La Matematica nella Società e nella Cultura

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Fabio Acerbi

La concezione archimedea degli oggetti matematici

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **6** (2013), n.2, p. 227–252.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2013_1_6_2_227_0>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2013.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. VI, Agosto 2013, 227-252

La concezione archimedea degli oggetti matematici

FABIO ACERBI

Il problema ontologico consiste nello stabilire quali entità esistano, e si pone in maniera particolarmente acuta per gli oggetti astratti. Non è azzardato affermare che il cuore di tutta la filosofia occidentale, da Parmenide in poi, risiede nelle soluzioni proposte al problema ontologico: mutuando la denominazione dal titolo del trattato di Aristotele sull'argomento, è ciò di cui si occupa la 'metafisica'. Possiamo distinguere tre approcci al problema: una posizione metafisica ingenua, una posizione metafisica consapevole, una posizione metafisica operativa. Il primo ed il terzo approccio si manifestano in prese di posizione o azioni che hanno una portata metafisica indubbia ma che non sono presentate come tali da chi le sostiene o effettua né presuppongono una conoscenza approfondita della posizione metafisica implicitamente adottata: insomma, si può essere 'platonisti' (cioè essere definiti tali sulla base di categorie storiografico-epistemiche correnti) senza aver letto una sola riga di Platone. Il secondo approccio presuppone ovviamente un'adesione consapevole alla posizione metafisica adottata. È un dato di fatto che la metafisica ingenua di buona parte dei matematici professionisti contemporanei è di tipo realista: gli enti matematici hanno un'esistenza indipendente e noi 'scopriamo' le loro proprietà.[1]

Le specie e sottospecie di posizioni ontologiche in materia di oggetti matematici sono esplose in numero con l'affermarsi della logica matematica e della filosofia analitica e non è il caso di passarle in rassegna;[2] accenno soltanto a quali orientamenti fossero a disposizione

[1] È ad esempio questa la posizione di A. Connes, espressa in Changeux, Connes 1989.

[2] Una panoramica completa, sintetica, ben redatta e facilmente accessibile è Horsten 2012. Per approfondimenti si veda Shapiro 2005.

nell'antichità greca fino ai tempi di Archimede. Il Pitagorismo sosteneva semplicemente che i numeri sono l'essenza delle cose: il parco ontologico conteneva sostanzialmente solo enti numerici; l'aritmetica aveva ovviamente uno statuto epistemico superiore alla geometria. Platone considerava i *mathemata* (numerici o geometrici) come entità immutabili, effettivamente esistenti ed intermedie tra il mondo sensibile e quello delle idee. L'allievo di Platone Speusippo negava realtà alle idee ma accordava ai *mathemata* un'esistenza separata dalla realtà fisica. Aristotele riteneva che gli enti matematici non avessero un'esistenza indipendente da quella degli oggetti fisici: si trattava di questi stessi oggetti, solo considerati da una prospettiva differente, facendo astrazione da (ma è più corretto dire 'sottraendo') certe loro caratteristiche, come ad esempio l'essere soggetti a mutamento. Gli Stoici, materialisti in linea di principio, accordavano probabilmente agli enti geometrici, così come facevano sicuramente per il tempo, il luogo, il vuoto e i contenuti proposizionali, una forma debole di esistenza. È bene sottolineare che Aristotele è l'unico autore di cui siano pervenuti scritti che presentano in maniera organica la sua posizione quanto allo statuto ontologico degli oggetti matematici: Platone vi accenna soltanto, ed in maniera per niente trasparente, nei propri dialoghi; per lui e per Speusippo, i Pitagorici e gli Stoici dobbiamo accontentarci di testimonianze di seconda mano, che nel caso dei primi tre si riducono nell'essenziale ad Aristotele stesso.[3] Tra l'altro, è lo stesso Aristotele a leggere in una prospettiva metafisica la caratterizzazione del «numero dei matematici» come molteplicità di unità identiche ma discernibili.[4]

[3] Quanto a Platone, si vedano il passo della 'linea divisa' in *Respublica* 509D-511E; la sua affermazione in *Respublica* 527A-B che il linguaggio operativo dei matematici è «sommamente ridicolo e necessario»; *Euthydemus* 290B-C, da cui si può dedurre l'oggettività dei *mathemata*; e infine *Philebus* 55D-57E. Aristotele espone le concezioni propria ed altrui in *Metaphysica* A e M-N; egli pone l'accento sulla questione dell'esistenza degli enti numerici, vuoi perché si trattava di terreno comune a tutti gli orientamenti dottrinari che prende in esame, vuoi perché il problema ontologico si pone ovviamente in maniera più urgente per gli oggetti più astratti.

[4] Si veda la presentazione aristotelica in *Metaphysica* M 6-8. La definizione del numero come «molteplicità composta di unità» è quella canonica per il fatto di essere adottata in *Elementa* VII.def.2.

I matematici greci facevano solo i matematici: nessuno di loro scrisse opere di carattere filosofico, né si hanno echi di prese di posizione esplicite in materia ontologica, cioè riguardanti la forma di esistenza attribuita agli oggetti che figurano nelle dimostrazioni che redigevano.[5] Eppure, i matematici greci avevano a disposizione una risorsa letteraria ideale a questo scopo, che il sistema di comunicazione tramite la stampa ha fatto scomparire: le lettere d'accompagnamento alle proprie opere, che normalmente venivano 'pubblicate' in copia unica ed inviate ad un ben preciso destinatario. Le lettere prefatorie dei trattati redatti in età ellenistica presentano di norma indicazioni sul contenuto dell'opera prefata e sulla sua genesi, esposizione di linee di ricerca passate o future, difesa della scelta di particolari tecniche dimostrative o di struttura deduttiva. Solo gli scritti euclidei sono privi di queste prefazioni, che costituiscono l'adattamento al caso matematico dei proemi che caratterizzano tutta la produzione letteraria greca antica.

Nel caso di Archimede, alcune lettere prefatorie sono parte integrante dell'opera prefata, e si passa senza soluzione di continuità dalle considerazioni introduttive ai principi (definizioni o assunzioni varie) e infine alla catena di dimostrazioni. I destinatari delle opere archimedee sono l'astronomo Dositeo per *Quadr.*, *Sph. cyl.* I-II, *Con. sph.*, *Spir.*, il tiranno di Siracusa Gelone per *Ar.*, Eratostene per *Meth.* Sono prive di lettere prefatorie *Circ.*, *Aequil.* I-II, *Fluit.* I-II, mentre le considerazioni con cui si apre lo *Stomachion* non hanno un destinatario. Ebbene, vedremo nella sezione 2 che, caso unico tra i matematici antichi, in alcune lettere prefatorie Archimede offre informazioni preziose sulla propria concezione degli enti matematici e della natura della pratica dimostrativa. Come vedremo nella sezione 3, le informazioni più importanti vengono però dal modo in cui Archimede manipola gli oggetti geometrici nella sua opera più celebre: il *Metodo*.

[5] Ma Apollonio si occupò di problemi fondazionali: Acerbi 2010b. Occorre tenere a mente che la compartimentazione tra branche del sapere era nell'antichità greca molto più rigida di quanto non lo sia attualmente. L'esempio principe di matematico contemporaneo che abbia espresso, in modo sintetico ma radicale, le proprie convinzioni riguardo alla natura degli oggetti matematici è naturalmente K. Gödel: si vedano Gödel 1944, pp. 137-138, e Gödel 1964, pp. 483-485.

Anche per chiarire le sigle utilizzate nel capoverso precedente, è opportuno elencare i trattati archimedei che ci sono pervenuti, con un breve schizzo del loro contenuto:[6]

Sulla sfera e il cilindro I-II (*Sph. cyl.* I-II): 'quadratura' della superficie laterale di cilindro, cono e tronco di cono; 'cubatura' di rombi conici; 'cubatura' di una sfera e 'quadratura' della sua superficie; 'quadratura' della superficie di segmenti di sfera e 'cubatura' di settori (libro I); 'cubatura' di segmenti di sfera e problemi ad essi relativi (libro II).

Quadratura del cerchio (*Circ.*): 'quadratura' del cerchio e 'rettificazione' della circonferenza; stima del rapporto della circonferenza di un cerchio rispetto al suo diametro.

