
La Matematica nella Società e nella Cultura

RIVISTA DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

FERDINANDO ARZARELLO, MARIA G. BARTOLINI
BUSSI, LUCIANA BAZZINI

Emma Castelnuovo e la ricerca in didattica della matematica in Italia: alcune riflessioni

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. 6 (2013), n.1 (Fascicolo dedicato ad Emma Castelnuovo), p. 81–95.

Unione Matematica Italiana

http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2013_1_6_1_81_0

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2013.

Emma Castelnuovo e la ricerca in didattica della matematica in Italia: alcune riflessioni

FERDINANDO ARZARELLO, MARIA G. BARTOLINI BUSSI
LUCIANA BAZZINI

I ricercatori in didattica della matematica corrono il rischio di essere come ragni che producono ragnatele brillanti ma fragili, o come le formiche, che accumulano ciecamente chicchi per l'inverno. Invece devono essere come le api che producono miele.

(Adattato da Francis Bacon)

1. – Il primo periodo della ricerca italiana sulla didattica della matematica

In questo lavoro, per la ricerca italiana sulla didattica della matematica, abbiamo distinto due periodi, il primo che va fino alla metà degli anni ottanta del secolo scorso e il secondo che comprende i decenni successivi.

1.1 – La riflessione sui contenuti

Almeno fino dall'Unità d'Italia, nella discussione sull'insegnamento della matematica furono coinvolti i matematici delle università, sia nelle istituzioni governative sia nella produzione di idee per migliorare lo stato della scuola. Essi miravano a progettare l'insegnamento della matematica in situazioni *generiche*, puntando l'attenzione sull'organizzazione logica dei concetti all'interno della matematica. In questa tradizione hanno operato matematici come Veronese, Cremona, Peano, Enriques, Vailati, ecc. (vedi Barra et al., 1992). Questo coinvolgimento sociale non fu, naturalmente, solo italiano,

come ben mostrano le note biografiche raccolte nella Storia dell'ICMI (International Commission on Mathematical Instruction: <http://www.icmihistory.unito.it/>). I matematici di molti paesi hanno sempre perseguito un impegno civile, sfatando il mito degli scienziati rinchiusi nelle torri d'avorio della ricerca. Naturalmente i contenuti disciplinari erano elaborati in una forma che era corretta dal punto di vista matematico e con una stretta aderenza al linguaggio dei matematici professionisti, con una particolare (anche se non esclusiva) attenzione per l'insegnamento nella scuola secondaria. A causa dell'attenzione esclusiva ai contenuti disciplinari, non venivano focalizzati i problemi della *trasposizione didattica* (Chevallard, 1980), cioè le relazioni tra il sapere da insegnare e il sapere scientifico che lo legittima. Le azioni didattiche nella classe erano immaginate o pianificate sulla base delle difficoltà e complessità concettuali; le difficoltà cognitive, le convinzioni e gli atteggiamenti non erano ignorati ma piuttosto ridotti ai loro aspetti matematici. L'attenzione era generalmente posta sui prodotti (le prestazioni degli studenti) piuttosto che sul processo di insegnamento-apprendimento. Un esempio abbastanza recente ma emblematico di questo atteggiamento è rappresentato dal *Syllabus* (Unione Matematica Italiana, 1980), nel quale le conoscenze e le competenze matematiche attese alla fine della scuola secondaria (almeno per gli studenti intenzionati a seguire un percorso scientifico nelle università) erano descritte con una gerarchia concettuale che metteva in evidenza le principali difficoltà attese per mezzo di problemi stimolanti ed esempi intriganti.

1.2 – *L'innovazione nella classe*

A partire dalla metà del secolo scorso, nelle scuole prese avvio un movimento per l'innovazione, con un forte coinvolgimento degli insegnanti e di varie associazioni professionali. Questo movimento mirava a produrre esempi paradigmatici di miglioramento nell'insegnamento della matematica in situazioni *specifiche* e focalizzava problemi concreti della didattica della matematica. I problemi erano molto particolari (es. *come insegnare l'area in quinta elementare?*).

Naturalmente questi problemi erano immersi in un contesto più ampio ed erano analizzati anche da un punto di vista psicologico e sociologico; dunque l'analisi richiedeva un linguaggio distinto e più complesso rispetto a quello della sola matematica. Le azioni didattiche nella classe erano progettate in modo pragmatico. Nella conduzione degli esperimenti didattici, si richiamava la necessità della competenza professionale dell'insegnante (chiamata spesso *arte dell'insegnare*), ai fini di modificare, se necessario, la programmazione in accordo con le necessità della classe. L'analisi era piuttosto limitata e spesso ridotta, sul piano descrittivo, alla semplice constatazione del buon funzionamento nella situazione specifica. Se pure con questo limite, nelle attività l'attenzione era rivolta al processo di insegnamento-apprendimento nel suo complesso.

