
La Matematica nella Società e nella Cultura

RIVISTA DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

MASSIMO A. PICARDELLO

Analisi di Fourier e ricostruzione di segnali a partire da dati campionati

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. 5 (2012), n.3, p. 399–444.

Unione Matematica Italiana

[<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2012_1_5_3_399_0>](http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2012_1_5_3_399_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2012.

Analisi di Fourier e ricostruzione di segnali a partire da dati campionati

MASSIMO A. PICARDELLO

1. – Introduzione

Consideriamo un segnale, ad esempio un segnale musicale o le righe successive di un'immagine digitale. Si tratta di segnali digitali, ovvero ridotti ad una successione discreta di valori numerici che possiamo prendere interi (o con un numero fisso di cifre, binarie o decimali che esse siano). Però, quando ascoltiamo la musica o guardiamo l'immagine, ci aspettiamo di ricostruire nel nostro cervello un segnale continuo. Certo, se il campionamento è fitto, potremmo pensare che il segnale digitale discreto approssimi a tratti un segnale continuo... ma con quale errore di approssimazione? E cosa succede se facciamo uno zoom? È possibile ricostruire veramente il segnale originale da cui sono stati estratti i campioni?

La risposta è nota agli ingegneri da più di sessant'anni (Teorema del Campionamento di Shannon), ed ai matematici da molto di più (Teorema di Whittaker), anche se, curiosamente, non se ne trova facilmente una dimostrazione rigorosa. La risposta è la seguente: in generale no, non è possibile, ma è possibile se il segnale ha trasformata di Fourier a supporto compatto ed il passo di campionamento è sufficientemente piccolo (o almeno, la ricostruzione può avvenire con precisione arbitrariamente elevata, fatte salve le cautele illustrate più sotto nella Sottosezione 5.1). Questa risposta era nota prima che musica e fotografia diventassero digitali, ed anzi fu impiegata per scegliere la frequenza di campionamento di 44 KHz dei Compact Disc (CD).

Molti anni fa, a fianco ai CD apparvero le cassette digitali (Digital Audio Tape, DAT), che permettevano agli utenti di registrare i dati numerici senza perdite (all'epoca non erano ancora commercializzati i

registratori di CD, solo i lettori, e non c'erano i personal computer che ora si utilizzano per salvare e riascoltare i file digitali: quindi solo le cassette digitali permettevano di travasare i dati). Le catene discografiche temettero che la loro costosa offerta di musica su CD venisse piratata... e quindi scelsero per le cassette DAT una frequenza di campionamento diversa, 48 KHz, in modo che il travasamento diretto dei dati portasse poi ad un riascolto accelerato del 10% e quindi inutilizzabile. Davvero, quelle case discografiche avevano poca fede nella matematica! Il teorema di ricostruzione di Shannon aggira elegantemente il problema: a costo di una certa mole di calcolo (lenta ma banale), possiamo ricostruire il segnale originale dai dati a 44 KHz e ricampionarlo a 48 KHz senza perdite (o meglio, con precisione arbitraria) se non per gli inevitabili arrotondamenti numerici dei calcoli! Infatti, ormai nessuno usa più questi stratagemmi (e comunque dopo l'avvento dei computer nessuno usa più le cassette digitali se non per registrazioni sul campo in condizioni ambientali difficili per un computer). Naturalmente, per questo scopo occorre prima sopprimere la parte dello spettro di Fourier a frequenze superiori a 44 KHz... ma lo si fa sempre d'ufficio, tanto il nostro udito non arriva a percepire frequenze superiori ai 16 KHz. Ma allora, se abbiamo una immagine campionata ad una data risoluzione, possiamo con questi sistemi aumentarne la risoluzione senza perdite, ossia gratis? È proprio necessario comprare macchine fotografiche con sensori ad altissima risoluzione?

Sì e no. Per una immagine è assai più difficile liberarsi delle alte frequenze tramite un filtraggio senza introdurre visibili perdite di contrasto che rendono le immagini "soft". Inoltre, ogni canale di un'immagine tipica ha una profondità di colore di soli 8 bit: ossia, è un segnale quantizzato i cui valori puntuali variano fra solo 256 scelte. Per questo motivo, la ricostruzione analitica è meno interessante, e tanto vale usare formule di approssimazione polinomiale, come avviene ad esempio nei software di ritocco fotografico.

Ecco una naturale estensione: nelle applicazioni, spesso capita di dover utilizzare dati non campionati a passo uniforme. Ad esempio, alcuni campioni si possono perdere se il sensore funziona male, oppure, nel caso di campionamenti bidimensionali, tipicamente quelli per im-

magini mediche, l'apparato di misura può essere strutturato per effettuare misure su griglie a distribuzione radiale invece che ortogonale. I campionamenti non uniformemente distribuiti spostano la modellazione matematica dal dominio dell'analisi di Fourier a quello dell'analisi reale o dell'analisi numerica, e quindi esulano dalla linea sviluppata in questa presentazione; nondimeno, ne accenneremo i risultati.

Questo articolo si propone di spiegare le basi matematiche della ricostruzione dei segnali campionati, legate all'analisi di Fourier (e di accennare fugacissimamente alle applicazioni audio e video). La presentazione è indirizzata ad un pubblico non specialistico, ma non intende essere puramente divulgativa: anche se i dettagli di quasi tutte le dimostrazioni vengono omesse, di molte di esse viene accennata l'idea. Inoltre, sarebbe possibile spiegare il Teorema del Campionamento di Shannon utilizzando soltanto argomenti sulle serie di Fourier e la Formula di Somma di Poisson, ma questo ci costringerebbe a presentare i dettagli di una dimostrazione lunga e faticosa (i quali erano già noti prima di Shannon, e sono talvolta attribuiti a Whittaker: per cenni storici si veda [1]). Invece, pur rispettando il rigore, la linea dimostrativa qui esposta è molto più visualizzabile, ed a prima vista sembra un argomento basato sull'esame di istogrammi dei dati. In realtà, la dimostrazione è del tutto rigorosa (ed anzi più completa), perché gli istogrammi hanno un significato matematico preciso nel senso di distribuzioni discrete. A questo fine è necessario presentare cenni sulla teoria delle distribuzioni e la loro analisi di Fourier. Naturalmente, occorre prima presentare uno scorcio dell'analisi di Fourier classica, cosa che facciamo nella Sezione 2. Ad alcuni lettori molti di questi enunciati sono già noti, ma probabilmente almeno la Formula di Somma di Poisson, un enunciato cruciale, sarà nuova. Dopo esponiamo un brevissimo outline sulle distribuzioni discrete: ci scusiamo con i lettori meno interessati a questi argomenti, che sono succintamente esposti nella Sezione 3, ma il senso di questo articolo è proprio mostrare come strumenti matematici sofisticati, uniti ad una adeguata dose di creatività, modellano in maniera molto fruttuosa le questioni tipiche della teoria del segnale. In ogni caso, per chi vuol saltare questa Sezione, gli enunciati che ci servono sono poi riassunti nel Compendio all'inizio della Sezione 4.

Per tutte le dimostrazioni si rinvia a [9, Capitoli 5, 8, 11, 13]: si tratta di un libro in formato elettronico. I lettori a disagio con la consultazione di un trattato in formato elettronico possono trovare i preliminari sull'Analisi di Fourier in molti libri di Analisi Matematica: alcuni vecchi libri sono [3] (solo per le serie di Fourier), [10], e soprattutto [8] e [5]; si veda anche [4]. In particolare, [8] tratta succintamente le distribuzioni temperate; [11, Chapters 1, 6, 7] ne offre una esposizione molto più profonda. Per la ricostruzione dei segnali ed il teorema di Shannon, si consultino invece gli articoli originali in bibliografia.

2. – Coefficienti di Fourier e trasformata di Fourier

Vogliamo considerare spazi di funzioni integrabili con integrale finito: lo spazio $L^1[0, 1]$ delle funzioni integrabili nell'intervallo $[0, 1]$, con la norma $\|f\|_{L^1[0,1]} = \int_0^1 |f(x)| dx$, e lo spazio $L^1(\mathbb{R})$ delle funzioni integrabili su tutta la retta reale, con la norma $\|f\|_{L^1(\mathbb{R})} = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$. La lettera L che designa questi spazi è dovuta al fatto che qui stiamo usando l'integrale di Lebesgue: questo è necessario perché avremo bisogno di studiare serie convergenti in norma, e per questo ci servono spazi normati *completi* (ossia tali che le successioni di Cauchy hanno tutte limite). Invece che visualizzare una funzione $f \in L^1[0, 1]$ come definita solo sull'intervallo $[0, 1]$, spesso la immagineremo estesa per periodicità a tutto \mathbb{R} , ovvero in modo tale che $f(x+1) = f(x)$ per ogni x (in realtà, parlando di funzioni L^1 , dovremmo scrivere per *quasi* ogni x). In tal modo, la norma può essere calcolata con un integrale su qualsiasi intervallo di lunghezza uno: $\|f\|_{L^1[0,1]} = \int_a^{a+1} |f(x)| dx$ per qualsiasi $a \in \mathbb{R}$.