Sui conoidi e gli sferoidi (*Con. sph.*): proprietà e 'cubatura' di segmenti di ellissoidi, paraboloidi e iperboloidi di rotazione.

Sulle spirali (*Spir.*): proprietà della spirale, con applicazione ad una 'rettificazione' della circonferenza.

Sull'equilibrio dei piani I-II (*Aequil.* I-II): leggi dell'equilibrio; baricentri di parallelogrammi, triangoli, trapezi (libro I), segmenti e segmenti tronchi di parabola (libro II).

Arenario (*Ar.*): stima del numero dei granelli di sabbia contenuti nel cosmo.

Quadratura della parabola (*Quadr.*): quadratura di un segmento di parabola, prima con metodo meccanico (prop. 6-17), poi tramite dimostrazione geometrica (prop. 18-24).

Sui galleggianti I-II (*Fluit.* I-II): leggi idrostatiche elementari; condizioni di galleggiamento di segmenti di sfera (libro I) e di paraboloide (libro II).

Metodo (*Meth.*): si veda la sezione 1.

Stomachion (*Stom.*): geometria di una tassellazione planare (incompleto).

[6] L'indicazione I-II nel titolo significa che l'opera è ripartita in due libri (tra parentesi l'abbreviazione usata per designarla). È indicato con delle virgolette l'abuso di linguaggio legato ai termini 'quadratura' e 'cubatura': nessuna di quelle così segnalate riduce un dominio assegnato di frontiera curvilinea ad uno di frontiera rettilinea; solo quella del segmento di parabola è un'effettiva quadratura.

Prima di entrare nel vivo della discussione, è opportuno presentare in maggiore dettaglio il *Metodo*. Spero che la prospettiva da cui racconto le tecniche che Archimede vi mette in opera possa contribuire a mostrare quanto sia profondamente assurda la storiella che lo vede come un precursore del calcolo integrale.[7] In àmbito storico, esistono le progenie ma non i progenitori.

1. – Il *Metodo* di Archimede[8]

Il *Metodo* è eccezionalmente ricco dal punto di vista filosofico: nella lettera prefatoria troviamo affermazioni che contribuiscono a meglio delineare i contorni della metafisica ingenua espressa altrove da Archimede, mentre le proposizioni presentano tecniche che dispiegano una stupefacente metafisica operativa. È ancora nel *Metodo* che Archimede affronta esplicitamente il problema del rigore di una dimostrazione matematica e dell'euristica ad essa soggiacente, e ritorna sul carattere di pratica condivisa della ricerca matematica.

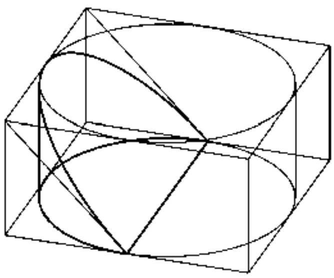
Il *Metodo* è composto da una lettera prefatoria, da alcune assunzioni preliminari sotto forma di enunciati di risultati (non vi compare nessuna definizione), da una serie di proposizioni. Contrariamente a quanto avviene in altri trattati matematici antichi, i teoremi sono in larga misura indipendenti l'uno dall'altro; alcuni di essi sono completati da brevi intermezzi di tipo discorsivo. Queste due caratteristiche inusuali trovano spiegazione nel fatto che Archimede tira nel *Metodo* le fila della propria attività di matematico: si tratta probabilmente dell'ultima sua opera, e sicuramente di un testamento

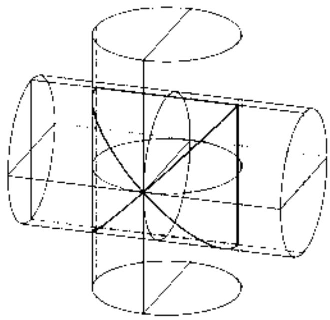
[7] Il vero 'precursore' sarebbe ovviamente il metodo di esaustione, ma tra questo ed il calcolo integrale permane una differenza che li rende incommensurabili: il primo opera soltanto su enti geometrici particolari, il secondo su classi di funzioni, quando non definisce classi di funzioni direttamente sulla base della condizione di integrabilità. Il primo matematico che, all'interno del paradigma antico, definì una classe di figure come dominio di applicabilità di un'operazione (la determinazione del baricentro con una tecnica di chiara matrice archimedea) fu Luca Valerio: Napolitani, Saito 2004. Per le uniche curve definite dai matematici greci come estensione di una proprietà (le linee omeomere) si veda Acerbi 2010a.

[8] Una traduzione commentata del *Metodo* si trova in Archimede 2013.

scientifico. In effetti, nel *Metodo* sono menzionati risultati di *Con. sph.* e di *Aequil.* I, e ripresi alcuni di *Quadr.*, *Sph. cyl.* I e *Con. sph.* Di questi ultimi Archimede afferma che vennero prima esaminati mediante la 'procedura' meccanica la cui illustrazione è appunto lo scopo del *Metodo*, poi dimostrati con tecniche che Archimede colloca nell'ambito delle «dimostrazioni geometriche».

La lettera prefatoria del *Metodo*, indirizzata ad Eratostene, inizia con l'enunciare i risultati che saranno l'argomento delle prop. 12-16: la determinazione del volume di due solidi ottenuti resecando porzioni opportune di un cilindro: l''unghia cilindrica' e la 'volta', il primo il solido ottenuto resecando da un cilindro inscritto in un prisma retto a base quadrata la porzione delimitata da un piano obliquo passante per uno spigolo del prisma e per il diametro ad esso parallelo del cerchio di base del cilindro; il secondo il solido ottenuto come intersezione di due cilindri retti a base circolare i cui assi sono ortogonali tra loro. Archimede fa osservare che si tratta delle prime 'cubature' in senso proprio di tutta la geometria greca: una figura assegnata delimitata in parte da superfici curve è dimostrata uguale ad un solido rettilineo.





Il vero scopo del trattato è però un altro: «esporre in dettaglio per iscritto le peculiarità di una particolare procedura, grazie alla quale, una volta assimilata, sarà agevole prendere le mosse per essere in grado di stabilire qualche risultato matematico in virtù di considerazioni meccaniche». Archimede è inoltre «convinto che essa sia non meno utile in vista della dimostrazione dei risultati stessi». In effetti, alcuni risultati che gli «si erano in un primo momento rivelati per via meccanica sono poi stati [da lui] dimostrati per via geometrica, dato che lo stabilire risultati per mezzo di questa procedura si situa al di fuori di un contesto dimostrativo. È infatti più agevole elaborare una dimostrazione di quanto ricercato una volta che siano poste delle linee guida per mezzo della procedura piuttosto che mettersi a ricercare senza alcuna linea guida». Archimede spiega perché si è risolto a rivelare la propria 'procedura': essa gli ha permesso di fare alcune delle sue scoperte migliori, e merita di essere trasmessa ai posteri, che sapranno farne buon uso. Egli trascrive infine l'enunciato che gli si «rivelò per primo in virtù di considerazioni meccaniche», e che andrà a trattare nella prop. 1.

A corroborare la propria affermazione sulla portata euristica della procedura e sulla necessità di differenziarla da una dimostrazione, Archimede fornisce una precisazione importante dal punto di vista storico: Democrito enunciò per primo due risultati che furono in seguito dimostrati da Eudosso[9] e dichiara che, di questa scoperta, «una parte non piccola del merito andrebbe assegnata a Democrito, che per primo fece quest'asserzione riguardo alla detta figura al di fuori di un contesto dimostrativo».

La lettera prefatoria è seguita senza soluzione di continuità da undici assunzioni preliminari, che troveranno applicazione nel corso del trattato: dieci risultati di teoria dei baricentri e un lemma di teoria delle proporzioni.

I risultati stabiliti nel *Metodo* sono elencati qui sotto (con asterisco quando si limitino all'enunciato). Tra parentesi quadre si trovano i riferimenti alle dimostrazioni rigorose degli stessi enunciati contenute in altre opere; in corsivo tra parentesi tonde le osservazioni aggiuntive di Archimede.[10]

1) segmento di parabola: 4/3 del triangolo inscritto [*Quadr.*];
2) sfera: quadrupla del cono di base un cerchio massimo della sfera e altezza il raggio oppure uguale a 2/3 del cilindro circoscritto

[9] Un cono e una piramide sono un terzo del cilindro e del prisma che hanno rispettivamente la stessa base e altezza uguale; leggiamo attualmente questi risultati in *Elementa* XII.10 e 7 corollario, dimostrati con il 'metodo di esaustione'.