1.3 – *Un confronto tra i due modelli*

Un'analisi più fine delle diverse figure che hanno agito in quegli anni potrebbe mettere in evidenza posizioni più sfumate e intermedie. Tentiamo tuttavia di fissare alcune differenze fondamentali.

Nel primo caso, si sceglieva un modello *top-down*: il punto di partenza era l'analisi dei contenuti, per mezzo della quale e in funzione della quale si determinava e si descriveva la pratica della classe.

Nel secondo caso, si sceglieva un modello *bottom-up*, simile a quello della ricerca-azione: il punto di partenza era uno specifico problema di insegnamento così come era percepito dagli insegnanti, mentre la pratica era determinata dalle condizioni concrete di azione nella classe.

In entrambi i casi la diffusione si basava sulla fiducia, molto ottimistica, nelle competenze professionali degli insegnanti. Nel primo caso, l'attenzione era posta sull'efficacia della formazione iniziale e della formazione in servizio; nel secondo caso sull'efficacia del lavoro collaborativo tra insegnanti per trasmettere e condividere buone pratiche.

In altri paesi (es. Francia; Germania, vedi Arzarello & Bartolini Bussi, 1998), nonostante la presenza di tendenze simili, la pressione verso il riconoscimento accademico della ricerca didattica come disci-

plina scientifica portò per decenni verso una completa separazione tra forme di ricerca teorica (il primo modello) e forme di ricerca-azione (il secondo modello), fino al punto di inibire la comunicazione e la mutua fertilizzazione tra esse.

In Italia si scelse una strada diversa, mirante ad una progressiva integrazione dei due modelli, sotto la pressione della necessità di una reale innovazione nella scuola, nei decenni di grandi riforme dei programmi scolastici. Esempi chiave di questa “contaminazione” sono i libri di testo per la scuola secondaria scritti da matematici dell’università (Speranza, Prodi, Magenes, Lombardo Radice, Villani e altri, vedi Barra et al. 1992) in collaborazione con insegnanti motivati, inseriti nei cosiddetti Nuclei di Ricerca Didattica, costituiti a partire dalla metà degli anni settanta presso i Dipartimenti di Matematica delle Università con finanziamenti del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

1.4 – *Il ruolo di Emma Castelnuovo*

Emma Castelnuovo è divenuta una icona, ben nota anche a livello internazionale, per il modello dell’innovazione in classe secondo un metodo costruttivo mirante al coinvolgimento diretto degli allievi nelle esplorazioni. In un certo senso, quindi, la sua figura si inserisce nella tradizione dei metodi attivi, che hanno una lunga storia nella pedagogia. Per citare solo alcuni nomi, ricordiamo:

– Johann Heinrich Pestalozzi (1746-1827), che, influenzato dall’*Émile* di J.J. Rousseau e con un atteggiamento decisamente innovativo per l’epoca, sottolineò l’importanza delle attività di gruppo (contrapposte alla memorizzazione individuale) e delle attività come il disegno, la scrittura, il canto, le costruzioni, le rappresentazioni in pianta, ecc.,

– John Dewey (1859-1952), che sottolineò gli aspetti sociali dell’educazione; partendo dalla classe tradizionale “con le sue brutte file di banchi posti in ordine geometrico, ammassati in modo da lasciare meno spazio possibile per muoversi, banchi tutti della stessa misura, con solo lo spazio per mettere i libri, le matite e la carta; un tavolo, alcune sedie,

le pareti nude e forse solo qualche immagine” prese le distanze dalla “unica attività educativa che può avvenire in tale spazio”, osservando che è “uno spazio fatto per ascoltare – dato che semplicemente studiare da un libro è un altro modo di ascoltare; segna la dipendenza di una mente dall’altra ... significa passività” (Dewey, 1967, pp. 21-2).

– Maria Montessori (1870-1952), che sviluppò il metodo che porta il suo nome, nel quale i bambini imparano in modo indipendente, dal loro ambiente e da ciò che manipolano direttamente.

– Ovide Decroly (1871-1932), ideatore del cosiddetto metodo globale, fondatore dell’omonima scuola cui tanto deve la formazione di Emma, come ampiamente discusso nel capitolo di Marta Menghini.

