# *La Matematica nella Società e nella Cultura*

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Carlo Viola

## Sui contributi di Lagrange all'algebra e alla teoria dei numeri

*La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1*, Vol. **6** (2013), n.2, p. 253–262.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2013_1_6_2_253_0>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2013.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. VI, Agosto 2013, 253-262

# Sui contributi di Lagrange all'algebra e alla teoria dei numeri

CARLO VIOLA

**1.** Giuseppe Luigi Lagrange nacque a Torino il 25 gennaio 1736 e morì a Parigi il 10 aprile 1813; dunque quest'anno ricorre il bicentenario della sua scomparsa. La sua biografia si suddivide in modo naturale in tre periodi. Egli vive a Torino fino all'età di trent'anni; nel 1766 si trasferisce a Berlino accogliendo l'invito a ricoprire il posto di direttore della sezione di matematica dell'Accademia di Scienze e Lettere di quella città, posto reso vacante da Euler che, dopo venticinque anni passati a Berlino, era da poco ritornato all'Accademia delle Scienze di San Pietroburgo. A Berlino Lagrange risiede per ventuno anni, i piú fruttuosi per la sua produzione scientifica, spaziando e lasciando un'impronta indelebile in tutti i rami della matematica. Nel 1787 Lagrange si trasferisce presso l'Accademia delle Scienze di Parigi, città dove rimane fino alla morte e dove redige alcuni celebri trattati in cui sviluppa ed espone in modo sistematico risultati che aveva ottenuto per lo piú durante gli anni berlinesi.

A Berlino, in particolare, Lagrange pubblica fondamentali lavori in algebra e in teoria dei numeri. A parte alcuni notevoli contributi isolati — fra i quali i piú importanti sono la dimostrazione (pubblicata in [6]) del teorema dei quattro quadrati, enunciato ma non dimostrato da Bachet e da Fermat, che afferma che ogni intero positivo è esprimibile come somma di al piú quattro quadrati interi, e la dimostrazione (in [7]) del cosiddetto "teorema di Wilson", che afferma che la congruenza $(n-1)! \equiv -1 \pmod{n}$ è soddisfatta se e solo se l'intero $n > 1$ è un numero primo — nei molteplici risultati di Lagrange in algebra e in teoria dei numeri si può ravvisare una comune motivazione di fondo, e cioè la ricerca delle soluzioni di equazioni algebriche, in varie accezioni:

(i) *Risoluzione di equazioni* $P(x) = 0$, dove $P$ è un polinomio a coefficienti reali, di cui si cercano le radici $x \in \mathbb{C}$, sia per quanto riguarda la ricerca di eventuali formule risolutive per radicali, nel caso in cui l'equazione considerata sia, secondo la terminologia di Lagrange, un'"équation littérale", sia mediante metodi di approssimazione numerica delle radici, nel caso in cui i coefficienti di $P$ siano assegnati numericamente ("équation numérique", vedi [4]);

(ii) *Risoluzione di equazioni diofantee*, specialmente di secondo grado e in due incognite, cioè ricerca di soluzioni $(x, y)$ a coordinate intere o razionali di equazioni $P(x, y) = 0$, con $P$ polinomio a coefficienti interi di secondo grado o, in alcuni casi, di grado maggiore di 2.

La produzione di Lagrange sulle tematiche (i) e (ii) comprende numerosi lavori, tutti risalenti al periodo berlinese, e culmina nelle tre fondamentali memorie [8], [9], [10]. Le memorie [8] e [10] sono le piú celebrate sia dai contemporanei che dai posteri nella produzione di Lagrange, rispettivamente, in algebra e in teoria dei numeri, e sono accomunate dal contenere, per la prima volta nella letteratura matematica, idee che condurranno nei secoli seguenti a nozioni di algebra astratta: in [8] viene condotto uno studio delle permutazioni delle radici in $\mathbb{C}$ di un'equazione di grado $n$