[10] Alcune dimostrazioni sono incomplete; la prop. 16 è del tutto assente nel palinsesto nel suo stato attuale, ma la sua presenza nel codice archimedeo originario è certa e la dimostrazione ricostruibile con sufficiente sicurezza (si veda Saito, Napolitani 2014).

[*Sph. cyl.* I.34 e corollario] (*idea su come determinare la superficie di una sfera per analogia con la relazione superficie/circonferenza del cerchio*);

3) sferoide: 2/3 del cilindro circoscritto oppure quadruplo del cono di base il cerchio massimo dello sferoide e altezza metà dell'asse [*Con. sph.* 27];
4) segmento di paraboloide: 3/2 del cono inscritto [*Con. sph.* 21];
5) baricentro di un segmento di paraboloide secato con un piano ortogonale all'asse: punto che ne divide l'asse, dal vertice verso la base, in rapporto 2/1;
6) baricentro di una semisfera: punto che ne divide il raggio, dal vertice verso la base, in rapporto 5/3 (*stesso per un semisferoide, con il raggio della semisfera sostituito dal semiasse*);
7) segmento di sfera: verifica la proporzione seguente: (segmento): (cono avente stessa base e asse) = (raggio sfera + asse segmento opposto) : (asse segmento opposto) [*Sph. cyl.* II.2 corollario];
8) segmento di sferoide*: *idem*, con il raggio della sfera sostituito da metà dell'asse [*Con. sph.* 29 e 31];
9) baricentro di un segmento di sfera: punto che ne divide l'asse, dal vertice verso la base, nel rapporto seguente: (asse segmento + 4 asse segmento opposto) : (asse segmento + 2 asse segmento opposto);
10) baricentro di un segmento di sferoide*: *idem*;
11) segmento di iperboloide e suo baricentro*: *a*) verifica la proporzione seguente: (segmento) : (cono avente stessa base e asse) = (asse segmento + 3 retta[11] aggiunta all'asse) : (asse segmento + 2 retta aggiunta all'asse) [*Con. sph.* 25]; *b*) punto che ne divide l'asse, dal vertice verso la base, in rapporto (3 asse segmento + 8 retta aggiunta all'asse) : (asse segmento + 4 retta aggiunta all'asse);
12) unghia cilindrica (tramite la bilancia): 1/6 del prisma da cui è ricavata;
13) continuazione di 12;

[11] Qui e ovunque, in conformità con l'uso greco e per evitare ambiguità denotative con i tipi di segmento di cui sarà ripetutamente questione nel séguito, con «retta» si intende ciò che la terminologia geometrica corrente chiama «segmento di retta». La «retta aggiunta all'asse» è quella che congiunge il vertice dell'iperbole e l'intersezione degli asintoti.

14) unghia cilindrica (tramite sezioni piane: argomento esplicitamente infinitario): 1/6 del prisma da cui è ricavata;
15) unghia cilindrica (dimostrazione rigorosa per esaustione): 1/6 del prisma da cui è ricavata;
16) volta: 2/3 del cubo da cui è ricavata.

I risultati solo enunciati lo sono in due casi a buon diritto: le estensioni a segmenti di sferoide dei risultati validi per segmenti di sfera sono – fatta salva l'identificazione della proprietà dell'ellisse che generalizza quella chiave impiegata nel caso del cerchio – immediate, esattamente come lo è il passaggio dalla prop. 2 alla prop. 3: la seconda è un calco della prima, fin nelle lettere denotative; nel palinsesto sono illustrate da due figure identiche che rappresentano una sfera. La determinazione dell'estensione di un segmento di iperboloide e del suo baricentro non sono invece semplici.[12]

2. – La metafisica ingenua di Archimede

Leggiamo dunque i passi in cui Archimede rivela alcuni aspetti della propria metafisica ingenua. L'occasione è fornita, in primo luogo e principalmente, dalla presentazione a Dositeo dei risultati contenuti in *Sph. cyl.* I.[13] Per qualche motivo che ci sfugge, il cuore della prefazione è costituito da una lunga operazione di trinceramento dialettico che inizia con questa frase (sottolineo le espressioni che discuterò): ὕστερον δὲ ἡμῖν <u>ὑποπεσόντων</u> θεωρημάτων ἀξίων λόγου <u>πεπραγματεύμεθα</u> περὶ τὰς ἀποδείξεις αὐτῶν «mi <u>si presentarono</u> in séguito dei risultati degni di nota e <u>mi misi al lavoro</u> sulle loro dimostrazioni». Archimede elenca poi i risultati principali di *Sph. cyl.* I: la superficie di una sfera è quadrupla di un suo cerchio massimo; la superficie di un segmento di sfera è uguale al cerchio che ha come raggio il segmento che va dal vertice del segmento al cerchio che lo delimita sulla superficie della sfera; una sfera è 2/3 del cilindro ad essa circoscritto, e lo stesso per le

[12] Si veda Hayashi 1994.
[13] Heiberg 1910-15, vol. I, pp. 2.6-4.21, da cui sono tratte le citazioni che seguono.

loro superfici (rispettivamente prop. 30, 39-40 e 34 corollario). Segue immediatamente questo commento:

> ταῦτα δὲ τὰ συμπτώματα τῇ φύσει προυπῆρχεν περὶ τὰ εἰρημένα σχήματα, ἠγνοεῖτο δὲ ὑπὸ τῶν πρὸ ἡμῶν περὶ γεωμετρίαν ἀνεστραμμένων οὐδενὸς αὐτῶν ἐπινενοηκότος ὅτι τούτων τῶν σχημάτων ἐστὶν συμμετρία·
> queste proprietà preesistevano per natura nelle dette figure, ma venivano ignorate da quanti si erano dedicati prima di noi alla geometria, nessuno di loro essendosi accorto che sussistono relazioni numeriche semplici[14] tra queste figure;

che dà origine a questa presa di posizione:

> διόπερ οὐκ ἂν ὀκνήσαιμι ἀντιπαραβαλεῖν αὐτὰ πρός τε τὰ τοῖς ἄλλοις γεωμέτραις τεθεωρημένα καὶ πρὸς τὰ δόξαντα πολὺ ὑπερέχειν τῶν ὑπὸ Εὐδόξου περὶ τὰ στερεὰ θεωρηθέντων·
> per questo motivo non esiterei a porli allo stesso livello sia dei risultati stabiliti[15] dagli altri geometri sia dei risultati ritenuti di maggior spicco tra quelli stabiliti da Eudosso riguardo ai solidi:

cui segue l'enunciato di quanto leggiamo attualmente come *Elementa* XII.10 e 7 corollario. Archimede deve ovviamente chiudere l'analogia con il quarto termine e lo fa in questa maniera:

> καὶ γὰρ τούτων προυπαρχόντων φυσικῶς περὶ ταῦτα τὰ σχήματα, πολλῶν πρὸ Εὐδόξου γεγενημένων ἀξίων λόγου γεωμετρῶν συνέβαινεν ὑπὸ πάντων ἀγνοεῖσθαι μηδ' ὑφ' ἑνὸς κατανοηθῆναι.
> sebbene anche queste ‹proprietà› preesistessero naturalmente in queste figure, per quanto molti geometri degni di nota si siano succeduti prima di Eudosso si dà il caso che fossero ignorate da tutti né riconosciute come tali da nessuno.

[14] Il termine συμμετρία va inteso nel senso tecnico di «commensurabilità». La mia traduzione forza leggermente la mano.

[15] Il verbo θεωρέω qui impiegato, dalla cui radice derivano sia il sostantivo greco θεώρημα che, per calco su quest'ultimo, il nostro «teorema», significa semplicemente «vedere con gli occhi della mente»; da qui la mia traduzione. La compartimentazione lessicale tra questo dominio semantico e quello della 'dimostrazione' [verbo (ἀπο)δείκνυμι e lemmi derivati] sarà da Archimede osservata rigidamente nel *Metodo*, in cui si rivela strettamente funzionale agli scopi del trattato.