In questo senso Emma si inserisce nel filone che ricomprende i metodi che lei stessa chiama intuitivi e riconosce a Decroly e Montessori un importante ruolo nel loro sviluppo, inserito nella tradizione piagetiana e nella tradizione italiana nell’insegnamento della matematica, in particolare quella di Enriques, così vicino in certe riflessioni al pensatore ginevrino.

Specificatamente Emma (Castelnuovo, A 1957c) osserva che il cosiddetto “insegnamento intuitivo per immagini”, contrapposto al più tradizionale insegnamento “verbale”, si è evoluto grazie ai contributi degli studiosi sopra elencati. In particolare, la Montessori propone l’uso di manipolativi nella scuola primaria, che non solo permettono “una presa di coscienza dei vari concetti matematici attraverso i sensi, ma anche una presa di coscienza di operazioni a partire dal termine più semplice” (*op. cit.*, pp. 94-95, sottolineatura nell’originale). L’insegnamento intuitivo nella Montessori, secondo l’interpretazione di Emma, è quindi basato su una nozione di intuizione che non è solo “percezione passiva di un’immagine o di un materiale, ma è anche costruzione” (*ibid.*, p. 95, sottolineatura nell’originale). In questo senso classifica il metodo della studiosa marchigiana tra quelli attivi, precisamente tra quelli sintetici, in quanto l’astrazione è conquistata muovendo dall’elemento specifico a quello generale. Un discorso simile, ma non identico, vale per Decroly: mentre il metodo montessoriano è sintetico e basato su materiale costruito *ad hoc* (anche se successivamente la Montessori aggiunge la necessità di fare riferimento agli oggetti che esistono in natura), il metodo di Decroly è analitico e naturale. Muove cioè dal globale al semplice, scomponendo

quanto si osserva nel mondo della natura: “non è altro che il metodo scientifico in campo naturalistico, fisico, economico, insomma in ogni campo applicativo della matematica” (*ibid.*, p. 96).

Ma in entrambi i metodi “manca un ‘qualche cosa’ perché possano considerarsi come dei metodi che immettono in pieno nel mondo matematico; è quel ‘qualche cosa’ che conduce all’intuizione propria del matematico” (*ibid.*, p. 96.). Inoltre i metodi di entrambi non permettono a chi apprende di seguire un cammino libero, consonante con il suo essere psicologico, ma chi apprende è “obbligato a seguire quei certi passaggi che gli vengono imposti dal materiale stesso con cui lavora” (*ibid.*, p. 97). Qui la Castelnovo va oltre i metodi di Decroly e Montessori. Appoggiandosi alle ricerche di Piaget vede per i materiali didattici una funzione diversa, cioè una “funzione esclusivamente operatoria: sono le trasformazioni da configurazione a configurazione su cui deve fissarsi l’attività del bambino, e non le configurazioni stesse da cui anzi deve liberarsi a poco a poco”. Per questo sottolinea la diversità in positivo di materiali come quelli di Cuisenaire e Gattegno.

Al di là di polemiche anche un po’ datate, ma che comunque sono importanti per inserire il fenomeno Castelnovo nella cornice culturale e pedagogica degli anni della sua più feconda attività, quello che rimane vitale nel suo lavoro è lo sforzo di considerare l’allievo come “un essere pieno di curiosità, un indagatore, uno scienziato in miniatura” cui si possono attribuire “lo stesso modo di procedere, gli stessi passaggi della mente dello scienziato” (*ibid.*, p. 95): per questo si sente più vicina a Decroly che a Montessori.

Per meglio comprendere queste sue concezioni è sufficiente leggere qualche brano di un suo lavoro successivo dal titolo *L’oggetto e l’azione nell’insegnamento della geometria intuitiva*, a proposito del metodo costruttivo per la geometria nelle classi di scuola secondaria di primo grado (Castelnovo, A 1965c):

Il lettore non troverà in questo articolo nessun consiglio, nessuna regola per meglio insegnare o per meglio farsi capire, né gli verrà indicata una strada precisa per un primo corso di geometria nella scuola secondaria. Troverà solo qualche cosa che già conosce: le difficoltà che s’incontrano per introdurre questo o quel concetto, questa o quella operazione, gli errori più frequenti che

si verificano da parte degli allievi. Da questi dati – perché ormai sono diventati dei dati – sarà condotto a risalire ad una critica del proprio metodo, a un esame dei propri difetti, a una visione serena e obbiettiva del proprio insegnamento. Si parlerà di materiale, di modelli, di dispositivi: non si aspetti il lettore che si apra davanti a lui la cassetta delle meraviglie! Ci auguriamo soltanto che qualche idea che ci è venuta al contatto degli allievi possa maturarsi al contatto di altri allievi; possa quindi estendersi e dar adito ad altre esperienze, ad altre idee. (pag. 42).

