. J. SAVAGE, *The Foundations of Statistics*, Dover Publications, New York, 1972; I ed.: 1954.
- [83] P. A. SAMUELSON, *Probability, Utility and the Independence Axiom*, Econometrica, **20** (1952), 670-678.
- [84] D. SCOTT, P. SUPPES, *Foundational Aspects of Theories of Measurements*, Journal of Symbolic Logic, **23** (1958), 113-128.
- [85] G. L. S. SHACKLE, *Expectations in Economics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1949.
- [86] S. SCHACHTER, M. S. GAZZANIGA (a cura di), *Extending Psychological Frontiers*, Russell Sage Foundation, New York, 1990.
- [87] P. H. J. SCHOEMAKER, *The Expected Utility Model: its Variants, Purposes Evidence and Limitations*, Journal of Economic Literature, **20** (1982), 529-563.
- [88] B. P. STIGUM, *Finite State Space and Expected Utility Maximization*, Econometrica, **40** (1972), 253-259.
- [89] P. SUPPES, *The Role of Subjective Probability and Utility in Decision Making*, Proceedings of the Third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability 1954-1955, vol. 5, Berkeley University of California Press, Berkeley, (1956), 61-73.
- [90] G. TINTNER, *A Contribution to the Non-Static Theory of Choice*, The Quarterly Journal of Economics, **56** (1942), 274-306.
- [91] A. TVERSKY, *Additive Utility and Subjective Probability*, Journal of Mathematical Psychology, **4** (1967), 1-20.
- [92] A. TVERSKY, *Intransitivity of Preferences*, Psychological Review, **76** (1969), 31-48.
- [93] J. VON NEUMANN, O. MORGENSTERN, *The Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, Princeton, 2007, I ed.: 1944; II ed.: 1947.
- [94] A. WALD, *Statistical Decisions Functions*, John Wiley and Sons, New York, 1950.
- [95] H. WOLD, *Ordinal or Cardinal Utility?*, Econometrica, **20** (1952), 661-664.

Gino Favero

Dipartimento di Economia, Università degli Studi di Parma,
Via Kennedy 6/b, Parma
E-mail: gino.favero@unipr.it

Paola Modesti

Dipartimento di Economia, Università degli Studi di Parma,
Via Kennedy 6/b, Parma
E-mail: paola.modesti@unipr.it