Archimede chiude con una stoccata a Dositeo:[16]

> ἐξέσται δὲ περὶ τούτων ἐπισκέψασθαι τοῖς δυνησομένοις. ὤφειλε μὲν οὖν Κόνωνος ἔτι ζῶντος ἐκδίδοσθαι ταῦτα· τῆνον γὰρ ὑπολαμβάνομέν που μάλιστα ἂν δύνασθαι κατανοῆσαι ταῦτα καὶ τὴν ἁρμόζουσαν ὑπὲρ αὐτῶν ἀπόφασιν ποιήσασθαι· δοκιμάζοντες δὲ καλῶς ἔχειν μεταδιδόναι τοῖς οἰκείοις τῶν μαθημάτων ἀποστέλλομέν σοι τὰς ἀποδείξεις ἀναγράψαντες, ὑπὲρ ὧν ἐξέσται τοῖς περὶ τὰ μαθήματα ἀναστρεφομένοις ἐπισκέψασθαι.
> chi sarà in grado avrà agio di esaminare questi «risultati». Certo, avrebbero dovuto essere diffusi mentre Conone era ancora in vita – ritengo infatti che *iddu*[17] avrebbe potuto in sommo grado valutarli ed esprimersi adeguatamente su di essi – ritenendo però che sia bene che circolino tra chi ha familiarità con le matematiche, ti comunico per iscritto le dimostrazioni: chi si dedica alle matematiche avrà agio di esaminarle.

La portata epistemica e metafisica di queste affermazioni è indubbia: i risultati «si presentano» al matematico, che solo in séguito «si mette al lavoro» sulla loro dimostrazione. Archimede è colpito dalla semplicità dei propri risultati (che si manifesta nel «sussistere relazioni numeriche semplici» tra le figure da lui studiate), e dal fatto che fossero stati «ignorati dai geometri precedenti»: eppure le proprietà da lui scoperte «preesistevano per natura» nelle figure. La loro importanza è sottolineata da un'analogia (formulata per mezzo di uno stretto parallelismo lessicale e sintattico) con i risultati più importanti ottenuti da Eudosso. Resta il fatto che una valutazione della portata e della correttezza dei risultati è demandata alla comunità di «chi si dedica alle matematiche».

Queste affermazioni sottintendono una metafisica ingenua di stampo prettamente realista quanto allo statuto ontologico degli

[16] Nella lettera prefatoria a *Spir.*, Archimede dichiara esplicitamente che Dositeo viene per ultimo, e che il ritardo nell'invio delle dimostrazioni era dovuto al fatto che erano state esaminate da «coloro che si occupano di matematiche»: Heiberg 1910-15, vol. II, p. 2.6-10.

[17] All'inizio del VI secolo, i due trattati *Sph. cyl.* I-II furono sottoposti ad un lavoro capillare di ripulitura dalle espressioni in dialetto dorico correntemente impiegate da Archimede. L'unico residuo è il pronome personale τῆνον «costui», riferito a Conone. Ho tradotto con l'analogo termine dialettale siciliano *iddu* per rimanere in qualche modo fedele al testo.

oggetti matematici: le proprietà di questi ultimi sono loro inerenti, e ad un livello epistemico il matematico le percepisce con una qualche forma di intuizione (i verbi impiegati sono tutti composti di νοέω). Le tecniche dimostrative sono invece soggette ad una valutazione tra pari: sono pertanto una pratica condivisa. Lo stesso atteggiamento si riscontra nel caso del celebre ‘lemma di Archimede’, che leggiamo, in forme leggermente differenti, nelle prefazioni a *Quadr.*, *Sph. cyl.* I, *Spir.*[18] Nella lettera prefatoria a *Quadr.*, in particolare, Archimede delinea una storia di questo «lemma», strumento necessario per la quadratura rigorosa del segmento di parabola.[19] Certi geometri precedenti avevano quadrato il cerchio e suoi segmenti e (forse: il testo è corrotto) l’ellisse assumendo lemmi inammissibili; per questo motivo la maggior parte dei matematici non avevano riconosciuto come validi i loro risultati. Archimede ne propone uno nuovo, la quadratura di un segmento di parabola appunto, basandosi sul lemma in questione; poiché quest’ultimo era già stato utilizzato dai geometri anteriori per dimostrare risultati fondamentali (e che leggiamo attualmente come *Elementa* XII.2, 18, 7 corollario e 10), e tali risultati venivano considerati altrettanto accettabili di quelli dimostrati senza il lemma, Archimede si dichiara soddisfatto di diffondere un risultato che si pone allo stesso livello di accettabilità. Non solo, dunque, le tecniche dimostrative sono soggette ad una valutazione tra pari, ma anche ciò su cui queste tecniche si innestano: le assunzioni non dimostrate a partire da cui si sviluppa l’argomentazione. Resta il fatto che la valutazione tra pari si basa su una specie di ‘intuizione condivisa’ della plausibilità o addirittura della verità di un asserto: in fin dei conti, anche il ‘lemma di Archimede’ predica una proprietà di certi enti.

[18] In *Sph. cyl.* I il lemma è formulato così: τῶν ἀνίσων γραμμῶν καὶ τῶν ἀνίσων ἐπιφανειῶν καὶ τῶν ἀνίσων στερεῶν τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάσσονος ὑπερέχειν τοιούτῳ, ὃ συντιθέμενον αὐτὸ ἑαυτῷ δυνατόν ἐστιν ὑπερέχειν παντὸς τοῦ προτεθέντος τῶν πρὸς ἄλληλα λεγομένων «delle linee disuguali, delle superfici disuguali e dei solidi disuguali, il maggiore eccede il minore di una ‹grandezza› tale da poter, se sommata a se stessa, eccedere ogni ‹grandezza› prefissata tra quelle in relazione tra loro» (Heiberg 1910-15, vol. I. p. 8.23-27).

[19] Heiberg 1910-15, vol. I, pp. 262.13-264.26.

Indicazioni ulteriori provengono dalla lettera prefatoria del *Metodo* (già citata nella sezione 2):[20]

> καὶ γάρ τινα τῶν πρότερόν μοι φανέντων μηχανικῶς ὕστερον γεωμετρικῶς ἀπεδείχθη διὰ τὸ χωρὶς ἀποδείξεως εἶναι τὴν διὰ τούτου τοῦ τρόπου θεωρίαν· ἑτοιμότερον γάρ ἐστι προλαβόντα διὰ τοῦ τρόπου γνῶσίν τινα τῶν ζητημάτων πορίσασθαι τὴν ἀπόδειξιν μᾶλλον ἢ μηδενὸς ἐγνωσμένου ζητεῖν.
> in effetti, alcuni risultati che mi si erano in un primo momento rivelati per via meccanica sono poi stati da me dimostrati per via geometrica, dato che lo stabilire risultati per mezzo di questa procedura si situa al di fuori di un contesto dimostrativo. È infatti più agevole elaborare una dimostrazione di quanto ricercato una volta che siano poste preliminarmente delle linee guida[21] per mezzo della procedura piuttosto che mettersi a ricercare senza alcuna linea guida.

Ancora una volta, Archimede separa nettamente il contesto della scoperta e quello della dimostrazione; nel corso del primo i risultati «si rivelano» al matematico. Nello stesso senso va l'osservazione posta in coda a *Meth.* 2, in cui Archimede indica dove vada veramente ricercata l'euristica che sta dietro questo risultato:[22]

> τούτου τεθεωρημένου, διότι πᾶσα σφαῖρα τετραπλασία ἐστὶ τοῦ κώνου τοῦ βάσιν μὲν ἔχοντος τὸν μέγιστον κύκλον, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, ἡ ἔννοια ἐγένετο ὅτι πάσης σφαίρας ἡ ἐπιφάνεια τετραπλασία ἐστὶ τοῦ μεγίστου κύκλου τῶν ἐν τῇ σφαίρᾳ· ὑπόληψις γὰρ ἦν καὶ διότι πᾶς κύκλος ἴσος ἐστὶ τριγώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, καὶ διότι πᾶσα σφαῖρα ἴση ἐστὶ κώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας, ὕψος δὲ ἴσον τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας.
> ciò stabilito, dato che ogni sfera è quadrupla del cono che ha come base un cerchio massimo ed altezza uguale al raggio della sfera, mi venne a mente che la superficie di ogni sfera fosse quadrupla di un cerchio massimo di quelli nella sfera – in effetti l'idea era che, come ogni cerchio è uguale al triangolo che ha come base la circonferenza del cerchio ed altezza uguale al raggio del cerchio, anche ogni sfera fosse uguale al cono che ha come base la superficie della sfera ed altezza uguale al raggio della sfera.