$$P(x) \;=\; c_0x^n + c_1x^{n-1} + \ldots + c_{n-1}x + c_n \;=\; 0 \tag{1}$$

che contiene i prodromi piú significativi alla teoria di Galois e alla dimostrazione del teorema di Ruffini-Abel sull'irrisolubilità per radicali di un'equazione generale di grado $\geq 5$, e da qui apre la strada ai concetti moderni di gruppo e di campo; in [10] Lagrange affronta in modo nuovo il problema della risolubilità di un'equazione diofantea del tipo $ax^2 + bxy + cy^2 = m$ a coefficienti e incognite interi, introducendo l'idea di analizzare non una singola equazione, ma l'insieme delle forme quadratiche binarie

$$f(x, y) \;=\; ax^2 + bxy + cy^2,$$

aventi un assegnato discriminante $D = b^2 - 4ac$ non quadrato, nella loro totalità, basandosi su una nozione di equivalenza che consiste nel definire equivalenti due forme quadratiche $f(x, y)$ e $F(X, Y)$ quando l'una è ottenibile dall'altra con una trasformazione lineare omogenea delle variabili a coefficienti interi e determinante $\pm 1$, ovvero, con terminologia moderna, mediante un automorfismo del gruppo additivo $\mathbb{Z}^2$ rappresentato da un elemento del gruppo GL$(2, \mathbb{Z})$.

La memoria [9] rappresenta la sintesi di vari lavori pubblicati da Lagrange negli anni 1768-73, riguardanti principalmente la teoria aritmetica delle frazioni continue e le applicazioni di questa all'approssimazione diofantea, cioè allo studio dell'approssimabilità di numeri irrazionali mediante razionali aventi numeratore e denominatore di grandezza controllata, e alla risoluzione di equazioni diofantee di secondo grado in due incognite. Il punto di vista di Lagrange sarà parzialmente ripreso da Legendre negli ultimi anni del Settecento; ma in seguito bisognerà attendere la metà dell'Ottocento con Liouville (1851), e il Novecento con Thue (1909) e poi con Siegel, Roth e altri autori, per arrivare a progressi veramente significativi rispetto ai risultati di Lagrange in analisi diofantea (per alcuni cenni sui contributi in questo campo da Liouville in poi, vedi [11]).

È notevole che Lagrange decidesse di pubblicare la memoria [9] come aggiunta all'edizione in francese degli *Elementi di algebra* di Euler, poiché rivela l'importanza e la novità che Lagrange attribuiva ai suoi risultati sulle frazioni continue, e quanto li ritenesse degni di essere confrontati con la produzione euleriana in questo campo.

**2.** In questo e nei successivi paragrafi analizziamo piú in dettaglio i contributi di Lagrange all'algebra e alla teoria dei numeri contenuti nelle memorie [8], [9] e [10]. Nell'introduzione alla memoria [8] Lagrange chiarisce che l'oggetto del lavoro non è l'approssimazione numerica delle radici, reali o complesse, di un'equazione (1) a coefficienti reali assegnati numericamente, ma la possibilità o l'impossibilità di risolvere un'equazione (1) per radicali, e quindi con formule risolutive indipendenti dal valore numerico dei coefficienti. Lagrange cita le formule di Cardano e di altri matematici italiani del Cinquecento per la risoluzione delle equazioni di terzo e quarto grado, e cita anche un metodo dovuto a Tschirnhaus (1683) volto ad eliminare monomi intermedi (cioè di gradi $d$ con $0 < d < n$) nell'equazione (1) di grado $n$, metodo che conduce alla risoluzione di un'equazione di secondo grado se $n = 3$, ma di grado 24 se $n = 5$ (per un'esauriente discussione dei risultati di Lagrange in [8], e di risultati collegati dovuti ad altri autori, si rimanda all'opera [2], vol. I, cap. 2).

Negli stessi anni 1770-71 compaiono, indipendentemente, la memoria [8] di Lagrange e altre due memorie, di Vandermonde e di Waring. In tutti e tre questi lavori si osserva che per $n \leq 4$ esistono polinomi nelle radici $x_1, \ldots, x_n$ dell'equazione (1) che assumono meno di $n!$ valori distinti quando si permutano le radici in tutti i modi possibili, e questa circostanza conduce alla risoluzione per radicali se $n \leq 4$. Sia Lagrange che Vandermonde, riprendendo un'osservazione già fatta da Euler, notano che la formula di Cardano (1545)

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}},$$

che fornisce le radici in $\mathbb{C}$ dell'equazione cubica in forma ridotta

$$x^3 + px + q = 0, \tag{2}$$

introduce apparentemente radici parassite, poiché associando in tutti i modi possibili i tre valori del primo radicale cubico con i tre valori del secondo si ottengono nove valori; ma le radici parassite si eliminano osservando che il prodotto dei due radicali cubici deve essere uguale a $-p/3$ e quindi, fissando uno qualunque dei tre valori del primo radicale cubico, il secondo radicale cubico è univocamente determinato.