Analogamente, per $f \in L^1[0, 1]$ e per ogni intero $n \in \mathbb{Z}$, definiamo il *coefficiente di Fourier*

$$\widehat{f}(n) = \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i n x} dx.$$

Se la funzione f è a valori reali, si vede subito che la parte reale e la parte immaginaria di $\widehat{f}(n)$ danno luogo ai consueti coefficienti di Fourier in forma trigonometrica, rispettivamente $\int_0^1 f(x) \cos(2\pi i n x) dx$

e $\int_0^1 f(x) \sin(2\pi inx) dx$. Non c'è niente di imprescindibile nella scelta del periodo di passo 1, anche se è assai comodo per varie normalizzazioni. Qualora avessimo deciso di considerare funzioni periodiche di periodo T , quanto appena visto resterebbe valido, con le ovvie modifiche, se definissimo i coefficienti di Fourier come

$$(1) \quad \widehat{f}(n) = \int_0^T f(x) e^{-2\pi inx/T} dx.$$

La restrizione che n debba essere intero viene imposta per far sì che l'integrando rimanga periodico (di periodo 1). Se f è un segnale, ad esempio un segnale musicale, il coefficiente di Fourier $\widehat{f}(n)$ rappresenta l'ampiezza della sua componente corrispondente alla nota a frequenza n . In effetti, restringendo l'attenzione al sottospazio $L^2[0, 1]$ delle funzioni tali che

$$\|f\|_{L^2[0,1]} = \sqrt{\int_0^1 |f(x)|^2 dx} < \infty,$$

abbiamo il seguente risultato importante:

TEOREMA 2.1 (Teorema di Parseval). – *Per ogni $f \in L^2[0, 1]$, la serie di Fourier $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) e^{2\pi inx}$ converge alla funzione f nella norma L^2 , e si ha*

$$\|f\|_{L^2[0,1]}^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)|^2.$$

Nelle stesse ipotesi, la serie converge puntualmente quasi ovunque, ma questo è un risultato molto difficile: diventa facile, però, se si assumono adeguate ipotesi di regolarità, come ad esempio che la funzione periodica f sia di classe C^1 , ossia derivabile ovunque con continuità (come abituale nella modellazione fisica, assumiamo che tutti i nostri segnali siano addirittura C^∞ : derivabili infinite volte dappertutto). Sotto queste ipotesi di regolarità, la serie di Fourier converge puntualmente ovunque alla funzione f , ed anche uniformemente.

Consideriamo ora funzioni f in $L^1(\mathbb{R})$, per le quali non si ha periodicità, e quindi possiamo estendere i coefficienti di Fourier a frequenze

reali arbitrarie. In tal modo otteniamo, a partire da f , una nuova funzione \widehat{f} su tutto \mathbb{R} , che si chiama la *trasformata di Fourier* di f :

$$\widehat{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i s x} dx.$$

Per la trasformata di Fourier valgono proprietà di convergenza simili a quelle appena viste per la serie di Fourier. Qui naturalmente lo spazio $L^2(\mathbb{R})$ è definito dalla condizione $\|f\|_2 = \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx} < \infty$: non è un sottospazio di $L^1(\mathbb{R})$, ma $L^1 \cap L^2$ è denso sia in L^1 sia in L^2 .

TEOREMA 2.2 (Teorema di Plancherel e formula di inversione). – Per ogni $f \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R})$ vale l'isometria

$$(2) \quad \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(s)|^2 ds.$$

Pertanto, approssimando funzioni in L^2 con approssimanti nel sottospazio denso $L^1 \cap L^2$ (ad esempio i troncamenti a supporto compatto), possiamo definire \widehat{f} per ogni $f \in L^2(\mathbb{R})$, e l'isometria qui sopra resta valida. In altre parole, la trasformata di Fourier è una isometria (ovviamente iniettiva!) da $L^2(\mathbb{R})$ a $L^2(\mathbb{R})$. Essa è anche surgettiva: la sua inversa è

$$f^\vee(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{2\pi i s x} dx.$$

In altre parole, $f^\vee(s) = \widehat{f}(-s) := \widehat{f}^\dagger(s)$ (l'operatore \dagger , definito da $g^\dagger(s) = g(-s)$, si chiama la *parità*).

Se nel precedente enunciato si considera $f + ig$ al posto di f , e si separano le parti reali ed immaginarie, l'isometria (2) diventa la seguente formula di trasposizione:

COROLLARIO 2.3. – Per ogni $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $h \in L^\infty(\mathbb{R})$, scriviamo

$$(3) \quad \langle f, h \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) h(x) dx.$$

(questa espressione bilineare $\langle f, g \rangle$ si chiama dualità). Allora, se $f, g \in L^1(\mathbb{R})$,

$$\langle f, \widehat{g} \rangle = \langle \widehat{f}, g \rangle.$$

Lo stesso risultato vale per ogni $f, g \in L^2(\mathbb{R})$.

La trasformata di Fourier ha molte proprietà elementari: ne elenchiamo qui alcune.

TEOREMA 2.4 (Proprietà della trasformata di Fourier). – Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$. Allora \widehat{f} è continua e tende a zero all'infinito. Inoltre:

- (i) $|\widehat{f}(s)| \leq \|f\|_1$ per ogni $s \in \mathbb{R}$
- (ii) $\widehat{f^\dagger} = \widehat{f}^\dagger$: ossia, se $g(t) = f(-t)$, allora $\widehat{g}(s) = \widehat{f}(-s)$ per ogni $s \in \mathbb{R}$
- (iii) Se anche $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, allora $\widehat{\widehat{f}}(s) = f(-s)$ per ogni $s \in \mathbb{R}$
- (iv) Sia $h = A_a f$ il dilatato di f di passo a , ossia $h(t) = f(at)$, con $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$: allora $\widehat{h}(s) = \frac{1}{|a|} \widehat{f}\left(\frac{s}{a}\right)$ per ogni $s \in \mathbb{R}$
- (v) Sia $h = \lambda_{t_0} f$ il traslato di f di passo $t_0 \in \mathbb{R}$: allora $\widehat{h}(s) = e^{-2\pi i s t_0} \widehat{f}(s)$ per ogni $s \in \mathbb{R}$
- (vi) Se $g(t) = e^{2\pi i s_0 t} f(t)$, con $s_0 \in \mathbb{R}$, allora $\widehat{g}(s) = \widehat{f}(s - s_0)$ per ogni $s \in \mathbb{R}$
- (vii) La trasformata di Fourier di una funzione derivabile n volte con continuità tende a zero all'infinito come un infinitesimo di ordine almeno n e viceversa; più precisamente:
 - (a) se f , oltre ad appartenere a $L^1(\mathbb{R})$, è anche derivabile con continuità e $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = 0$, allora, denotando con D l'operatore di derivazione, si ha che \widehat{Df} è definita e $\widehat{Df}(s) = 2\pi i s \widehat{f}(s)$
 - (b) se $g(t) = t f(t)$ e $g \in L^1$, allora

$$\widehat{g}(s) = -\frac{1}{2\pi i} D\widehat{f}(s)$$

per ogni $s \in \mathbb{R}$ (ovvero, $D\widehat{f}(s) = -2\pi i \widehat{g}(s)$).

ESEMPIO 2.5 (La funzione seno cardinale) – Sia χ la funzione caratteristica dell'intervallo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ (che vale 1 su questo intervallo e zero altrove). Un calcolo diretto mostra che

$$\widehat{\chi}(s) = \frac{\sin(\pi s)}{\pi s}$$

se $s \neq 0$, e 1 se $s = 0$. La funzione $\widehat{\chi}$ così definita si chiama la funzione seno cardinale sinc. Si osservi che χ è discontinua, e $\widehat{\chi}$ tende a zero all'infinito ed è infinitesima di ordine 1, quindi non in $L^1(\mathbb{R})$: se fosse in L^1 avremmo una contraddizione, perché allora $\widehat{\widehat{\chi}} = \chi$ dovrebbe essere continua, per il teorema precedente.

Dalla proprietà di dilatazione (proprietà (iv) del teorema precedente) si vede che la trasformata di Fourier della funzione caratteristica $\chi_a(t) = \chi(at)$ dell'intervallo $[-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}]$ è

$$\frac{1}{a} \operatorname{sinc}\left(\frac{s}{a}\right) = \frac{\sin(\pi s/a)}{\pi s}.$$

Si noti che questa funzione tende a $1/a$ per $s \rightarrow 0$: questo è in accordo con il fatto che la trasformata di Fourier $\widehat{\chi}_a$ è continua e $\widehat{\chi}_a(0) = \|\chi_a\|_1 = 1/a$. \square

Infine, una proprietà fondamentale, che riguarda al tempo stesso coefficienti e trasformate di Fourier, ha a che fare con l'operazione di convoluzione di funzioni, definita nel modo seguente.