[20] Heiberg 1910-15, vol. II, pp. 428.26-430.1.

[21] Le «linee guida» della traduzione rendono il dominio semantico della 'conoscenza' nelle due espressioni γνῶσίν τινα e μηδενὸς ἐγνωσμένου.

[22] Heiberg 1910-15, vol. II, p. 446.4-15.

L'euristica soggiacente a *Meth.* 2 va quindi ricercata nel parallelo tra caso solido e caso piano, non nell'argomentazione meccanica sviluppata nella proposizione stessa (e che analizzeremo in dettaglio tra breve). Quest'ultima argomentazione, in quanto formalizzata ma non ancora 'rigorosa', si pone ad un livello intermedio tra «l'idea» che «viene a mente» e la dimostrazione.

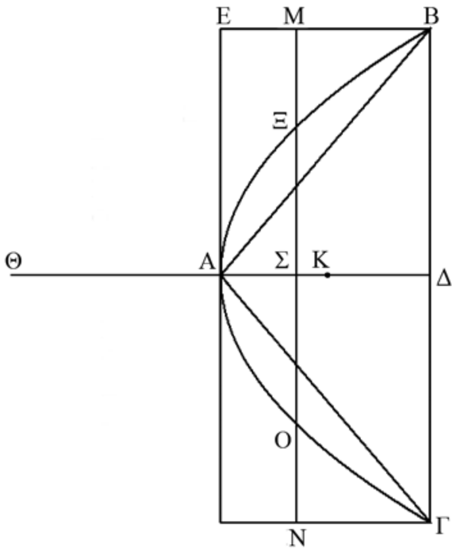
Il verdetto, che traspare piuttosto nettamente dai passi appena letti, di un Archimede realista quanto allo statuto degli enti matematici è però contraddetto in pieno, come andiamo a vedere nella prossima sezione, dalla sua metafisica operativa. Se ce ne fosse bisogno, ciò mostra che si può solo parlare di 'metafisica ingenua' nel caso delle prese di posizione di Archimede.

3. – La metafisica operativa di Archimede: la concezione degli oggetti matematici nel *Metodo*

Il *Metodo* vede all'opera ben tre tecniche matematiche differenti: due di esse, la «procedura» basata sulla bilancia virtuale e il procedimento infinitario della prop. 14, sono dichiarate «meccaniche» e contrapposte alle dimostrazioni «geometriche» da Archimede stesso; la terza consiste in un'applicazione, nella prop. 15, del cosiddetto 'metodo di esaustione': leggiamo dunque, nelle prop. 12-15, tre argomenti differenti che stabiliscono il medesimo risultato.

La procedura meccanica, su cui si concentrerà la nostra attenzione, si articola naturalmente in una serie di unità deduttive autonome. Nel dettaglio essa procede come segue, assumendo come esempio la prop. 4: un segmento retto di paraboloide è 3/2 del cono inscritto.

1) Costruzione della configurazione geometrica: segmento di paraboloide secato con un piano che produce come sezione un segmento di parabola ΑΒΓ di vertice Α, asse ΑΔ e base ΒΓ. Bilancia virtuale associata: braccio ΑΔ che coincide con l'asse del paraboloide, fulcro nel vertice Α, altro braccio ΘΑ uguale all'asse. Cono ΑΒΓ inscritto nel paraboloide e cilindro circoscritto ΒΕΓ. Sezioni da 'pesare', parallele al cerchio di base: nel cilindro un cerchio di diametro ΜΝ, nel segmento di paraboloide un



cerchio di diametro ΞO, generati a partire da una retta MN che seca l'asse del paraboloide in Σ.

2) Deduzione della proporzione fondamentale tra le sezioni. Per la proprietà caratteristica della parabola, e poiché ΔA = AΘ, vale la proporzione ΘA : AΣ :: q(MΣ) : q(ΣΞ). Passando ai diametri e per *Elementa* XII.2, essa si estende ai cerchi sezione: ΘA : AΣ :: c(MN) : c(ΞO). [I segni q(AB) e c(AB) denotano rispettivamente il quadrato e il cerchio su AB.]

3) Equilibrio tra sezioni permanenti e trasferite. Per la legge fondamentale della bilancia virtuale (oggetti geometrici si fanno equilibrio a distanze inversamente proporzionali alle proprie estensioni), la proporzione precedente implica che il cerchio di diametro MN, standosene al proprio posto, è in equilibrio, rispetto al punto A, con il cerchio di diametro ΞO, trasferito e posto sulla bilancia in Θ in modo da essere Θ il suo baricentro.

4) Breve deduzione che si chiude con una proporzione che ripete esattamente, senza che siano fornite informazioni supplementari, quella raggiunta alla fine del punto 2.[23]

5) Estensione tramite dimostrazione potenziale: le considerazioni dei punti 2 e 3 sono estese a qualsiasi sezione del cilindro e del paraboloide prodotta da uno stesso piano.

6) Completamento delle figure e loro equilibrio. Le figure sono 'ricomposte' a partire dalle loro sezioni circolari: il cilindro coincide con quello originario; il segmento di paraboloide non è 'ricostruito' intorno al baricentro Θ, ma vi è trasferito in modo 'disarticolato': i cerchi che lo compongono si sovrappongono l'uno all'altro, in modo che il baricentro

[23] Questo capoverso inutile compare nelle prop. 3-6, e costituisce l'unica pecca deduttiva seria del *Metodo*.

del loro aggregato coincida con quello di ciascuno preso singolarmente, cioè il punto Θ. Poiché le singole sezioni sono in equilibrio, e poiché le figure sono «composte» dalle proprie sezioni, anche le figure originarie sono in equilibrio.

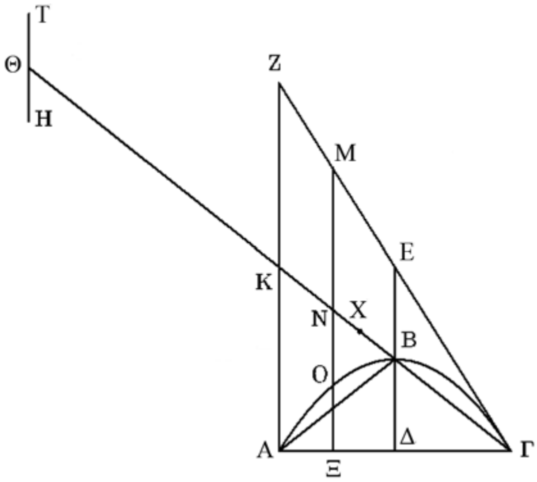
7) Proporzione fondamentale tra le figure e deduzione della proprietà richiesta. Ancora per la legge fondamentale della bilancia virtuale, il baricentro del cilindro essendo il punto medio K di AΔ, la condizione di equilibrio implica la proporzione ΘA : AK :: (cilindro) : (segmento di paraboloide). Ma ΘA = 2AK; il cilindro, che è triplo del cono, è quindi doppio del segmento di paraboloide. Il segmento di paraboloide è pertanto 3/2 del cono.