Lagrange si spinge molto piú avanti di Vandermonde. Egli mostra che i due radicali cubici nella formula di Cardano sono uguali a

$$\frac{1}{3}(x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3),$$

dove $x_1$, $x_2$, $x_3$ sono le tre radici dell'equazione (2) e $\omega \neq 1$ è una radice cubica dell'unità. Dunque la funzione delle radici

$$(x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3)^3$$

assume soltanto due valori permutando le tre radici nei sei modi possibili. Sviluppando quest'idea Lagrange introduce, per un'equazione qualunque (1) di grado $n$ con radici $x_1, \ldots, x_n$, le cosiddette "risolventi di Lagrange":

$$y_k = \omega_k x_1 + \omega_k^2 x_2 + \ldots + \omega_k^n x_n \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

dove $\omega_1 = 1$, $\omega_2, \ldots, \omega_n$ sono le $n$ radici $n$-esime dell'unità. Lagrange osserva che la conoscenza delle $y_1, \ldots, y_n$ determina le radici $x_1, \ldots, x_n$, che $y_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -c_1/c_0$, e che $y_2, \ldots, y_n$ sono radici di un'equazione di grado $n-1$; ma i coefficienti di quest'ultima equazione sono funzioni razionali di una radice di un'equazione di grado $(n-2)!$ i cui coefficienti sono noti in funzione dei coefficienti $c_0, c_1, \ldots, c_n$ dell'equazione (1). Poiché $(n-2)! < n$ se e solo se $n \leq 4$, le risolventi di Lagrange forniscono un nuovo metodo per la risoluzione per radicali dell'equazione (1) nel caso $n \leq 4$, mentre se $n \geq 5$ inducono a ritenere che la risoluzione per radicali sia impossibile, anche se Lagrange non congettura quest'enunciato in modo esplicito e lascia aperta la possibilità di arrivare ad una risoluzione per radicali seguendo altre vie.

Comunque il risultato piú importante nella memoria [8] è la trattazione di tipo nuovo riguardante le permutazioni delle $n$ radici di un'equazione (1). L'analisi lagrangiana delle permutazioni delle radici condotta in [8] è il contributo piú significativo, antecedente a Galois, alla nascita dei concetti di gruppo e di campo, che saranno in seguito formalizzati, rispettivamente, da Cayley (1854) e da Dedekind (1871), e implica fra l'altro il teorema, comunemente attribuito a Lagrange, che afferma che in ogni gruppo finito l'ordine di un qualunque sottogruppo è un divisore dell'ordine del gruppo.

**3.** Lagrange può essere considerato a buon diritto il fondatore della teoria aritmetica delle frazioni continue e, mediante questa, dell'approssimazione diofantea come ramo autonomo della teoria dei numeri. Nel Seicento e nella prima metà del Settecento i predecessori di Lagrange in questo campo (Brouncker, Huygens, Wallis e soprattutto Euler) ottengono numerosi risultati sulle frazioni continue, ma spesso slegati fra loro e senza una chiara strategia verso le applicazioni. Al contrario Lagrange, nei suoi lavori su questo argomento pubblicati nel quinquennio 1768-73 e culminati nella memoria [9], ne sviluppa una trattazione sistematica rivolta fin dall'inizio alle applicazioni all'analisi diofantea: alla risoluzione di equazioni diofantee di secondo grado in due incognite, ma anche all'approssimazione a numeri algebrici di grado qualsiasi.