DEFINIZIONE 2.6 (Convoluzione). – Se f e g appartengono a $L^1(\mathbb{R})$, poniamo

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t) dt.$$

Segue dallo scambio dell'ordine di integrazione (teorema di Fubini) che la convoluzione è associativa e commutativa ($f * g = g * f$), appartiene ancora a L^1 , e $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.

Se invece f e g sono periodiche di periodo 1 ed hanno integrale finito in $[0, 1]$, allora definiamo

$$f * g(x) = \int_0^1 f(x-t)g(t) dt$$

(qui si capisce il vantaggio dell'interpretare funzioni in $L^1[0, 1]$ come periodiche: la quantità $x-t$ nell'ultimo integrale non appartiene sempre a $[0, 1]$, ma in tal modo l'integrale ha senso; se non avessimo considerato f come periodica, ora dovremmo riportare $x-t$ all'intervallo $[0, 1]$ tramite traslazioni di passo 1).

La moltiplicatività degli esponenziali ci regala questo risultato facilissimo ma essenziale:

COROLLARIO 2.7. – *La trasformata di Fourier trasforma convoluzioni in prodotti puntuali: se $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, allora $\widehat{f * g} = \widehat{f} \widehat{g}$.*

*Analogamente, se $f, g \in L^1[0, 1]$, allora, per ogni intero n , il coefficiente di Fourier è moltiplicativo: $\widehat{f * g}(n) = \widehat{f}(n) \widehat{g}(n)$.*

Ultimata questa breve panoramica delle proprietà della trasformata di Fourier, completiamo questa Sezione con un punto cruciale per le applicazioni alla teoria dei segnali: qual è il nesso fra coefficienti e trasformata di Fourier? I primi si definiscono a partire da funzioni periodiche mentre la seconda si basa su funzioni integrabili su \mathbb{R} , quindi si tratta di entità apparentemente non correlate. Però la trasformata di Fourier di una funzione $f \in L^1(\mathbb{R})$ si può approssimare con quella dei suoi troncamenti su intervalli abbastanza grandi, per i quali i coefficienti di Fourier sono definibili come in (1): quindi un legame è plausibile, ed in effetti c'è. Lo illustriamo nel prossimo enunciato.

DEFINIZIONE 2.8 (Periodicizzazione). – Sia $f \in L^1$. Fissato come periodo l'intervallo $[0, 1]$, definiamo la periodicizzazione $\phi = \mathcal{P}f$ di passo 1 di f come

$$(4) \quad \phi(x) \equiv \mathcal{P}f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x+k).$$

In maniera analoga si definisce la periodicizzazione \mathcal{P}_T di passo $T > 0$. La serie in (4) converge nella norma L^1 su ogni compatto (e quindi

puntualmente quasi ovunque), perché, per il Teorema di Convergenza Monotóna,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x+k) \right| dx &\leq \int_0^1 \sum_{k=-\infty}^{\infty} |f(x+k)| dx \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^1 |f(x+k)| dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx, \end{aligned}$$

e, poiché $f \in L^1(\mathbb{R})$, l'ultimo integrale è finito.

Ora vediamo che la trasformata di Fourier di $f \in L^1(\mathbb{R})$ alla frequenza intera n coincide con il coefficiente di Fourier n -simo del periodicizzato di passo 1 di f :

PROPOSIZIONE 2.9. – *Se $\phi = \mathcal{P}f$ denota il periodicizzato di passo 1 di $f \in L^1$, allora fra i coefficienti di Fourier di ϕ e la trasformata di Fourier di f intercorre la relazione seguente: per tutti gli $n \in \mathbb{N}$,*

$$\widehat{\phi}(n) = \widehat{f}(n).$$

Questo fatto non è miracoloso! L'idea della dimostrazione è semplice. Come prima, dalla definizione di periodicizzazione segue

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x+k)e^{-2\pi inx} \right| dx &\leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^1 |f(x+k)e^{-2\pi inx}| dx \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_k^{k+1} |f(x)| dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty, \end{aligned}$$

e quindi anche la serie $\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x+k)e^{-2\pi inx}$ converge in $L^1[0, 1]$. Allora possiamo scambiare serie ed integrale, e troviamo

$$\widehat{\phi}(n) = \int_0^1 \phi(x)e^{-2\pi inx} dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^1 f(x+k)e^{-2\pi inx} dx = \widehat{f}(n).$$

Ci servirà il corrispondente enunciato per la periodicizzazione di passo T , che segue subito dalla proprietà di dilatazione per la trasformata di Fourier e da (1), perché chiaramente il periodicizzato di

passo T di $f(x)$ è il dilatato con fattore di scala T del periodicizzato di passo 1 di $f(Tx)$:

COROLLARIO 2.10. – *Se nella Proposizione 2.9 si considera la periodicizzazione $\mathcal{P}_T f$ di passo $T > 0$, si ottiene*

$$\widehat{\mathcal{P}_T f}(n) = \frac{1}{T} \widehat{f}(n/T).$$

Questa relazione fra trasformata di Fourier di $f \in L^1$ e coefficienti di Fourier del periodicizzato di f porta ad un risultato fondamentale per il campionamento:

PROPOSIZIONE 2.11 (Formula di somma di Poisson). – *Sia f in $L^1(\mathbb{R})$ tale che la periodicizzazione*

$$(5) \quad \phi(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n)$$

converga ad un valore ben definito e finito per $x = 0$ (questo è vero, ad esempio, se f è continua – nel qual caso i suoi valori puntuali sono ben definiti – e se la serie converge puntualmente al punto $x = 0$). Supponiamo inoltre che la serie di Fourier di ϕ converga al punto 0 al valore $\phi(0)$. Allora vale la seguente Formula di Somma di Poisson:

$$(6) \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n).$$

Le ipotesi su ϕ sono verificate, ad esempio, se $f \in C^1 \cap L^1$. Esse sono anche verificate se f e \widehat{F} decrescono in maniera sufficientemente rapida, ad esempio se sono entrambe in L^1 . A noi interessa soprattutto il caso particolare in cui f sia C^∞ e a decrescenza rapida con tutte le derivate, ossia, $P(x)D^n f(x)$ tende a zero per $|x| \rightarrow \infty$ per ogni polinomio P e per tutte le derivate di ogni ordine n (compreso $n = 0$: $D^0 f = f$). Vedremo in seguito che queste funzioni formano uno spazio vettoriale topologico completo, che si chiama la *classe di Schwartz*.

Un altro caso particolare è quello dello spazio B_c delle funzioni $\phi \in L^1$ la cui trasformata di Fourier è nulla al di fuori di un intervallo $[-c, c]$. La proprietà (vii) del Teorema 2.4 mostra che queste funzioni ϕ sono C^∞ , e da questo segue facilmente la validità della Formula di Somma di Poisson (si badi però che la compattezza del supporto di \hat{f} , pur assicurando che f sia una funzione C^∞ , non implica affatto che essa decresca in maniera rapida, o persino che sia in L^1). Lo spazio B_c si chiama lo spazio delle funzioni a banda limitata, o *classe di Paley–Wiener*.

3. – Delta di Dirac e distribuzioni

Ora ci accingiamo a modellare matematicamente il campionamento di segnali e la loro ricostruzione. Per questa modellazione accenniamo (molto succintamente) ad uno strumento matematico duttile e prezioso, la teoria delle distribuzioni (limitando qui l'attenzione alle distribuzioni temperate), sviluppata in piena generalità da Laurent Schwartz nel 1949 (si veda [12]), ma introdotta precedentemente da Sobolev per lo studio delle equazioni differenziali alle derivate parziali, ed ancora prima, ma solo nel caso elementare della distribuzione delta, dal fisico teorico P. A. M. Dirac per i modelli matematici della meccanica quantistica. Nella teoria del campionamento di segnali in realtà si utilizza proprio quest'unica distribuzione, la *delta di Dirac*, ma anche le proprietà di convergenza di serie di delta nello spazio delle distribuzioni. Per venire incontro al lettore troppo scoraggiato da una teoria matematica alquanto astratta, o forse troppo poco curioso della bellezza della matematica, gli suggeriamo di saltare questa Sezione e limitarsi a leggere il breve compendio all'inizio della successiva.