Vediamo con ordine le caratteristiche salienti, nella nostra prospettiva, della «procedura» archimedea; essa non ha semplicemente una connotazione «meccanica», dovuta alla presenza della bilancia virtuale: il modo in cui le figure sono manipolate pertiene al dominio geometrico e comporta una presa di posizione quanto alla loro 'natura'.

a) *La posizione della bilancia.* Un solido di rotazione come il segmento di paraboloide della prop. 4 ammette una direzione di pesatura 'naturale': il giogo della bilancia virtuale si sovrappone al suo asse. Per solidi che non siano di rotazione come l'unghia, o per figure piane come il segmento di parabola nella prop. 1 del *Metodo*, la simmetria rotazionale è rotta e una collocazione opportuna della bilancia è essenziale per poter applicare la procedura. Vediamo in questo secondo caso come ciò avviene.[24]

La quadratura di un segmento di parabola ABΓ di diametro BΔ e base AΓ prevede l'uso di una bilancia virtuale di fulcro K e bracci uguali ΘK e KΓ, dove KΓ è la mediana relativa a AZ del triangolo AZΓ. Questo triangolo è costruito tracciando, rispettivamente dagli estremi A, Γ della base del segmento di parabola, la parallela al suo diametro e la tangente; esse si incontrano in un punto Z. Si può dimostrare (si vedano *Quadr.* 1-2)

[24] Nel caso dell'unghia, il giogo della bilancia introdotta da Archimede è contenuto nel suo piano di simmetria e passa per il centro del prisma da cui è ricavata. Una scelta più accorta, ma per niente 'naturale', avrebbe permesso di semplificare notevolmente l'argomento: si veda Saito, Napolitani 2014.



che la mediana ΚΓ passa anche per il vertice Β della parabola. Archimede traccia poi una sezione lineare ΜΞ del triangolo parallela all'asse ΒΔ della parabola – cui corrisponde una sezione ΟΞ del segmento di parabola – e dimostra che ΘΚ : ΚΝ :: ΜΗ : ΟΞ. Di conseguenza, per la legge fondamentale della bilancia virtuale, la sezione ΜΞ, restando al proprio posto e quindi intorno al proprio baricentro Ν, è in equilibrio con ΟΞ, trasferita sul baricentro Θ sotto forma del segmento ΤΗ. La condizione di equilibrio resta valida per qualsiasi sezione analoga a ΜΞ, come ad esempio ΕΒΔ qui raffigurata, e di conseguenza anche per le figure originarie: il triangolo ΑΖΓ è in equilibrio, restando al proprio posto e quindi intorno al proprio baricentro Χ, con il segmento di parabola ΑΒΓ trasferito sul baricentro Θ. Il rapporto tra le due figure è pertanto identico a quello dei segmenti ΘΚ e ΚΧ, a sua volta identico a 3/1 in quanto ΘΚ = ΚΓ e Χ è il baricentro del triangolo. Ne risulta che il segmento di parabola ΑΒΓ è 1/3 del triangolo ΑΖΓ. Come corollario otteniamo anche che il segmento di parabola ΑΒΓ è 4/3 del triangolo ΑΒΓ.

Ora, probabilmente per Euclide[25] e quasi sicuramente per Archimede (si veda *Quadr.* 6, ma il testo è parzialmente corrotto), il giogo di una bilancia deve essere orizzontale. Poiché il segmento di parabola è dato, la figura relativa alla procedura nella prop. 1 deve necessariamente essere 'vista dall'alto'. Si noti inoltre che il braccio della bilancia non è in questo caso collocato in modo da sovrapporsi all'asse: e in effetti la procedura si applica ad ogni segmento di parabola, non solo a quelli la

[25] Se ad Euclide va assegnato il breve scritto sulla bilancia che leggiamo soltanto in traduzione araba (Euclide 2007, pp. 2455-2484); sulla collocazione orizzontale del giogo della bilancia si veda *passim* in questo trattato, ed in particolare l'assioma 1.

cui base sia perpendicolare all'asse. Quest'ultimo perde quindi, contestualmente alla perdita di simmetria nel segmento generico di parabola, il suo statuto di retta ad esso 'naturalmente' associata,[26] a vantaggio della congiungente uno degli estremi della base e il vertice del segmento (che non coincide necessariamente con quello della parabola). Si noti infine che le sezioni lineari del segmento non sono perpendicolari al giogo della bilancia, come invece accade ovviamente nel caso di solidi di rotazione, e come accade anche nel caso dell'unghia.

Per come e dove 'appendere' le sezioni lineari ai bracci della bilancia si veda il punto d) qui sotto.

b) *Le sezioni*. La procedura di 'pesatura' opera su sezioni delle figure originali non omogenee ad esse ed invariabilmente di dimensione inferiore: sezioni piane nel caso dei solidi, lineari nel caso dei domini piani. Archimede afferma esplicitamente che le figure di partenza sono «composte» da tutte le loro sezioni. Un ente geometrico è quindi 'fatto' di enti di dimensione inferiore. Anche la cubatura infinitaria dell'unghia cilindrica messa in opera nella prop. 14 si avvale di sezioni, ma il carattere 'statico' di questo tipo di argomentazione (nessuna delle figure sezionate in questa proposizione è trasferita o ridotta ad un agglomerato bidimensionale delle proprie sezioni) fa sì che la questione ontologica si ponga in maniera meno urgente.

c) *La 'disarticolazione'*. Una delle figure 'decomposte' in sezioni rimane sul posto insieme con tutte le sue sezioni (si tratta dunque di una sorta di 'decomposizione virtuale', riassorbita nel corso dell'argomentazione), mentre l'altra viene «trasferita» sull'altro braccio della bilancia. Il problema è come avviene questo trasferimento: il segmento di paraboloide della prop. 4 non è 'ricostruito' intorno al baricentro Θ, ma vi è trasferito in modo 'disarticolato': i cerchi che lo compongono si sovrappongono l'uno all'altro, in modo che il baricentro del loro aggregato coincida con quello di ciascuno preso singolarmente, cioè il

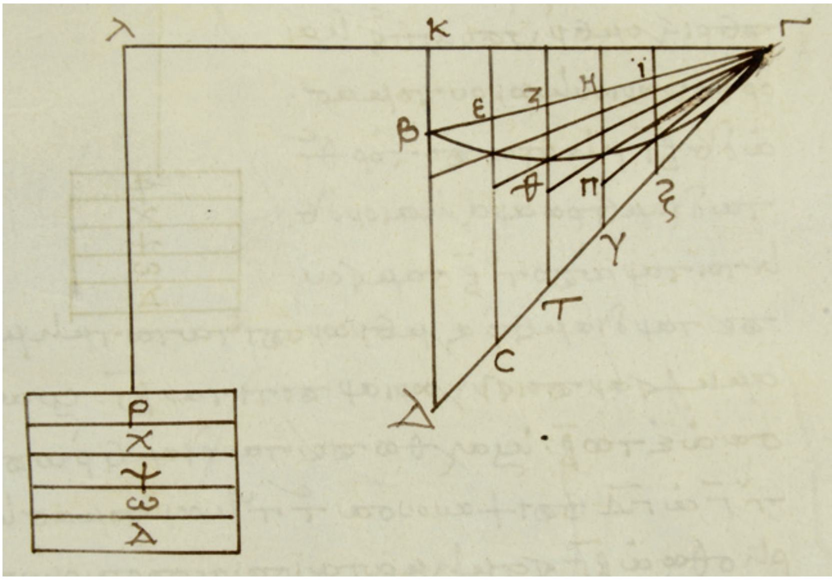
[26] Nel caso di segmento generico, la retta che corrisponde all'asse è il cosiddetto «diametro», cioè la retta che biseca tutte le rette con estremi sul segmento di parabola ed interne ad esso; il diametro risulta parallelo all'asse e passa ovviamente per il vertice del segmento.

punto Θ. Ciò che fa da contrappeso sulla bilancia virtuale non è quindi in nessun caso una figura geometrica (nel caso della prop. 4, essa coinciderebbe con un cerchio uguale alla base del paraboloide), né *a fortiori* quella smembrata, ma un artefatto generato dalla procedura e necessario al suo compimento. Dal punto di vista matematico, il ricorso alla 'disarticolazione' della figura serve a neutralizzare il problema della determinazione del suo baricentro, passo che si renderebbe necessario se essa fosse ricomposta sull'estremo della bilancia nella sua forma originaria e che finirebbe per innescare un circolo vizioso;[27] a tutti gli effetti, dunque, la figura trasferita è concentrata nel proprio baricentro.

d) *La ricomposizione delle figure 'disarticolate'*. Il problema della 'disarticolazione' non si presenta in *Quadr.*, dove la quadratura di un segmento di parabola è effettuata per mezzo di due tecniche. Dopo alcuni risultati elementari di teoria delle sezioni coniche (prop. 1-5), in parte semplicemente enunciati, prima viene presentata una lunga argomentazione meccanica (prop. 6-15) che fa da base ad un'applicazione rigorosa del metodo di esaustione (prop. 16-17), poi una dimostrazione geometrica (prop. 18-24); quest'ultima non è un calco di quella che precede, come invece sarebbe stato possibile. L'argomentazione meccanica delle prop. 6-15 pone su una 'bilancia virtuale' triangoli e trapezi di cui si compongono opportune figure inscritte e circoscritte al segmento; ciò permette di stimare l'estensione del dominio parabolico con precisione arbitraria.[28] I domìni piani che fanno 'contrappeso' non provengono dalla decomposizione di una figura e sono appesi 'uno sotto l'altro' ad uno degli estremi della bilancia, come mostrano i diagrammi nei manoscritti (Archimede è esplicito su questo punto: in tutte le proposizioni afferma che le figure geometriche vanno «appese» alla bilancia).