Ma vogliamo sottolineare che in ogni caso il materiale deve essere mobile: è infatti la mobilità che attira l'attenzione del bambino e che lo conduce dal concreto all'astratto; perché non è il materiale in sé che è l'oggetto della sua attenzione, ma piuttosto la trasformazione del materiale, un'operazione dunque che, essendo indipendente dal materiale stesso, è astratta (pag. 58).

È necessario ricorrere all'oggetto e all'azione se si vuole che l'insegnamento della geometria intuitiva abbia un carattere costruttivo e che sia quindi formativo: ecco la conclusione a cui vorremmo aver condotto il lettore. Oggetto e azione che non devono seguire uno schema prestabilito, ma lasciarsi ispirare ogni volta dalle esigenze della classe che l'insegnante avrà la sensibilità di saper cogliere: è proprio da queste esigenze che sono sorti gli esempi che abbiamo dato. I mezzi pratici per la realizzazione delle esperienze non hanno nessuna importanza: si tratterà di un modello, di un dispositivo, di un'esperienza realizzata con l'aiuto di un materiale, o solamente immaginata, delle variazioni di una luce o del mutarsi di un'ombra. Ed è proprio forse questa libertà di ideare e interpretare, ugualmente alla portata del maestro e dell'allievo, che costituisce una delle caratteristiche del metodo costruttivo. (p. 65).

Il volume da cui sono estratti questi brani fu pubblicato dalla CIEAEM nel 1958, con contributi di vari autori (tra cui Gattegno). Nel volume si sottolineava l'importanza del materiale concreto o semi-concreto (film matematici; ombre, raggi di luce, ecc.) e del movimento in geometria, molti anni prima che la disponibilità di software di geometria dinamica rendesse queste attività alla portata almeno economica (se non culturale) di tutti gli insegnanti. Possono fare ora un po' sorridere i modellini di asticelle ed elastici usati da Emma in classe per esplorare triangoli, quadrilateri e loro proprietà, ma è ancora tutta da esplorare e documentare la potenzialità di questi oggetti che stimolano sensi diversi e suggeriscono sistemi di gesti diversi durante le esplorazioni.

2. – Il secondo periodo della ricerca italiana sulla didattica della matematica

Negli anni ottanta, cominciò ed emergere la necessità di rendere più precisa la dimensione didattica degli esperimenti, per comprendere, ad esempio, perché un'innovazione funzionava in una classe e non in un'altra. Sembrava insufficiente richiamarsi all'arte dell'insegnare soprattutto in un'epoca in cui si iniziava a porre in maniera sempre più insistente e sistematica il problema della formazione iniziale degli insegnanti. In maniera ingenua e diretta ci si ponevano alcune domande: *chi può diventare un bravo insegnante? Solo chi ha una predisposizione innata? Oppure si può immaginare di costruire percorsi per "insegnare ad insegnare", fornendo strumenti di analisi e di progettazione?* Rispetto al modello dell'insegnante come artista iniziava ad emergere la tensione verso un modello di insegnante professionista, forse artigiano, da formare in modo che potesse costruire nella formazione continua (e non solo per prova ed errori in classe) competenze professionali. Alcuni elementi di queste competenze professionali sono stati influenzati dalle ricerche svolte in altri paesi e presentate nei sempre più numerosi congressi che si organizzavano da parte dell'ICMI o dei gruppi ad essa affiliati.

Citiamo solo, brevemente, le ricerche sull'osservazione dei processi degli studenti (vedi Arzarello & Bartolini Bussi, 1998) e, successivamente (a partire dagli anni novanta), le ricerche sulle convinzioni e gli atteggiamenti di studenti ed insegnanti rispetto alla matematica e al suo insegnamento.

Questi filoni di ricerche non hanno avuto origine all'interno del nostro paese, ma hanno preso spunto da studi che si stavano sviluppando in altri paesi. I ricercatori italiani, frequentando in modo sempre più intenso i congressi internazionali, venivano in contatto con altre tradizioni di ricerca, che inserivano poi all'interno della propria tradizione culturale con risultati spesso originali e valutati molto positivamente sul piano internazionale.

Anche se Emma non si è mai occupata di analisi di processi o di analisi di convinzioni, è indubbio che il suo approccio fortemente contestualizzato nella realtà della classe (e pure guidato da competenze

storico-culturali assai forti) ha creato un ambiente fertile perché queste ricerche di origine esterna potessero interessare i ricercatori italiani e far sì che essi producessero studi in linea con le tendenze internazionali.