Cosa sia un valore campionato è chiaro: se il segnale viene rappresentato da una funzione $f(t)$ del tempo, allora il suo valore campionato al tempo t_0 è $f(t_0)$. Quindi il campionamento al tempo t_0 è un funzionale:

$$\delta_{t_0}(f) = f(t_0).$$

Consideriamo uno spazio vettoriale appropriato V di funzioni che rappresentano segnali. È chiaro che il funzionale δ_{t_0} è lineare:

$\delta_{t_0}(c_1f + c_2g) = c_1f(t_0) + c_2g(t_0) = c_1\delta_{t_0}(f) + c_2\delta_{t_0}(g)$. La linearità è un ingrediente utile per l'analisi, ma insufficiente. Vogliamo essere in grado di approssimare un segnale dato con altri più semplici, e vogliamo che i valori campionati degli approssimanti si avvicinino a quello del segnale approssimato: per questo occorre che il funzionale sia anche *continuo*. Purtroppo, però, la continuità del funzionale dipende dalla topologia dello spazio di funzioni V su cui è definito. Vediamo il caso più ovvio: modelliamo i segnali con funzioni continue tendenti a zero all'infinito, in accordo con il motto *natura non facit saltus*. Ossia, $V := C_0(\mathbb{R})$: questo spazio ha una sua topologia naturale, quella della convergenza uniforme, indotta dalla norma uniforme $\|f\|_\infty = \max_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|$. Ora è chiaro che δ_{t_0} è continuo sullo spazio normato $C_0(\mathbb{R})$, perché $|\delta_{t_0}(f)| = |f(t_0)| \leq \|f\|_\infty$ (e quindi, se $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$, anche $\delta_{t_0}(f_n) - \delta_{t_0}(f) \rightarrow 0$). Purtroppo, però, questo non ci basta. Come vedremo, nello studio del campionamento la delta si può considerare un segnale puramente impulsivo (quindi non una funzione...), e riveste cruciale importanza il *treno di impulsi*: la serie $K = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_n$. Vorremmo che questa serie convergesse: ma, fissata $f \in C(\mathbb{R})$, troviamo

$$(7) \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_n(f) - \sum_{n=-N}^N \delta_n(f) = \sum_{|n|>N} \delta_n(f)$$

e l'ultima serie non tende a zero con N , anzi di solito neppure converge ad un valore finito (dipende dalla velocità con cui tende a zero la funzione f). Per inciso, notiamo invece che la serie all'ultimo membro diventa identicamente nulla per grandi valori di N se f è a *supporto compatto*, ossia se ha supporto in un intervallo limitato.

Allora dobbiamo cercare spazi V più adatti, necessariamente più piccoli di $C_0(\mathbb{R})$; inoltre, ci piacerebbe limitare l'attenzione a segnali *lisci*, ossia infinitamente derivabili, sempre perché *natura non facit saltus*. L'ultima osservazione ci porta ad un candidato assai ragionevole per lo spazio dei segnali: $V = \mathcal{D}$, lo spazio delle funzioni infinitamente derivabili ed a supporto compatto. Se f è in questo spazio, abbiamo già visto che la serie all'ultimo membro di (7) tende a zero quando $N \rightarrow \infty$. Purtroppo, è molto complicato introdurre su \mathcal{D} una

topologia che lo renda uno spazio completo: sarebbe invece molto facile se restringessimo l'attenzione a segnali tutti con supporto dentro un unico compatto, ma non vogliamo farlo, perché vogliamo poter modellare segnali di durata arbitrariamente lunga (per approfondimenti su questi delicati dettagli topologici, peraltro qui non necessari, il lettore interessato può consultare [9, Cap. 3] o [11, Chapters 1, 6]). Ma abbiamo un surrogato assolutamente ideale: la cosiddetta *classe di Schwartz*, ossia lo spazio \mathcal{S} delle funzioni infinitamente derivabili a *decrecenza rapida*, ossia che tendono a zero all'infinito con tutte le derivate a velocità più che polinomiale (cioè più rapidamente di $1/P(x)$ dove P è un qualsiasi polinomio). La decrecenza rapida assicura ancora una volta che la serie all'ultimo membro di (7) tenda a zero quando $N \rightarrow \infty$, e quindi assicura la convergenza della serie nel treno di impulsi.

Diamo solo un brevissimo cenno della topologia su \mathcal{S} . Se $f \in \mathcal{S}$, abbiamo già osservato (nella Proposizione 2.11) che per tutti gli interi $n, k \geq 0$ la quantità $p_{n,k}(f) = \max\{(1 + |x|^k) |D^n f(x)|\}$ esiste finita. Queste quantità $p_{n,k}$ sono una famiglia numerabile di norme su \mathcal{S} , ed inducono la seguente nozione di convergenza: $f_j \rightarrow f$ in \mathcal{S} se $p_{n,k}(f_j - f) \rightarrow_j 0$ per ogni n e k . Un esercizio standard in topologia rivela che un funzionale lineare T su \mathcal{S} è continuo se e solo se esistono un numero finito di norme $p_{n,k}$ tali che $|T(f)| \leq C p_{n,k}(f)$ per tutte le f in \mathcal{S} e per una qualche costante $C > 0$. Ma allora, ogni δ_{t_0} è un funzionale continuo, perché $|\delta_{t_0}(f)| \leq \|f\|_\infty = p_{0,0}(f)$.

Ma c'è il seguente altro motivo che ci spinge a scegliere provvisoriamente \mathcal{S} come lo spazio dei segnali (presto, peraltro, dovremo cambiare scelta). La proprietà (vii) del Teorema 2.4 mostra che la trasformata di Fourier di una funzione C^∞ (con tutte le derivate integrabili) è a decrecenza rapida, e viceversa. Questo lascia capire che le trasformate di Fourier delle funzioni C^∞ e a *decrecenza rapida* sono esattamente le funzioni C^∞ e a *decrecenza rapida*. In altre parole, vale il seguente risultato elegante e potente:

TEOREMA 3.1. – *La trasformata di Fourier manda \mathcal{S} in \mathcal{S} in maniera iniettiva, surgettiva e continua.*

Se avessimo invece limitato l'attenzione alle funzioni C^∞ a supporto compatto, un risultato analogo sarebbe completamente falso. In fatti, è facile mostrare, mediante un ragionamento elementare basato sullo sviluppo in serie di Taylor [9, Sez. 8.7], che un segnale non può essere localizzato simultaneamente nel tempo e nella frequenza, nel senso che se una funzione integrabile è a supporto compatto, allora la sua trasformata di Fourier è C^∞ ma non è a supporto compatto, anzi di più, non può essere identicamente nulla in alcun intervallo aperto.

(Non abbiamo accennato al motivo per cui la trasformata di Fourier su \mathcal{S} è anche continua: il lettore interessato può trovare la dimostrazione in [9, Cap. 9], [11, Chap. 7] o [8].)

NOTA 3.2. – In tal modo, stiamo modellando il campionamento al tempo t_0 come l'azione di un funzionale lineare sullo spazio dei segnali. Il lettore più acuto si sarà reso conto del fatto che questa modellazione è poco adeguata dal punto di vista fisico: per campionare un segnale dobbiamo far agire uno strumento di misura, e questo non ha una risposta istantanea, quindi non restituisce un valore istantaneo al tempo t_0 bensì una media temporale in un piccolo intervallo di tempi $[t_0 - \frac{1}{n}, t_0 + \frac{1}{n}]$. In altre parole, fissato lo strumento di misura, il valore campionato che ne otteniamo è un altro funzionale continuo su \mathcal{S} , e precisamente

$$(8) \quad T_n(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n(t) f(t) dt,$$

dove il peso ϕ_n (la *risposta impulsiva* dello strumento) è una opportuna funzione non negativa di integrale 1 (perché l'integrale deve dar luogo ad una media pesata) con supporto in $[t_0 - \frac{1}{n}, t_0 + \frac{1}{n}]$. Ma allora,

$$T_n(f) = \int_{t_0 - \frac{1}{n}}^{t_0 + \frac{1}{n}} \phi_n(t) f(t) dt.$$

Quando n cresce (ossia quando sostituiamo lo strumento di misura con altri via via più rapidi), il valore medio integrale $T_n(f)$ converge al valore istantaneo $f(t_0)$, e quindi quest'ultimo ha il significato fisico di estrapolazione dei valori realmente misurati all'affinarsi del procedimento di misura.

La famiglia di approssimanti ϕ_n si chiama una *approssimazione della delta*. Anche se ciò esula dalla finalità di questa presentazione, esiste una topologia naturale sullo spazio S' dei funzionali continui su S , quella per la quale $T_m \in S'$ converge a $T \in S'$ se $T_m(f) \rightarrow T(f)$ per ogni $f \in S$: in questa topologia naturale, gli approssimanti della delta convergono alla delta.