[27] La procedura archimedea si applica indifferentemente alla determinazione di estensioni di figure e dei loro baricentri, i due risultati essendo mutuamente incondimostrabili. Le prop. 4-5 e 7, 9 mostrano che sono richieste solo piccole modifiche per trasformare un argomento nell'altro; l'ordine scelto da Archimede richiede il primo risultato per dimostrare il secondo.

[28] Si tratta di una variazione ingegnosa sul tema del metodo di esaustione, ma tale maniera di procedere è dichiarata, nella lettera prefatoria a quest'opera, non rigorosa, «meccanica», e contrapposta a quella geometrica.



Il diagramma associato a *Quadr*. 15 nel manoscritto
Firenze, Biblioteca Medicea Laurenziana, Ms. *Plut*. 28.4, c. 116*v*.

In effetti, il piano per un punto di un braccio della bilancia ortogonale al piano dell'orizzonte, ed in particolare la retta passante per quel punto e ortogonale al secondo piano, identificano il luogo di indifferenza rispetto all'operazione di 'appendere' enti geometrici alla bilancia in quel punto. Si tratta di uno degli assiomi che leggiamo nel breve scritto euclideo sulla bilancia:[29]

> Quando due pesi uguali o disuguali sono applicati alle due estremità di un giogo, questo essendo sospeso ad un albero di bilancia, in uno dei suoi punti, in modo che i due pesi mantengano il giogo parallelo all'orizzonte; e uno dei due pesi è poi lasciato al suo posto all'estremità del giogo; e si conduca dall'altra estremità del giogo una retta comprendente con questo un angolo retto, da quale parte si vorrà; e si sospenda l'altro peso ad un punto qualunque di questa retta: il giogo sarà parallelo al piano dell'orizzonte, come in precedenza.

[29] Euclide 2007, p. 2471.

Alla luce dell'argomentazione in *Quadr.* appena esposta, potremmo pensare che, sia nel caso del segmento di parabola sia nel caso dei solidi di rotazione, Archimede commetta nel *Metodo* un sistematico abuso di linguaggio, ed intenda ricomporre effettivamente le figure di partenza; insomma, potremmo immaginare il segmento di paraboloide della prop. 4 appeso a mo' di paralume al punto Θ (si noti che nel diagramma non c'è appeso niente), ovvero, nella figura 'vista dall'alto' della prop. 1, la retta TH a rappresentare il segmento di parabola visto di scorcio.

Questa scappatoia interpretativa non sta in piedi per almeno due motivi.

Primo, Archimede si esprime in termini del tutto espliciti, e anzi gioca piuttosto sporco con questa storia della 'disarticolazione'. Egli utilizza verbi come «completare», «riempire» riferiti sia alla ricomposizione 'effettiva' delle figure che se ne restano ferme sia alle figure trasferite in modo 'disarticolato'. Se questi termini riferiti alle prime figure possono legittimamente essere riconosciuti come il risultato del fissarsi su base stipulativa di una terminologia matematica coerente, lo stesso lessico applicato alle seconde è nella migliore delle ipotesi fuorviante. Delle due l'una: o il senso è appropriato per la prima classe di figure o lo è per la seconda, con l'aggravante che le figure nella seconda sono dette essere «trasferite e poste sulla bilancia» in quanto tali, non in quanto agglomerato delle proprie sezioni.

Secondo, si pone il problema di come ricomporre le figure. Se per i solidi di rotazione è 'sufficiente' (cioè trascurando il problema di immaginare un procedimento che selezioni una per una le sezioni 'immediatamente successive') allineare i centri dei cerchi sezione (che coincidono accidentalmente con i loro baricentri), per figure non simmetriche come l'unghia o il segmento di parabola non c'è alternativa a fornire istruzioni per come disporre le sezioni attorno alla linea dei propri baricentri – che però, nel secondo caso, non è una retta.[30]

[30] Nel caso dell'unghia la linea dei baricentri delle sezioni rettangolari impiegate da Archimede è la mediana relativa al cateto 'verticale' del triangolo rettangolo sezione massimale dell'unghia stessa (tale triangolo è ovviamente staccato nell'unghia dal piano di simmetria di quest'ultima).

Nel caso dei solidi di rotazione, la ricomposizione della figura trasferita può in realtà essere meglio apparentata ad una sorta di proiezione (che conserva il 'contenuto') sulla sezione massimale.[31] Proiezioni che abbassano di un'unità le dimensioni degli enti da trattare sono comunissime nella matematica greca, e costituiscono in effetti il campo d'applicazione più comune della teoria delle proporzioni: permettere il passaggio da un rapporto di domìni ad uno di segmenti è lo scopo di risultati fondamentali come *Elementa* VI.1 (rettangoli con la stessa altezza sono tra loro come le basi) e rende ragione della formulazione delle proprietà caratteristiche delle sezioni coniche (cfr. Apollonio, *Conica* I.11-13). Anche la proporzione alla base della procedura del *Metodo*, cioè quella che formula la condizione di equilibrio, può essere letta in questa prospettiva.[32]

e) *Moltiplicazione delle figure*. La 'disarticolazione' permette ad Archimede di manipolare liberamente le proprie figure: quelle trasferite sono di norma parti di quelle che restano sul posto; certe figure sono 'moltiplicate' prima di essere pesate, e una di esse resta in loco ed è *anche* spostata (prop. 6 e 9). Questa 'moltiplicazione' delle figure non ha niente di miracoloso: Archimede non può far altro che innestare la parte meccanica della sua procedura sulla proporzione fondamentale tra le sezioni che riesce ad ottenere nel punto 2) dello schema esposto sopra. Se, come avviene nelle prop. 6 e 9 (ed adattando le lettere denotative a quelle della prop. 4), egli ottiene $\Theta A : A\Sigma :: [c(MN) + c(\Xi O)] : c(\Xi O)$ invece di $\Theta A : A\Sigma :: c(MN) : c(\Xi O)$, non gli resta che duplicare il cerchio $c(\Xi O)$ e lasciarne uno sul posto e l'altro trasferirlo disarticolato sull'estremo libero della bilancia.

[31] Lo stesso vale per il segmento di parabola. L'unghia ammetterebbe una sezione massimale se queste fossero praticate parallele al giogo della bilancia e perpendicolari al piano che reseca il semicilindro. Le sezioni che Archimede impega sono invece ottenute con un piano parallelo a quello che reseca il semicilindro e danno luogo a due rette estremali sghembe, interpolate da un continuo di rettangoli che in modo controvariante si accorciano in una dimensione e si allungano nell'altra.

[32] Per l'impiego di proiezioni in Archimede, *Quadr.* 4-5, e nella tradizione di geometria degli specchi ustori che dipende da questo risultato, si veda la discussione in Acerbi 2011.