Citiamo solo alcuni casi in cui, in filigrana, l'eredità di Emma Castelnuovo è ben visibile.

2.1 – *Il laboratorio di matematica*

Gli strumenti hanno avuto spazio all'interno della matematica fin dall'antichità e non solo nell'ambito del calcolo: la geometria di Euclide è la geometria della riga e del compasso; altri tracciatori di curve sono stati studiati fin dall'antichità come strumenti di soluzione di problemi e sono ripresi nel '600 come elementi essenziali dei nuovi metodi (si pensi all'appendice sulla geometria del *Discorso sul Metodo* di Descartes). Modelli statici e dinamici riempivano le vetrine degli Istituti di Matematica, fino a che il programma Bourbakista spostò l'attenzione sulle strutture fondamentali della matematica. Una testimonianza interessante del ruolo che questi modelli hanno avuto nello sviluppo delle ricerche è citata da Campedelli (1965) che ricorda le parole pronunciate da Guido Castelnuovo, padre di Emma, nel Congresso Internazionale dei Matematici (Bologna, 1928), per descrivere la genesi della teoria delle superfici algebriche:

Avevamo costruito, in senso astratto s'intende, un gran numero di modelli di superficie del nostro spazio o di spazi superiori; e questi modelli avevamo distribuito per dir così in due vetrine. Una conteneva le superficie regolari per le quali tutto procedeva come nel migliore dei modi possibili; l'analogia permetteva di trasportare ad esse le proprietà più salienti delle curve piane. Ma quando cercavamo di verificare queste proprietà sulle superficie dell'altra vetrina, le irregolari, cominciavano i guai, e si presentavano eccezioni di ogni specie. Alla fine lo studio assiduo dei nostri modelli ci aveva condotto a divinare alcune proprietà che dovevano sussistere, con modificazioni opportune, per le superficie di ambedue le vetrine; mettevamo poi a cemento queste proprietà con la costruzione di nuovi modelli. Se resistevano alla prova, ne cercavamo, ultima fase, la giustificazione logica (p. 169).

Come osserva argutamente Campedelli,

Castelnuovo parla di “modelli” e di “vetrine” e quasi soltanto casualmente precisa che non si trattava di oggetti materiali, ma solo di costruzioni della mente, presenti allo spirito, e vive dinanzi agli occhi come se avessero avuto un’esistenza fisica (ibid.).

Ma, si può aggiungere oggi, proprio l’uso metaforico suggerisce la familiarità dell’autore con i modelli disposti in vere vetrine, come nelle *wunderkammern* degli istituti universitari (Mueller, 2001).

Questa tradizione culturale, non solo italiana (Bartolini Bussi, Taimina & Isoda, 2010) unita alle innovazioni in classe di Emma e alle ricerche successive produce il costrutto teorico del *laboratorio di matematica*, che, nella proposta di curriculum dell’Unione Matematica Italiana (2003), riunisce in un’unica formulazione le elaborazioni di natura epistemologica, didattica e cognitiva della tradizione italiana. Ecco alcuni brani dal documento originale:

Il laboratorio di matematica non è un luogo fisico diverso dalla classe, è piuttosto un insieme strutturato di attività volte alla costruzione di significati degli oggetti matematici. Il laboratorio, quindi, coinvolge persone (studenti e insegnanti), strutture (aule, strumenti, organizzazione degli spazi e dei tempi), idee (progetti, piani di attività didattiche, sperimentazioni).

L’ambiente del laboratorio di matematica è in qualche modo assimilabile a quello della bottega rinascimentale, nella quale gli apprendisti imparavano facendo e vedendo fare, comunicando fra loro e con gli esperti. La costruzione di significati, nel laboratorio di matematica, è strettamente legata, da una parte, all’uso degli strumenti utilizzati nelle varie attività, dall’altra, alle interazioni tra le persone che si sviluppano durante l’esercizio di tali attività [...].

È necessario ricordare che uno strumento è sempre il risultato di un’evoluzione culturale, che è prodotto per scopi specifici e che, conseguentemente, incorpora idee. Sul piano didattico ciò ha alcune implicazioni importanti: innanzitutto il significato non può risiedere unicamente nello strumento né può emergere dalla sola interazione tra studente e strumento. Il significato risiede negli scopi per i quali lo strumento è usato, nei piani che vengono elaborati per usare lo strumento; l’appropriazione del significato, inoltre, richiede anche riflessione individuale sugli oggetti di studio e sulle attività proposte [...].