Lo spazio S' dei funzionali continui su S si chiama *spazio delle distribuzioni temperate*. Qui non abbiamo occasione di menzionare distribuzioni non temperate, e quindi di solito omettiamo questo aggettivo. \square

In questa luce, quanto visto nel caso $f \in S$ a proposito della convergenza a zero dell'ultimo membro di (7) ora si traduce in:

COROLLARIO 3.3. – *Il treno di impulsi $K = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_n$ è una distribuzione, ossia la serie che lo definisce è convergente nella topologia di S' .*

La precedente Nota 3.2 è stimolante solo per i lettori molto interessati alla fisica dei segnali, ma l'abbiamo presentata perché aiuta a capire una notazione utilizzata frequentemente ed assai comoda. Invece che scrivere $\delta_{t_0}(f)$, parafrasando (8) scriveremo spesso $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_{t_0}(t)f(t) dt$, come se la delta fosse rappresentata da una funzione. Si badi bene che non lo è: se lo fosse dovrebbe avere supporto nel solo punto t_0 , ed allora l'integrale sarebbe sempre nullo. Quindi la notazione è solo allusiva, ma è comoda. Un altro modo, più compatto ed in fondo più corretto, di riscrivere questa notazione integrale è tramite la dualità introdotta in (3), come $\delta_{t_0}(f) = \langle \delta_{t_0}, f \rangle$. Cogliamo l'occasione dell'aver introdotto questa notazione integrale per osservare come le traslazioni e le dilatazioni agiscono sulla distribuzione delta di Dirac δ_{t_1} . Definiamo la traslazione come

$$\begin{aligned} (\lambda_{t_0} \delta_{t_1})f &= \int \delta_{t_1}(s - t_0)f(s) ds = \int \delta_{t_1}(s)f(s + t_0) ds \\ &= f(t_1 + t_0) = \delta_{t_1+t_0}f \end{aligned}$$

e la dilatazione come

$$\begin{aligned} (A_a \delta_t) f &= \int \delta_t(as) f(s) ds = \frac{1}{|a|} \int \delta_t(x) f\left(\frac{x}{a}\right) dx \\ &= \frac{1}{|a|} f\left(\frac{t}{a}\right) = \frac{1}{|a|} \delta_{\frac{t}{a}} f. \end{aligned}$$

Ovvero,

$$(9) \quad \lambda_{t_0} \delta_{t_1} = \delta_{t_1+t_0}$$

$$(10) \quad A_a \delta_t = \frac{1}{|a|} \delta_{\frac{t}{a}}.$$

Approfittiamo ulteriormente di questa notazione integrale per spiegare in maniera plausibile due proprietà della delta che ci servono ma che non intendiamo formulare in maniera completamente accurata: la trasformata di Fourier e la convoluzione. La prima, in realtà, ci serve per tutte le distribuzioni, e ne ricalchiamo la definizione a partire dalla formula di Plancherel del Corollario 2.3:

DEFINIZIONE 3.4 (Trasformata di Fourier di distribuzioni). – Data una distribuzione $F \in \mathcal{S}$, la sua trasformata di Fourier è la distribuzione \widehat{F} definita da

$$\langle \widehat{F}, g \rangle = \langle F, \widehat{g} \rangle$$

per ogni $g \in \mathcal{S}$ (la definizione ha senso proprio perché abbiamo visto che la trasformata di Fourier è surgettiva da \mathcal{S} a \mathcal{S} , e quindi ogni funzione di Schwartz è del tipo \widehat{g} per qualche funzione di Schwartz g).

ESEMPIO 3.5 – La trasformata di Fourier della delta δ_{t_0} è la funzione $e^{-2\pi i t_0 s}$, nel senso che è la distribuzione ottenuta integrando una generica funzione $g \in \mathcal{S}$ con il peso $e^{-2\pi i t_0 s}$:

$$\langle \widehat{\delta_{t_0}}, g \rangle = \langle \delta_{t_0}, \widehat{g} \rangle = \widehat{g}(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} g(s) e^{-2\pi i t_0 s} ds = \langle e^{-2\pi i t_0 s}, g \rangle.$$

In particolare, $\widehat{\delta_0} \equiv 1$. □

COROLLARIO 3.6. – *La convoluzione di una funzione $g \in \mathcal{S}$ con δ_{t_0} è la traslazione λ_{t_0} di passo t_0 :*

$$\delta_{t_0} * g(t) = \lambda_{t_0} g(t) := g(t - t_0).$$

DIMOSTRAZIONE. – In effetti, scriviamo $\delta_{t_0} g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_{t_0}(t) g(t) ds$. Allora è naturale definire la convoluzione così: $\delta_{t_0} * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_{t_0}(t - s) g(s) ds$. Ora, per il modo in cui la delta è definita, l'ultimo integrale vale esattamente $g(s)$ dove s è tale che $t - s = t_0$, ossia $s = t - t_0$. Da qui segue $\delta_{t_0} * g(t) = g(t - t_0)$. \square

Si osservi in particolare che da questo Corollario segue $\widehat{\delta_{t_0} * g} = \widehat{\lambda_{t_0} g}$. Dalla proprietà di traslazione per la trasformata di Fourier di funzioni (proprietà (v) del Teorema 2.4) segue che $\widehat{\lambda_{t_0} g} = e^{-2\pi i t_0 s} \widehat{g}(s) = \widehat{\delta_{t_0} \widehat{g}}$. Perciò la moltiplicatività della trasformata di Fourier della convoluzione continua a valere in questo contesto più generale delle distribuzioni. In effetti, sarebbe stato più corretto *definire* la convoluzione con la delta a partire dalla richiesta che la trasformata di Fourier della convoluzione restasse moltiplicativa, anziché nel modo intuitivo non rigoroso che abbiamo adottato.

Ecco un'altra proprietà utile della delta. Data una distribuzione F , ha senso definire la moltiplicazione di F per una funzione $g \in C^\infty$ con tutte le derivate a crescita polinomiale. Basta trasportare questa operazione per dualità a partire da quella consueta per funzioni, cioè dalla regola ovvia $(gh)(t) = g(t)h(t)$ (come abbiamo già fatto per la trasformata di Fourier nella Definizione 3.4): per ogni $h \in \mathcal{S}$, poniamo

$$\langle gF, h \rangle = \langle F, gh \rangle.$$

Qui $h \in \mathcal{S}$, e gh appartiene ancora a \mathcal{S} se g è C^∞ a crescita polinomiale insieme a tutte le sue derivate (quest'ultimo fatto è plausibile ma non ovvio, perché occorre dimostrare il fatto elementare che le norme $p_{k,n}(fg)$ sono dominate da una somma finita di norme di g : per una dimostrazione, si veda [9, Esempio 9.5.4]).

COROLLARIO 3.7. – *Per ogni $f \in C^\infty$ a crescita polinomiale insieme a tutte le derivate, la moltiplicazione di f con la delta dà il seguente risultato: $f \delta_{t_0} = f(t_0) \delta_{t_0}$.*

DIMOSTRAZIONE. –

$$\langle f\delta_{t_0}, g \rangle = \langle \delta_{t_0}, fg \rangle = f(t_0)g(t_0) = f(t_0)\langle \delta_{t_0}, g \rangle.$$

□

Il precedente Corollario permette una modellazione intelligente del campionamento di un segnale $f(t)$ a valori equispaziati del tempo, diciamo ai valori interi $t = n \in \mathbb{Z}$. Infatti, consideriamo la distribuzione $fK = f(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_n$. Ora sappiamo che $fK = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)\delta_n$. Stabiliamo la seguente notazione grafica: indichiamo il segnale puramente impulsivo dato dalla delta di Dirac δ_n con un segmento verticale di altezza 1 sopra il punto di ascissa n , cioè da $(n, 0)$ a $(n, 1)$. Per chiarire subito un possibile malinteso, questa visualizzazione grafica non mira a rappresentare il grafico della delta come se fosse una funzione: se lo fosse, data la forma dei suoi approssimanti illustrata nella Nota 3.2, il suo grafico dovrebbe avere supporto sul solo punto n ma essere infinitamente alto. Invece il grafico ha altezza 1: il lettore esperto si accorge che questa altezza che abbiamo scelto è la norma della delta come misura.

A questo punto, la distribuzione fK corrisponde ad un grafico di segmenti verticali sopra i punti di ascissa $n \in \mathbb{Z}$ di altezza $f(n)$: ossia all'*istogramma* della successione dei campioni. L'istogramma è un disegno... ma con la teoria delle distribuzioni ora gli abbiamo dato una natura matematica concreta, sulla quale possiamo operare con le regole stabilite per le distribuzioni. Grazie a queste regole di calcolo, nella prossima Sezione proveremo il teorema del campionamento.



Fig. 1. – L'istogramma dei dati campionati fK .

Ora, finalmente, possiamo capire il significato della Formula di Somma di Poisson nella teoria delle distribuzioni. Dal fatto che la serie $K = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_n$ converge nella topologia delle distribuzioni (Corollario 3.3), dalla continuità della trasformata di Fourier su \mathcal{S}' e dal calcolo della

trasformata di Fourier della delta svolto nell'Esempio 3.5 segue

$$\widehat{K}(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{\delta}_n(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i n s}.$$

Quindi quest'ultima serie deve convergere nel senso delle distribuzioni. Ma puntualmente non converge per nessun s , perché il termine generico $e^{-2\pi i n s}$ ha sempre modulo 1 e quindi non tende a zero. Allora quale è la somma della serie nel senso delle distribuzioni? Questo lo sappiamo già, perché la risposta è data dalla Formula di Somma di Poisson (6), che ora diventa:

COROLLARIO 3.8. – $\widehat{K} = K$.