Il problema delle figure disarticolate non si presenta necessariamente quando esse siano decomposte in sezioni; Archimede potrebbe benissimo far compenetrare i pezzi di una decomposizione in figure omogenee a quella di partenza, ed in effetti è quello che fa nella prop. 9 del *Metodo*: due cilindri M e N sono posti sullo stesso baricentro e la loro somma MN è ancora denominata «cilindro». Ovviamente, il diagramma non può rappresentare questo stato di cose, e li mostra affiancati. È importante osservare che i problemi di accorpamento (legati alla disarticolazione delle figure o alla compenetrazione dei cilindri appena menzionata) e scorporamento (legati alla moltiplicazione delle figure) sono tenuti sempre separati nell'esposizione archimedea.

f) *Altre manipolazioni di figure nella geometria greca*. Le manipolazioni di figure nella geometria greca non codificate nei primi tre postulati degli *Elementi* consistono, se facciamo astrazione dal *Metodo* ma includiamo la tradizione metrologica, nel trasporto di oggetti e in operazioni di *cut-and-paste*. Alla prima famiglia appartengono proposizioni di base come il trasporto di un segmento o di un angolo (*Elementa* I.2-3 e I.23). Alla seconda appartengono i fondamentali teoremi di equivalenza dei domìni rettilinei piani e i problemi di applicazione parabolica delle aree (*Elementa* I.35-45), così come la combinatoria di domìni che sta alla base di tutti i teoremi di *Elementa* II. La tecnica del *cut-and-paste* opera sempre con sottodomìni omogenei tra loro e a quelli di partenza, i primi generati tramite costruzioni elementari di sezione, i secondi in realtà forniti come attualmente già divisi: in questo gioco, le sezioni di dimensione inferiore sono attualizzate soltanto per fungere da frontiera tra i domìni omogenei, e non entrano mai direttamente nella dimostrazione.[33] Alla stessa categoria di manipolazioni 'innocue' vanno

[33] Lo stesso vale per le costruzioni ausiliarie: per come sono formulate e poi riprese nel corso della proposizione, si riducono ad assunzioni prive di valore di verità, 'scaricate' (nel senso tecnico che il termine ha attualmente in logica) ad un certo punto della dimostrazione; se vogliamo, è come se le impalcature di enti matematici ausiliari fossero 'smontate' a fine proposizione; tali enti non sussistono al di fuori della finzione argomentativa. Resta il problema dello statuto delle figure 'con appendici ausiliarie' sin dall'enunciato, come il triangolo-con-un-lato-prolungato di *Elementa* I.16 e 32.

ricondotte certe operazioni nel *Metodo*, come la sottrazione di due coni dall'uguaglianza 'tre coni = due coni identici ai primi + due sfere' per ottenere che un cono è uguale a due sfere, oppure il funambolico passaggio in cui Archimede, dai due membri della relazione di equilibrio tra una semisfera ed un cono che restano sul posto e lo stesso cono trasferito e posto sulla bilancia all'altro estremo Θ [si veda il punto e) qui sopra], 'sottrae' rispettivamente il cono che se ne sta fermo e i 3/8 di quello trasferito (che ha dimostrato essere in equilibrio), così da ottenere un nuovo equilibrio tra la semisfera e i 5/8 residui del cono trasferito (prop. 6).

g) *Una concezione 'proto-cantoriana'?* Se dunque le lettere prefatorie accreditavano ad Archimede una visione di tipo realista (le proprietà ineriscono agli oggetti «per natura»), le manipolazioni che egli mette in opera nel *Metodo* ne fanno un antiplatonico radicale. In tutta la matematica greca non c'è niente di meno immutabile degli enti matematici del *Metodo*, e questo in senso forte. Occorre infatti differenziare nettamente le manipolazioni destrutturanti archimedee e la pratica operativa, costruttiva e *cut-and-paste*, cui ho accennato nel paragrafo precedente e che caratterizza la geometria greca 'normale': quest'ultima pratica non incide sulla natura degli oggetti (e quindi non entra in conflitto con una possibile loro concezione platonica) ma pertiene soltanto all'atteggiamento conoscitivo del matematico (ed è infatti ritenuta «necessaria» anche dallo stesso Platone): non è una dichiarazione di impegno ontologico, ma un presa di posizione stilistica.[34]

Bisogna però resistere alla tentazione di assegnare ad Archimede una concezione pseudo- o, peggio, proto-cantoriana: se domini solidi e

[34] Come accennato nella nota 3, Platone dichiara in *Respublica* 527A-B che il linguaggio dei matematici è «sommamente ridicolo e necessario», in quanto «essi formulano tutti i propri argomenti come se stessero facendo qualcosa ed in vista di un'attività e dicono 'quadrare', 'applicare' e 'sommare'». Per quanto Platone consideri questo linguaggio «necessario», la sua descrizione non corrisponde allo stile matematico greco che, va sottolineato, leggiamo in opere ben posteriori: sono gli oggetti geometrici a 'subire' le operazioni, formulate in una maniera completamente impersonale; le costruzioni sono presentate come 'già pronte all'uso'. Tutto ciò permette al matematico operante di 'scomparire' dietro la propria dimostrazione.

piani sono «composti» rispettivamente di sezioni piane e rette, queste ultime costituiscono un limite invalicabile, in quanto una linea non è composta dai propri punti.[35] Non abbiamo insomma alcun diritto di ritenere che le manipolazioni archimedee si fondino su di un'intuizione del 'contenuto in punti' di un qualsiasi dominio geometrico regolare che sia riconducibile ad un'unica cardinalità, di modo che il dominio sia in grado di riprodurre senza 'svuotarsi' un numero arbitrariamente alto di copie di se stesso – oppure di restare invariato per trasformazioni come il sezionamento seguito dalla riaggregazione in un ente di dimensione inferiore. Stessa cautela dimostrarono i geometri greci nelle costruzioni geometriche punto per punto di curve particolari. Ne fa impiego Diocle per generare la curva (oggi nota come «cissoide») con cui risolve il problema della duplicazione del cubo, oppure per identificare la parabola come la curva che gode della proprietà fuoco-direttrice. Dato che solo un numero finito di punti può essere generato in questo modo, non è chiaro quale sia lo statuto ontologico della prima curva di Diocle, non definita per altra via: ed in effetti egli suggerisce cautamente di congiungere i punti per mezzo di segmenti rettilinei.

BIBLIOGRAFIA

F. ACERBI (2010a), Homeomeric Lines in Greek Mathematics, *Science in Context* 23, pp. 1-37.

F. ACERBI (2010b), Two Approaches to Foundations in Greek Mathematics: Apollonius and Geminus, *Science in Context* 23, pp. 151-186.

F. ACERBI (2011), The Geometry of Burning Mirrors in Greek Antiquity. Analysis, Heuristic, Projections, Lemmatic Fragmentation, *Archive for History of Exact Sciences* 65, pp. 471-497.

Archimede (2013), *Metodo. Nel laboratorio del genio*, a cura di F. Acerbi, C. Fontanari, M. Guardini, Torino, Bollati Boringhieri.

J.-P. CHANGEUX, A. CONNES (1989), *Matière à pensée*, Paris, Odile Jacob (trad. it. *Pensiero e materia*, Torino, Bollati Boringhieri 1991).

Euclide (2007), *Tutte le Opere*, a cura di F. Acerbi, Milano, Bompiani.

K. GÖDEL (1944), Russell's Mathematical Logic, in P.A. Schilpp (ed.), *The Philosophy of Bertrand Russell*, Evanston-Chicago, Northwestern University, pp. 123-153.

K. GÖDEL (1964), What is Cantor's Continuum Hypothesis?, in P. Benacerraf, H. Putnam

[35] La concezione greca di 'luogo geometrico' è indicativa: sulla questione si veda Euclide 2007, pp. 464-467.

(edd.), *Philosophy of mathematics. Selected readings*, Cambridge, Cambridge University Press, pp. 470-485.

E. HAYASHI (1994), A Reconstruction of the Proof of Proposition 11 in Archimedes's *Method*: Proofs about the Volume and Center of the Gravity of Any Segment of an Obtuse-angled Conoid, *Historia Scientiarum* 3-3, pp. 215-230.

J.L. HEIBERG (ed.) (1910-15), *Archimedis opera omnia cum commentariis Eutocii*, 3 voll., Lipsiae, B.G. Teubner.

L. HORSTEN (2012), Philosophy of Mathematics, in E.N. Zalta (ed.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, URL http://plato.stanford.edu/archives/sum2012/entries/philosophy-mathematics/.

P.D. NAPOLITANI, K. SAITO (2004), Royal Road or Labyrinth? Luca Valerio's *De centro grauitatis solidorum* and the Beginnings of Modern Mathematics, *Bollettino di storia delle scienze matematiche* 24(2), pp. 67-124.

K. SAITO, P.D. NAPOLITANI (2014), Reading the Lost Folia of the Archimedean Palimpsest: The Last Proposition of the *Method*, in N. Sidoli, G. Van Brummelen (edd.), *From Alexandria, Through Baghdad. Surveys and Studies in the Ancient Greek and Medieval Islamic Mathematical Sciences in Honor of J.L. Berggren*, Berlin-New York, Springer, pp. 199-225.

S. SHAPIRO (ed.) (2005), *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*, Oxford, Oxford University Press.

Fabio Acerbi
CNRS, UMR8560 Centre Alexandre Koyré, Paris
E-mail: fabacerbi@gmail.com