La storia della matematica, pur presentando contenuti suoi propri e possibilità di sviluppi su vari fronti va vista, in questo contesto, come un possibile ed efficace strumento di laboratorio (inteso nel senso largo esposto prima) adatto a motivare adeguatamente e ad indicare possibili percorsi didattici per l'apprendimento di importanti contenuti matematici [...]

La costruzione di significati è strettamente legata alla comunicazione e condivisione delle conoscenze in classe, sia attraverso i lavori in piccoli gruppi di tipo collaborativo o cooperativo, sia attraverso lo strumento metodologico della discussione matematica, opportunamente gestito dall'insegnante.

Nel testo si sottolinea l'importanza del materiale, non solo del materiale virtuale delle tecnologie dell'informazione e della comunicazione, ma anche del materiale concreto, spesso dinamico, della tradizione di Emma Castelnuovo. Si sottolinea anche il fatto che può essere la classe stessa un "laboratorio di matematica", così come sottolineato da Emma in varie occasioni (vedi, ad esempio, il cap. IV di Castelnuovo L 1963). Vale la pena di sottolineare, nella tradizione culturale del nostro paese, la resistenza al ricorso alle cosiddette *virtual manipulatives* che, negli US, stanno rimpiazzando in modo sistematico il materiale concreto (<http://nlvm.usu.edu/en/nav/vlibrary.html>).

2.2 – Aspetti multimodali nei processi di insegnamento-apprendimento

Vale qui la pena di accennare a uno dei motivi di fondo per cui i lavori di Emma Castelnuovo, come quelli della Montessori, di Gattegno e di Dienes del resto, hanno notevole importanza oggi, nell'era dei *touch screen*, degli *i-phone* ecc., nell'era, cioè, in cui l'uso delle dita, della visualizzazione e del potere che questi assumono nelle nostre interazioni col mondo, sta diventando così importante. In lingua inglese si parla di *haptic technology*, usando un termine che deriva dal greco *απτικός* – tattile – per indicare quegli apparecchi che permettono una retroazione tattile (ma in cui gli aspetti visivi e auditivi sono anche fortemente presenti). È proprio questo tipo di tecnologia che rende più attuale che mai il metodo di Emma, per l'intreccio della sua ricerca e

delle sue pratiche con quelli che oggi si chiamano *aspetti multimodali* nei processi di insegnamento/apprendimento.

Recenti lavori (si veda ad es. Güçler et al. 2013 e la bibliografia ivi contenuta) mostrano come tali aspetti diventino ogni giorno più importanti nelle nostre interazioni sociali e quindi possano assumere una valenza cognitiva e didattica fondamentale in quanto consonante con il modo con cui operiamo nella vita di tutti i giorni. Dede et al. (1999) sottolineano come tradizionalmente si è sempre cercato di creare cammini non esclusivamente verbali e statici all'apprendimento, in cui gli aspetti manipolativi, visivi e talvolta auditivi fossero contemporaneamente presenti. Oggi la multimodalità offre uno spettro più ampio, grazie al progresso tecnologico, ma ci sono due componenti, entrambe già presenti nei lavori pionieristici di Emma Castelnuovo e che caratterizzano questi nuovi ambienti: il ruolo della dinamicità e quello di sviluppare e supportare l'immaginazione degli allievi.

I lavori di Emma sono sempre basati sugli aspetti dinamici dei manipolativi che propone, antesignana della Geometria dinamica, e figlia di un celebre articolo di Enriques (1921) in merito. Innumerevoli sono i passi in cui sottolinea questo: dall'uso dell'ombra proiettata da un'*abat-jour* accesa sul muro per considerare la famiglia dei diversi tipi di coniche, all'idea di area come "superficie spazzata", all'esperimento con un cordino per costruire con le mani diversi rettangoli aventi tutti lo stesso perimetro, ecc.. È tutta una varietà di esperienze multimodali e dinamiche in cui la concettualizzazione è fondata proprio su di esse. Sono tali esperienze a permettere quella che Emma chiama la costruzione operatoria dei concetti matematici, e che sostanzialmente vede conquistata attraverso tre tappe teoriche fondamentali, cui corrispondono altrettante metodologie per l'insegnamento della matematica. La prima è data *dall'insegnamento intuitivo per immagini di oggetti*, affermatosi in ambiente tedesco nell'Ottocento, in opposizione all' "insegnamento verbale", fino ad allora prevalente (con eccezioni illustri ma isolate: Platone nel *Menone*, Comenio, Pestalozzi). La seconda è costituita *dall'insegnamento intuitivo per immagini di operazioni tra oggetti* di Decroly e Montessori. La terza, basata sull'epistemologia di Piaget, è costituita *dall'insegnamento intuitivo per scoperta di invarianti*, cui tanto contribuì la Nostra.