Ci servirà anche considerare il campionamento a passo costante τ per $\tau \neq 1$, ossia, in base a (10), la distribuzione discreta $K_{\frac{1}{\tau}} := A_{\frac{1}{\tau}}K$, che grazie a (10) è data da $\frac{1}{\tau}K_{\frac{1}{\tau}} = \frac{1}{\tau} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{\frac{1}{\tau}}\delta_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{\delta}_{n\tau}$. Dalla proprietà di dilatazione per la trasformata di Fourier (proprietà (iv) del Teorema 2.4), o più precisamente dal suo analogo per distribuzioni, segue quindi

COROLLARIO 3.9. – Per ogni $\tau > 0$, $\widehat{K}_{\frac{1}{\tau}} = \tau K_{\tau}$.

Infine, il fatto che la trasformata di Fourier scambia convoluzioni con prodotti ed il fatto che la convoluzione con la delta è una traslazione ci rivelano quale sia la trasformata di Fourier della distribuzione istogramma:

COROLLARIO 3.10. –

$$\widehat{fK}(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n \widehat{f}(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(s - n)$$

ossia la trasformata di Fourier dell'istogramma di passo 1 di f è una serie di repliche di \widehat{f} traslate di passo 1.

Analogamente, per l'istogramma di passo $\frac{1}{\tau}$,

$$\widehat{fK}_{\frac{1}{\tau}} = \tau \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_{n\tau} \widehat{f} = \tau \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(s - n\tau).$$

DIMOSTRAZIONE. –

$$\widehat{fK} = \widehat{f} * \widehat{K} = \widehat{f} * K = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f} * \delta_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n \widehat{f} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(s - n).$$

Il caso di passo τ segue dalla proprietà di dilatazione del precedente Corollario 3.9. \square

4. – Campionamento e ricostruzione di segnali

Cominciamo questa Sezione con un brevissimo compendio dei risultati della Sezione precedente sulle distribuzioni temperate che ci sono indispensabili per la ricostruzione di segnali da dati campionati.

COMPENDIO. – Per ogni $t \in \mathbb{R}$, la delta di Dirac δ_t è il funzionale lineare sulla classe di Schwartz (delle funzioni C^∞ con tutte le derivate rapidamente decrescenti all'infinito) definito da

$$\delta_t(f) = f(t)$$

(spesso scriviamo $\langle \delta_t, f \rangle$ invece che $\delta_t(f)$). Questo funzionale è continuo nella topologia naturale della classe di Schwartz, ed in questa topologia la serie $K = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_n$ (che chiamiamo treno di impulsi) è convergente. Inoltre

- (i) Ha senso convolvere una funzione $f \in C^\infty$ con tutte le derivate a crescita polinomiale con una distribuzione, ed in particolare $f * \delta_t = \lambda_t f$, dove λ_t è la traslazione a destra di passo t , definita da $\lambda_t g(x) = g(x - t)$ (Esempio 3.6).
- (ii) È possibile moltiplicare a sinistra il treno di impulsi con una funzione C^∞ con tutte le derivate a crescita polinomiale, e si ottiene la seguente nuova distribuzione (l'istogramma di f):

$$fK = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \delta_n$$

(Corollario 3.7).

- (iii) La trasformata di Fourier è definita sullo spazio \mathcal{S}' delle distribuzioni (ed è iniettiva, surgettiva e continua), e manda la convoluzione fra una funzione ed una distribuzione nel prodotto puntuale delle loro trasformate (Teorema 3.1).
- (iv) La trasformata di Fourier di δ_t è (una distribuzione data da) una funzione, e precisamente $s \mapsto e^{2\pi i s t}$ (Esempio 3.5).
- (v) $\widehat{K} = K$, e quindi la trasformata di Fourier dell'istogramma di f è una serie di repliche di \widehat{f} traslate di passo 1:

$$\widehat{fK} = \widehat{f} * K = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f} * \delta_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n \widehat{f}$$

(Corollari 3.8 e 3.9).

- (vi) Il dilatato K_τ di passo τ di K , ossia $K_\tau := A_\tau K = \frac{1}{\tau} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_{\frac{n}{\tau}}$, verifica

$$\widehat{K}_{\frac{1}{\tau}} = \tau K_\tau,$$

e quindi

$$(11) \quad \widehat{fK}_{\frac{1}{\tau}} = \tau \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_{n\tau} \widehat{f}$$

è la serie delle repliche di \widehat{f} traslate di passo τ (Corollario 3.9).

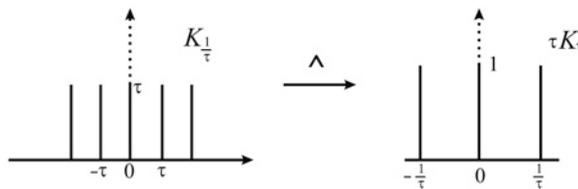


Fig. 2 - $\widehat{K}_{\frac{1}{\tau}} = \tau K_\tau$.

Da queste proprietà segue facilmente la seguente formula di ricostruzione del segnale a partire da campioni equidistribuiti, che forse apparve miracolosa ai suoi scopritori, ad esempio Whittaker e Kotelnikov, e certo utilissima ai loro continuatori Shannon e Nyquist:

TEOREMA 4.1 (Teorema del Campionamento, o sviluppo in serie di Whittaker). – Se $\widehat{f}(\omega) = 0$ per ogni ω tale che $|\omega| > \omega_c > 0$, allora, scegliendo $\tau \leq \frac{1}{2\omega_c}$, è possibile ricostruire esattamente (senza perdite, a parte arrotondamenti numerici) la funzione f ad ogni punto $t \in \mathbb{R}$ in base alla seguente identità:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\tau) \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{\tau} - k\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\tau) \operatorname{sinc}\left(\frac{t - k\tau}{\tau}\right).$$

Questa formula, che evidentemente rappresenta una convoluzione discreta, ormai non è più miracolosa! Infatti, grazie alle proprietà appena viste, i vari passi che portano al risultato si possono visualizzare sotto forma di semplici disegni di istogrammi, come ora mostreremo. Cominciamo dalla proprietà (vi) del Compendio, indicando d'ora in poi i tempi con la variabile t e le frequenze con ω :

$$f\widehat{K}_{\frac{1}{\tau}}(\omega) = \tau \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}\left(\omega - \frac{n}{\tau}\right).$$

Abbiamo supposto che f appartenga alla classe di Paley–Wiener B_{ω_c} , ossia $\operatorname{supp}\widehat{f} \subset [-\omega_c, \omega_c]$. Pertanto

$$\operatorname{supp}\widehat{f}\left(\cdot - \frac{n}{\tau}\right) = \operatorname{supp}(\lambda_{\frac{n}{\tau}}\widehat{f}) \subset \left[-\omega_c + \frac{n}{\tau}, \omega_c + \frac{n}{\tau}\right].$$

Ora, se prendiamo $\tau = \frac{1}{2\omega_c}$, abbiamo

$$\frac{n}{\tau} = 2n\omega_c$$

e

$$\left[-\omega_c + \frac{n}{\tau}, \omega_c + \frac{n}{\tau}\right] = [(2n - 1)\omega_c, (2n + 1)\omega_c].$$

Al variare di n gli intervalli $[(2n - 1)\omega_c, (2n + 1)\omega_c]$ sono contigui ma non si sovrappongono: infatti, se $J_n := [(2n - 1)\omega_c, (2n + 1)\omega_c]$, il punto finale di J_n è $(2n + 1)\omega_c$ ed il punto iniziale di J_{n+1} è lo stesso punto $(2(n + 1) - 1)\omega_c = (2n + 1)\omega_c$. Se avessimo scelto τ più grande,

invece, ci sarebbe stata sovrapposizione. Il caso senza sovrapposizione è quindi quello con passo di campionamento $\tau < \frac{1}{2\omega_c}$, che si chiama *campionamento adeguato*. Le due possibilità, campionamento adeguato o no, sono illustrate nelle Figure 3 e 4, rispettivamente.

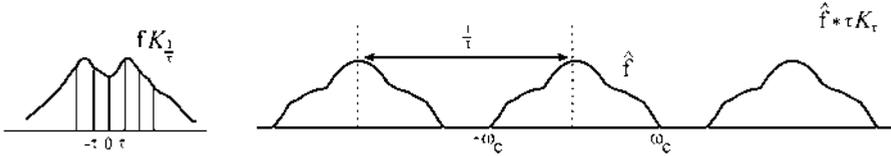


Fig. 3 – Campionamento adeguato, $\tau < \frac{1}{2\omega_c}$: le repliche di \hat{f} sono separate.