Lagrange considera le frazioni continue del tipo

$$\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ldots}} \tag{3}$$

dove $\alpha$ è un numero reale qualsiasi e i quozienti parziali $a_0$, $a_1$, $a_2$, ... sono interi con $a_1, a_2, \ldots \geq 1$, e dove la successione dei quozienti parziali è finita se e solo se $\alpha$ è razionale. Lagrange dimostra le proprietà dei convergenti ad $\alpha$, che egli chiama “fractions principales”:

$$\frac{p_n}{q_n} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_{n-1}}}} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Fra le proprietà dei convergenti vi sono le formule ricorrenti per i numeratori e i denominatori:

$$\begin{cases} p_{n+1} = a_n p_n + p_{n-1} \\ q_{n+1} = a_n q_n + q_{n-1} \end{cases}$$

con le condizioni iniziali

$$p_0 = 1, \;\; p_1 = a_0$$
$$q_0 = 0, \;\; q_1 = 1,$$

la relazione $p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^n$, e le diseguaglianze diofantee fondamentali

$$|q_n\alpha - p_n| \leq |q\alpha - p| \text{ per ogni razionale } p/q \text{ con } 0 < q < q_{n+1}$$

e

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^2} \, .$$

Il piú celebre risultato di Lagrange sulle frazioni continue, dimostrato nel 1769, è la periodicità nello sviluppo in frazione continua degli irrazionali quadratici. Nel lavoro [5] egli dimostra che lo sviluppo (3) è periodico, cioè tale che esistano due interi $m \geq 0$ e $k \geq 1$ per i quali si abbia

$$a_n = a_{n+k} \text{ per ogni } n \geq m,$$

se e solo se $\alpha$ è un irrazionale quadratico, cioè radice di un'equazione $A\alpha^2 + B\alpha + C = 0$ con $A$, $B$, $C$ interi e discriminante $B^2 - 4AC > 0$ e non quadrato. A questo teorema si collega in modo naturale la risoluzione in interi $x, y$ dell'equazione diofantea di Pell $x^2 - ay^2 = 1$, con $a > 0$ intero non quadrato, che Lagrange ottiene per primo in modo completo e rigoroso, e che considera a piú riprese negli anni 1768-73. Lagrange dimostra che l'equazione di Pell ha infinite soluzioni $(x, y)$. Prescindendo dalle soluzioni banali $(\pm 1, 0)$, egli determina completamente le soluzioni, dimostrando che ogni soluzione con $x, y > 0$ è tale che $x/y$ è un convergente nello sviluppo di $\sqrt{a}$ in frazione continua.

Il successo ottenuto con la risoluzione completa dell'equazione di Pell lo spinge a considerarne varie generalizzazioni: in [9] raccoglie molteplici risultati da lui ottenuti in questo campo negli anni precedenti. Utilizzando un metodo di discesa del tipo di Fermat, riconduce la ricerca dei punti razionali su una conica avente equazione a coefficienti interi alla risoluzione in interi $x, y, z$ dell'equazione $Ax^2 + By^2 = z^2$, con $A$ e $B$ interi liberi da quadrati. Nella memoria [9] introduce inoltre un metodo di riduzione di una forma quadratica binaria che sarà poi sistematicamente ripreso in [10]; qui Lagrange collegherà esplicitamente il trattamento delle forme quadratiche binarie indefinite con la teoria delle frazioni continue sviluppata in [9] e in lavori precedenti.

In virtú del citato teorema di Lagrange sulla periodicità dello sviluppo in frazione continua degli irrazionali quadratici, l'algoritmo delle frazioni continue assume particolare importanza nella risoluzione di equazioni diofantee di secondo grado. Sebbene non si conosca, e presumibilmente non esista, nessuna caratteristica di regolarità nello sviluppo in frazione continua dei numeri algebrici di grado maggiore di 2, in [9] Lagrange applica con successo la teoria delle frazioni continue alla determinazione del minimo del valore assoluto di una forma binaria di grado qualsiasi a coefficienti interi in cui le due variabili assumono valori interi positivi.