Ma c'è un altro aspetto che compare nell'opera di Emma, e che lei indicava come caratteristica fondamentale del metodo costruttivo: “la libertà di ideare e interpretare, ugualmente alla portata del maestro e dell'allievo” (citata sopra), vale a dire lo stimolo all'immaginazione matematica. Anche questo aspetto è stato messo in luce come caratteristica fondamentale dell'apprendimento multimodale, sviluppato grazie all'uso di manipolativi. Ad esempio, scrivono Nemirovski et al. (2003):

L'uso di materiale e strumenti appropriati facilita l'inclusione del tatto, della propriocezione (percezione dei propri corpi) e della cinestesia (movimento del corpo intenzionale) nell'apprendimento della Matematica. Un corpus emergente di lavori, a volte chiamato “visione esplorativa” descrive la visione come del tutto integrata con tutti i sensi e le azioni del corpo. [...] É sempre più evidente che c'è una grande sovrapposizione tra percezione e immaginazione (Decety, 1996). Per immaginare, ad esempio, un processo di limite, si estendono gli aspetti percettibili a circostanze e condizioni fisicamente impossibili. Sotto questo aspetto, il tatto e la cinestesia possono essere fondamentali per l'immaginazione. Non è raro che per immaginare oggetti ed eventi inesistenti, si producano con i gesti forme e movimenti o si afferrino, ad esempio, scatole di cartone, per aiutarsi a vederli da parti diverse (p. 105).

Emma Castelnuovo ha intuito l'importanza delle esperienze concrete e dei fatti della vita quotidiana per la costruzione dei significati matematici. Di qui, il rilievo alle metafore collegate al corpo, allo spazio e al movimento. La metafora non è più solo un'espressione linguistica, ma un meccanismo di pensiero. In breve, “body is put back into the mind” (il corpo ritorna nella mente) (Johnson, 1987) e il linguaggio e i gesti ricevono nuova enfasi. In particolare sono importanti per l'apprendimento della matematica le cosiddette “grounding metaphors”, cioè quelle che fondano la costruzione dei significati matematici nelle esperienze quotidiane. Ne sono un esempio il significato di “insieme”, fondato sulla nozione di “contenitore”, e le operazioni aritmetiche, viste in termini di collezioni di oggetti e azioni su di essi (aggiungere, togliere, raggruppare, etc.), le funzioni viste come macchine che riproducono un algoritmo. In Italia, vari studi di ricerca didattica hanno analizzato le metafore usate dagli studenti a vari livelli di scolarità (ad esempio la metafora della bilancia nella risoluzione di equazioni e disequazioni, in Bazzini, Boero & Garuti, 2001) e si sono poste questioni

sul riconoscimento di legittimità (e conseguente diffusione) di tali comportamenti, che rompono con la tradizione di un insegnamento formale della matematica (Bazzini, 2001).

Gli studi sulla transizione da fatti percettivi a rappresentazioni simboliche hanno evidenziato il ruolo cruciale degli aspetti legati al coinvolgimento del corpo, all'uso del linguaggio e dei gesti, all'interazione con gli strumenti, tecnologici e non. Queste ricerche corroborano l'ipotesi che l'attività cognitiva del soggetto che apprende risenta fortemente delle esperienze vissute, in particolare le interazioni del proprio corpo con lo spazio, col tempo e con gli strumenti. Di qui si afferma la valenza formativa degli strumenti tecnologici, anche in una prospettiva "embodied". Si tratta di un "new embodiment" (Bazzini, 2001), poiché oggi le esperienze tecnologiche sono sempre più parte integrante della cultura dei nostri studenti.

3. – Conclusioni

L'eredità di Emma Castelnuovo è contenuta nei libri di testo, negli articoli, nelle cronache delle mostre e nelle raccolte purtroppo parziali del materiale da lei utilizzato (Valenti), ma, soprattutto nella memoria delle persone che l'hanno conosciuta. Per questo le testimonianze dei suoi allievi contenute in questo volume sono particolarmente preziose.

In questo breve contributo abbiamo voluto sottolineare il ruolo svolto da Emma Castelnuovo nella ricerca italiana in didattica della matematica derivante dalla sinergia tra le nostre tradizioni e le influenze esterne provenienti dai contatti tra i ricercatori italiani e ricercatori provenienti da altri paesi. Il nostro scopo è anche quello di aiutare i ricercatori più giovani a meglio conoscere le loro radici e la valenza di questa tradizione, diversa da quella di molti altri paesi anche vicini. È proprio questa tradizione che costituisce un dato culturale importante e che fa sì che i loro lavori, per la comunità internazionale, siano rilevanti, da un lato, e non facili da comunicare, dall'altro (Bartolini Bussi & Martignone, 2013).