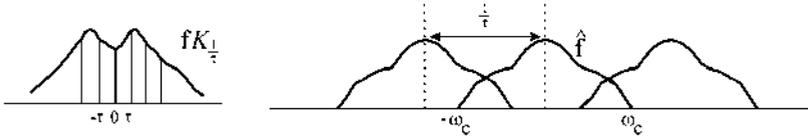


Fig. 4 – Campionamento inadeguato, $\tau > \frac{1}{2\omega_c}$: le repliche di \hat{f} si sovrappongono.

Nel teorema del campionamento si assume $\tau \leq \frac{1}{2\omega_c}$, ossia campionamento adeguato. Allora, consideriamo la distribuzione $fK_{\frac{1}{\tau}}$ (ossia l'istogramma dei dati campionati, che è noto, essendo il nostro dato di partenza): sappiamo che la sua trasformata di Fourier è una serie di traslati di repliche di \hat{f} a supporti a due a due disgiunti. Ma allora possiamo immediatamente recuperare la trasformata di Fourier di f ! Basta moltiplicare $\widehat{fK_{\frac{1}{\tau}}}$ per la funzione caratteristica $\chi_{[-\frac{1}{2\tau}, \frac{1}{2\tau}]}$ dell'intervallo centrato in 0 di lunghezza $\frac{1}{\tau}$, cioè della *finestra* $-\frac{1}{2\tau} \leq \omega \leq \frac{1}{2\tau}$ (ovvero per il filtro passa basso di frequenza di taglio $\frac{1}{2\tau}$). In tal modo, a parte una dilatazione di ampiezza τ , ritroviamo esattamente \hat{f} (Figura 5).

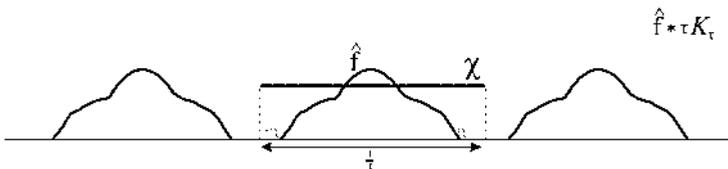


Fig. 5 – Campionamento adeguato: il filtraggio restituisce \hat{f} .

Dopo aver applicato il filtro abbiamo ottenuto \hat{f} , e basta applicare l'antitrasformata di Fourier per recuperare f : ecco qua, la ricostruzione è fatta.

Vediamo come si ottiene numericamente la ricostruzione. La moltiplicazione di $\widehat{fK}_{\frac{1}{\tau}}$ con $\chi_{[-\frac{1}{2\tau}, \frac{1}{2\tau}]}$ effettuata nel dominio delle frequenze, equivale, grazie alla proprietà (iii) del Compendio, a convolvere la distribuzione dei valori campionati $fK_{\frac{1}{\tau}}$ con l'antitrasformata di Fourier di $\chi_{[-\frac{1}{2\tau}, \frac{1}{2\tau}]}$, che è $\text{sinc}(\frac{t}{\tau})$ (Esempio 2.5). Ma questo è precisamente l'enunciato del teorema: la dimostrazione è completata.

L'ultima fase della dimostrazione è illustrata nella Figura 6. Si osservi che la formula finale restituisce il valore $f(t)$ ad ogni istante t come convoluzione (ossia media pesata) dei valori campionati ai tempi $n\tau$ con peso dato dalla funzione sinc: quindi, per fortuna, non c'è alcun bisogno di calcolare numericamente trasformate ed antitrasformate di Fourier come abbiamo fatto nella dimostrazione (il che sarebbe un compito di mole di calcolo proibitiva, impossibile).

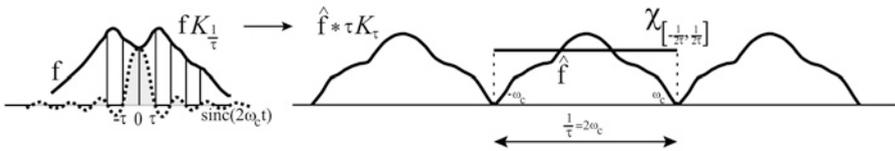


Fig. 6 – Ricostruzione al passo di campionamento corrispondente alla frequenza di taglio.

Osserviamo che la funzione $\text{sinc}(2\omega_c t)$ ottenuta antitrasformando il filtro passa basso (o passa banda) $\chi_{[-\omega_c, \omega_c]}$ è esattamente quel dilatato della sinc che vale 1 in 0 e 0 sugli altri punti della griglia di campionamento $\{\frac{n}{2\omega_c} : n \in \mathbb{Z}\}$. Questa osservazione è provvidenziale, perché equivale a dire che agli istanti di campionamento il valore ricostruito coincide con quello campionato.

Osserviamo infine che, nel caso di campionamento inadeguato, il procedimento non porta ad una ricostruzione senza perdite: il troncamento grazie al filtro passa basso non restituisce una copia esatta di \hat{f} , bensì una funzione differente agli estremi della banda, dove le basse e le alte frequenze si mescolano fra loro per dar luogo ad una media aritmetica. Questo errore di ricostruzione che mescola alte e basse frequenze si chiama *aliasing*.

4.1 – Campionamento multidimensionale e risoluzione di immagini

La trasformata di Fourier bidimensionale si definisce come

$$\begin{aligned}\widehat{f}(s, r) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-2\pi i(sx+ry)} dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-2\pi i s x} dx \right) e^{-2\pi i r y} dy,\end{aligned}$$

e quindi è l'iterazione di due trasformate di Fourier unidimensionali; analogamente per trasformate di Fourier multidimensionali. Ne segue che l'argomento appena presentato, e quindi il teorema del campionamento, continua a valere per segnali a dimensione $m > 1$ campionati su una griglia m -dimensionale equispaziata: basta sostituire la convoluzione del Teorema 4.1 con una analoga serie multipla con m indici. Questo è utile per ricostruire, ad esempio, segnali bidimensionali, come le immagini, i cui valori sono noti su una griglia equispaziata di pixel, quando vogliamo aumentarne artificialmente la risoluzione (ossia infittire i pixel).

4.2 – Aliasing

Ritorniamo ora a considerare il caso del campionamento inadeguato, cioè del campionamento con passo troppo lungo. Supponiamo che \widehat{f} sia supportata in $[-\omega_c, \omega_c]$, ma scegliamo un passo di campionamento $\tau > \frac{1}{2\omega_c}$. Allora il filtraggio del filtro passa-basso $\chi_{[-\frac{1}{2\tau}, \frac{1}{2\tau}]}$ non riesce a isolare una unica replica della trasformata di Fourier \widehat{f} perché i traslati di passo $\frac{1}{\tau} < 2\omega_c$ di \widehat{f} hanno supporti che si sovrappongono come nella Figura 4 (e nella parte alta della Figura 7). Perciò l'azione del filtro seleziona una replica del grafico di f sommata alle code delle repliche adiacenti. Se ad esempio $\omega_c = 1.2$ e $\tau = 0.5 > \frac{1}{2} \frac{1}{1.2}$ il supporto di $\chi_{[-\frac{1}{2\tau}, \frac{1}{2\tau}]}$ è l'intervallo $[-1, 1]$ e l'azione del filtro è illustrata nella parte bassa della Figura 7.

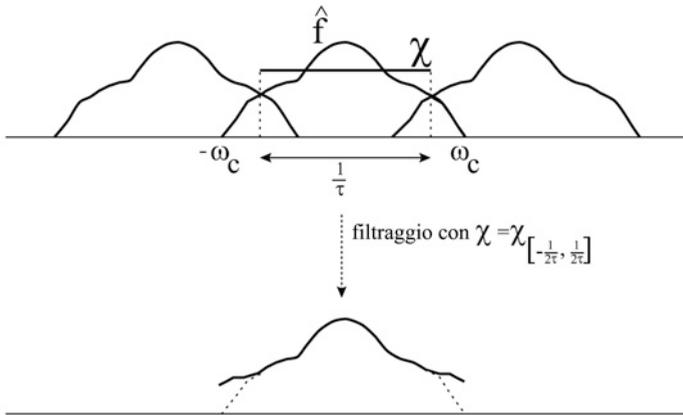


Fig. 7 – Campionamento inadeguato: filtraggio con aliasing.

Le aree tratteggiate indicano le zone dove le copie traslate consecutive del grafico di \hat{f} si sovrappongono (gli intervalli $[-\frac{1}{2\tau}, -\frac{1}{2\tau} + \frac{1}{2}(\omega_c - \frac{1}{2\tau})] = [-\frac{1}{2\tau}, \omega_c - \frac{1}{4\tau}]$). In quelle zone il risultato, dopo il filtraggio, differisce da \hat{f} . Quindi l'inversione di Fourier non ricostruisce il segnale originale.