Un'altra applicazione interessante della teoria delle frazioni continue è ottenuta da Lagrange nella memoria [4]. Questo lavoro è dedicato principalmente allo studio dell'approssimazione numerica delle radici reali di un'equazione (1) di grado $n$ qualsiasi, avente coefficienti reali assegnati numericamente. Supponendo di provare, mediante lo studio dei cambiamenti di segno del polinomio $P$, che fra due interi consecutivi $a_0$ e $a_0 + 1$ cada almeno una radice $x$ dell'equazione (1), Lagrange opera la sostituzione $x = a_0 + 1/x_1$. Ottiene così la nuova equazione di grado $n$ $P_1(x_1) = x_1^n P(a_0 + 1/x_1) = 0$ che dovrà avere almeno una radice $x_1 > 1$. Se si localizza $x_1$ fra due interi consecutivi $a_1$ e $a_1 + 1$, cioè se $a_1 = [x_1]$, con la sostituzione $x_1 = a_1 + 1/x_2$ si ottiene l'equazione di grado $n$ $P_2(x_2) = x_2^n P_1(a_1 + 1/x_2) = 0$ che avrà almeno una radice $x_2 > 1$. Così proseguendo si ottiene lo sviluppo in frazione continua

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \dots}}$$

della radice $x$ di parte intera $a_0$ dell'equazione (1) considerata all'inizio.

Per informazioni piú dettagliate sui risultati di Lagrange nella teoria delle frazioni continue e in approssimazione diofantea si rimanda all'articolo [3]; per una trattazione elementare delle principali nozioni di base in approssimazione diofantea, a partire dai contributi di Lagrange fino ad alcuni risultati recenti, si veda [11].

**4.** Come abbiamo accennato nel paragrafo 1, la memoria [10] introduce idee nuove nella trattazione di equazioni diofantee del tipo

$$f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 = m,$$

con coefficienti $a, b, c$ e incognite $x, y$ interi e con discriminante $D = b^2 - 4ac$ non quadrato, idee che avranno grande risonanza e saranno ampiamente riprese da Legendre nell'*Essai sur la théorie des nombres* (1798), da Gauss nelle *Disquisitiones arithmeticae* (1801), e da Dirichlet nei suoi lavori (1837-40) sull'esistenza di infiniti numeri primi in ogni progressione aritmetica $h$, $h + q$, $h + 2q$, $\dots$ con $h$ e $q$ primi fra loro, e sulla formula per il numero di classi d'equivalenza di forme quadratiche di discriminante assegnato (per l'opera di Dirichlet in questo campo si veda [1], cap. 6). In [10] Lagrange affronta il problema della rappresentabilità di un intero $m$ mediante la forma quadratica $f(x, y)$, cioè della risolubilità in interi $x, y$ dell'equazione $f(x, y) = m$, definendo una relazione d'equivalenza fra forme quadratiche (sebbene l'espressione "forme equivalenti" non sia usata da Lagrange, ma verrà in seguito introdotta da Gauss). Tale relazione consiste nel definire equivalenti due forme quadratiche $f(x, y)$ e $F(X, Y)$ quando $F$ è ottenibile da $f$ con una trasformazione lineare delle variabili del tipo

$$\begin{cases} x = \alpha X + \beta Y \\ y = \gamma X + \delta Y, \end{cases}$$

cioè se $F(X,Y) = f(\alpha X + \beta Y,\ \gamma X + \delta Y)$, con $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ interi tali che $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$, poiché in tal caso l'inversa della precedente trasformazione lineare ha anch'essa coefficienti interi e determinante $\alpha\delta - \beta\gamma$. In altre parole, le forme quadratiche $f$ e $F$ sono equivalenti quando $F$ è ottenibile da $f$ mediante l'azione sul vettore $(X, Y) \in \mathbb{Z}^2$ di un elemento del gruppo $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$; se questo avviene, $f$ e $F$ rappresentano ovviamente gli stessi interi $m$. Lagrange mostra che due forme equivalenti hanno lo stesso discriminante $D$ e si pone il problema inverso, cioè quello di descrivere (e in particolare di contare) le classi d'equivalenza di forme aventi un discriminante $D$ assegnato. Mediante un procedimento che Gauss definirà "di riduzione", Lagrange trasforma una qualsiasi forma $ax^2 + bxy + cy^2$ in una forma equivalente $AX^2 + BXY + CY^2$ ridotta, cioè tale che $|B| \leq \min\{|A|,\ |C|\}$. Dunque ogni classe d'equivalenza di forme con discriminante $D$ contiene una forma ridotta (ma non una sola), ed è facile vedere che le forme ridotte di discriminante $D$ sono in numero finito, e a piú forte ragione sono in numero finito le classi d'equivalenza di forme di discriminante $D$. Il passo successivo nel procedimento di Lagrange, il piú difficile, consiste nell'inventare un algoritmo che gli permetta di eliminare le forme ridotte per così dire superflue, cioè volto a determinare in modo esplicito un insieme di forme ridotte rappresentanti delle classi d'equivalenza cercate, ossia ad associare una ed una sola forma ridotta ad ogni classe d'equivalenza di discriminante $D$. L'algoritmo di Lagrange segue due procedimenti diversi a seconda del segno di $D$. Se $D < 0$, cioè se le forme considerate sono definite, il procedimento di Lagrange è basato sul fatto, da lui dimostrato, che le uniche forme ridotte equivalenti ad una forma ridotta assegnata $F(X,Y) = AX^2 + BXY + CY^2$ di discriminante $D < 0$ sono