Ringraziamenti. Alcuni paragrafi di questo lavoro (§§ 1.1, 1.2, 1.3) sono stati tradotti dal capitolo di Arzarello & Bartolini Bussi (1998), citato in bibliografia.

BIBLIOGRAFIA

- ARZARELLO F., BARTOLINI BUSSI M. G. (1998), Italian Trends in Research in Mathematics Education: A National Case Study in the International Perspective. In: KILPATRICK J., SIERPINSKA A. *Mathematics Education as a Research Domain : A Search for Identity*. vol. 2, p. 243-262, DORDRECHT: Kluwer,
- BARRA M., FERRARI M., FURINGHETTI F., MALARA N.A. & SPERANZA F. (a cura di) (1992), The Italian Research In Mathematics Education: Common Roots and Present Trends, Progetto Strategico del CNR - Tecnologie e Innovazioni Didattiche, 12.
- BARTOLINI BUSSI, M. G. & MARTIGNONE, F. (2013), Cultural issues in the communication of research on mathematics education, *For the Learning of Mathematics*, 33 (1), 2-8.
- BARTOLINI BUSSI, M. G., TAIMINA, D. & ISODA, M. (2010), Concrete models and dynamic instruments as early technology tools in classrooms at the dawn of ICMI: from Felix Klein to present applications in mathematics classrooms in different parts of the world. *ZDM – The International Journal on Mathematics education*, 42, 19-31.
- BAZZINI, L. (2001), From grounding metaphors to technological devices: a call for legitimacy in school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 47, 259-271.
- BAZZINI, L., BOERO, P. & GARUTI, R. (2001), Metaphors in teaching and learning mathematics: a case study concerning inequalities. In: *PME 25 (Utrecht)*, 2, 185-192.
- CAMPEDELLI, L. (1965), I modelli geometrici, in AAVV. *Il materiale per l'insegnamento della matematica*, 143-172. Firenze: La Nuova Italia (ediz. originale 1958).
- CHEVALLARD, Y. (1980), *La transposition didactique*, Grenoble: La Pensée Sauvage.
- DECETY, J. (1996). The neurophysiological basis of motor imagery. *Behavioural Brain Research*, 77, 45-52.
- DEDE, C., SALZMAN, M., LOFTIN, B., & SPRAGUE, D. (1999). Multisensory Immersion as a Modeling Environment for Learning Complex Scientific Concepts. In W. Feurzeig and N. Roberts, (Eds.), *Computer modeling and simulation in science education*, 282-319. New York: Springer-Verlag.
- DEWEY, J. (1967), *Scuola e società*. Firenze: La Nuova Italia (I ed. Chicago 1899).
- ENRIQUES, F. (1921). L'insegnamento dinamico, *Periodico di Matematiche*, s. IV, vol. 1, 6-16. <http://www.mat.uniroma2.it/mep/Articoli/Enri/Enri.html>
- GÜGLER, B., HEGEDUS, S., ROBIDOUX, R., & JACKIW, N. (2013). Investigating the mathematical discourse of younger learners involved in multi-modal mathematical investigations: The case of haptic technologies. In D. Martinovic, V. Freiman, & Z. Karadag (Eds.), *Visual Mathematics and Cyber Learning*, 97-118. Springer.
- JOHNSON, M. (1987) *The Body in the Mind: the Bodily Basis of Meaning; Imagination and Reason*, Chicago: The University of Chicago Press.
- MUELLER W. (2001), *Mathematical Wunderkammern*, <http://www.wmueller.com/home/papers/wund.html>
- NEMIROVSKY, R., BORBA M. (2003). Perceptuo-motor activity and imagination in mathematics learning (Research Forum). In *PME 27 (Honolulu)*, 1, 105-109.
- UNIONE MATEMATICA ITALIANA (1980), *Syllabus*, *Notiziario dell'Unione Matematica italiana*, 7 (3), 5-16
- UNIONE MATEMATICA ITALIANA (2003), *Matematica 2003*, <http://umi.dm.unibo.it/download.php?id=38>
- VALENTI D. (a cura di), *Il materiale 3M per la matematica* <http://www1.mat.uniroma1.it/ricerca/gruppi/education/MaterialMat/MainPage.htm>