$$AX^2 \pm BXY + CY^2 \quad \text{e} \quad CX^2 \pm BXY + AY^2.$$

Se $D > 0$, cioè se le forme sono indefinite, l'algoritmo di Lagrange è piú complicato, ed è riconducibile al metodo di risoluzione dell'equazione di

Pell, da lui utilizzato a piú riprese in lavori precedenti e che coinvolge fra l'altro l'uso delle frazioni continue (si noti che il primo membro $x^2 - ay^2$ dell'equazione di Pell, con $a > 0$ intero non quadrato, è una forma quadratica ridotta indefinita).

Per un'analisi piú esauriente della memoria [10], e in particolare per una descrizione completa dell'algoritmo di Lagrange nel caso di forme quadratiche ridotte indefinite, si rimanda all'opera [12], cap. 4.

## RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] DAVENPORT H., *Multiplicative number theory, second edition*, Springer-Verlag, New York–Heidelberg–Berlin, 1980.

[2] DIEUDONNÉ J., *Abrégé d'histoire des mathématiques, 1700-1900*, Hermann, Paris, 1978.

[3] GIACARDI L., ROERO C. S., VIOLA C., *Sui contributi di Lagrange alla teoria dei numeri*, Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino, vol. 53 (1995), 151-181.

[4] LAGRANGE J. L., *Sur la résolution des équations numériques*, Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin (1769). *Oeuvres de Lagrange*, Gauthier-Villars, Paris, 1867-1892, vol. II, pp. 539-578.

[5] LAGRANGE J. L., *Additions au mémoire sur la résolution des équations numériques*, Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin (1769-70). *Oeuvres de Lagrange*, vol. II, pp. 581-652.

[6] LAGRANGE J. L., *Démonstration d'un théorème d'arithmétique*, Nouveaux mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin (1770). *Oeuvres de Lagrange*, vol. III, pp. 189-201.

[7] LAGRANGE J. L., *Démonstration d'un théorème nouveau concernant les nombres premiers*, Nouveaux mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin (1771). *Oeuvres de Lagrange*, vol. III, pp. 425-438.

[8] LAGRANGE J. L., *Réflexions sur la résolution algébrique des équations*, Nouveaux mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin (1770-71). *Oeuvres de Lagrange*, vol. III, pp. 205-421.

[9] LAGRANGE J. L., *Additions à l'analyse indéterminée*, in EULER L., *Elémens d'Algèbre*, Lyon, vol. II, 1774, pp. 369-664. *Oeuvres de Lagrange*, vol. VII, pp. 5-180.

[10] LAGRANGE J. L., *Recherches d'arithmétique*, Nouveaux mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin (1773-75). *Oeuvres de Lagrange*, vol. III, pp. 695-758.

[11] VIOLA C., *Approssimazione diofantea, frazioni continue e misure d'irrazionalità*, Boll. U.M.I. (8), vol. 7-A (2004), 291-320. *Addendum*, Boll. U.M.I. (8), vol. 8-A (2005), 179-182.

[12] WEIL A., *Number theory. An approach through history from Hammurapi to Legendre*, Birkhäuser, Boston, 1983.

Carlo Viola
Dipartimento di Matematica Università di Pisa
Largo B. Pontecorvo 5, 56127 Pisa
e-mail: viola@dm.unipi.it