Si noti che, nel dominio della frequenza, l'errore è dovuto a valori di $\hat{f} * \tau K_\tau$ a frequenza in valore assoluto maggiore di ω_c che si riversano su frequenze minori di ω_c . Per questo motivo questo errore si chiama *aliasing* (in italiano si potrebbe dire mascheramento): frequenze elevate si mascherano come frequenze più basse.

Nelle applicazioni alla musica, si vuole evitare che l'aliasing si manifesti nella ricostruzione di segnali acustici. Ad esempio, il nostro sistema uditivo non percepisce frequenze maggiori di 16 KHz e la maggior parte degli strumenti musicali (eccetto i sintetizzatori elettronici) non ha una emissione apprezzabile oltre i 5 o 6 KHz (neanche i sintetizzatori normalmente sono utilizzati per generare frequenze così elevate). Ovviamente udiamo anche frequenze ottenute dall'interferenza tra due diverse sorgenti. Poiché $e^{2\pi i \omega_1 t} e^{\pm 2\pi i \omega_2 t} = e^{2\pi i (\omega_1 \pm \omega_2) t}$, si ha

$$\begin{aligned} \sin 2\pi(\omega_1 - \omega_2)t &= \sin(2\pi\omega_1 t) \cos(2\pi\omega_2 t) + \cos(2\pi\omega_1 t) \sin(2\pi\omega_2 t) \\ &= \text{combinazione lineare di prodotti di } e^{2\pi i \omega_1 t}, e^{\pm 2\pi i \omega_2 t}. \end{aligned}$$

Quindi, se un sintetizzatore emettesse una frequenza, diciamo, di 18 KHz e simultaneamente un violino o un pianoforte producessero un

suono con componenti in frequenza di ampiezza apprezzabile intorno ai 2 KHz, potremmo percepire una traccia di quella componente in frequenza a 18 KHz attraverso la sua interferenza a $18-2=16$ KHz con l'armonica emessa dal violino o dal pianoforte.

Per non perdere nulla del segnale originale, quindi, non ci si limita a ricostruirlo esattamente nella banda di frequenza fono a 16 KHz, si va oltre: si è deciso di riprodurre senza perdita i segnali musicali con spettro di frequenza nullo oltre i 22 KHz, per sicurezza. Quindi la frequenza di campionamento è di 44 KHz ($= 2\omega_c$). Questa è la soglia di campionamento per la registrazione digitale (su Compact Disc).

La scalettatura che si nota quando si tracciano linee rette oblique su un monitor può essere considerata alla stregua di un fenomeno di aliasing. La frequenza elevata qui è legata alla pendenza della retta, ed il campionamento inadeguato al fatto che il reticolo dei fosfori non è sufficientemente fitto.

Un altro fenomeno affine all'aliasing è l'*effetto Moiré*, che si presenta quando un reticolo viene sovrapposto ad un altro reticolo ruotato, o a un altro pattern regolare (magari curvilineo). I punti dove i due reticoli si avvicinano ed incontrano (dal nostro punto di visuale) danno luogo ad una maggiore percentuale di copertura della luce e ci appaiono più scuri. A seconda dell'angolo di rotazione fra i due reticoli, o comunque alla geometria del loro pattern, questa fatto genera bande scure di forme geometriche non facilmente calcolabili, ma comunque di solito di ampiezza assai più grande del passo dei reticoli: anche in questo caso l'aliasing produce riversamento di alte frequenze su basse frequenze, e quindi bande spurie ampie (cioè di bassa frequenza). Qui il passo di campionamento è dato dal passo dei due reticoli, che non è sufficiente a risolvere nitidamente (senza aumento dello spessore apparente) la distanza fra i due nelle zone di adiacenza.

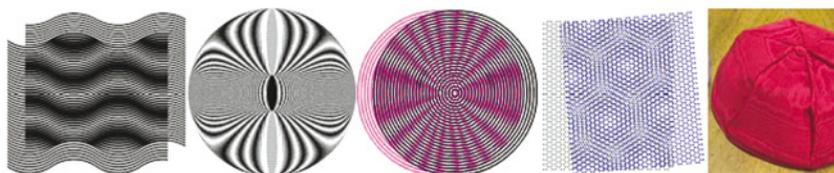


Fig. 8 – Esempi di effetto Moiré.

Una manifestazione evidente dell'effetto Moiré si ha nelle riprese video digitali. Una videocamera capta la luce grazie ad una griglia molto fitta di pixel nel sensore. Però, se la videocamera inquadra un attore con una giacca a quadretti ad una certa distanza, il reticolo dei quadretti della giacca, visto da quella distanza, può essere di passo simile a quello dei pixel. In tal caso il passo di campionamento (la distanza tra i pixel) non è sufficientemente piccolo rispetto al passo del reticolo campionato (i quadretti della giacca). Perciò si ha l'effetto Moiré: bande scure apparenti. Se la videocamera sta facendo una ripresa a colori, le bande possono non coincidere per i diversi canali di colore (rosso, verde e blu) e questo crea bande con dispersione cromatica (cioè di colore cangiante). Inoltre le bande sono di forma non regolare, perché la giacca non è planare bensì curva, e si spostano con i movimenti dell'attore che la indossa, un effetto molto fastidioso (si veda l'ultima immagine nella Figura 8).

Sempre in cinematografia, un altro esempio ben noto di aliasing è legato a campionamento inadeguato nel dominio del tempo anziché dello spazio. Il tasso di ripresa è di 50 fotogrammi al secondo. Quindi un oggetto che compie un moto periodico di periodo uguale a un cinquantesimo di secondo appare fermo, mentre se il periodo è vicino a un cinquantesimo di secondo l'oggetto appare muoversi assai più lentamente (ed addirittura retrocedere se il periodo è leggermente più lungo). Il caso classico è quello dei mozzi delle ruote delle carrozze. Tipicamente una ruota impiega ben più di un cinquantesimo di secondo a compiere un giro completo, ma qui la periodicità dell'immagine non è quella dell'intera ruota, bensì il tempo che ci mette un mozzo a raggiungere la posizione che nel fotogramma precedente occupava il mozzo successivo, e questo è vicino ad un cinquantesimo di secondo. Perciò la ruota ci sembra girare molto più lentamente di quanto sia compatibile con la velocità della carrozza, ed in certi casi le ruote sembrano girare al contrario.

In questi esempi, nei quali non è possibile infittire il campionamento (il tasso di ripresa o il numero di pixel in un monitor sono fissati dall'hardware), l'unico rimedio all'aliasing è quello di prefiltrare il segnale riducendone il supporto della trasformata di Fourier. Ma questo elimina le alte frequenze e quindi si traduce in perdita di contrasto. Ad

esempio, non sembrerà più che i mozzi delle ruote siano fissi, o che si muovano troppo lentamente o a ritroso, semplicemente perché saranno sfuocati e non si distingueranno più: un rimedio amaro, ma spesso più accettabile per la ricostruzione visiva operata dal nostro cervello di quanto non sia l'aliasing.

Il nostro sistema uditivo impone comunque un taglio delle alte frequenze acustiche ben al di sotto della metà di 44 KHz, e quindi il campionamento a 44 KHz è più che adeguato alla ricostruzione del suono. Lo stesso non vale per le immagini, che possono avere variazioni brusche dei valori di intensità che il sistema visivo percepisce in maniera nitida, perché le dimensioni del cristallino e della retina sono molto maggiori delle lunghezze d'onda della luce visibile. Il campionamento di un'immagine digitale è elevato, ma non troppo: le righe di un'immagine tipica consistono di qualche migliaio di pixel e sono lunghe circa 35 mm. Pertanto, se volessimo ricampionare un'immagine per infittirne la risoluzione grazie al teorema del campionamento, dovremmo prima prefiltrarla, e quindi ne aumenteremmo la risoluzione solo dopo averne diminuito il contrasto.

5. – Ricostruzione di segnali nella pratica quotidiana: prefiltraggio e stabilità

5.1 – Segnali a durata finita

Nella vita reale, il metodo di ricostruzione che abbiamo esposto nel teorema del campionamento (Teorema 4.1) non si applica bene, perché le sue condizioni non sono mai soddisfatte nella pratica. Infatti, un segnale reale ha un inizio ed una fine, quindi ha durata finita, e pertanto è a supporto compatto: ma, come abbiamo accennato subito dopo il Teorema 3.1, non è allora possibile che la sua trasformata di Fourier sia anch'essa a supporto compatto.

Vediamo come un matematico potrebbe provare ad evitare questa limitazione.

In linea di principio, questo problema non impedisce l'applicabilità del teorema del campionamento. Infatti, se siamo interessati a cam-

pionare un segnale f solo in un compatto K , possiamo comunque applicare il teorema del campionamento nell'ipotesi, purtroppo non verificabile (come vedremo meglio nel seguito), che f (di cui noi vediamo solo valori sul compatto K) si possa estendere su tutto \mathbb{R} ad una funzione nella classe a banda limitata B_c , che denotiamo ancora con f : campioniamo f a passo $\tau = \frac{1}{2c}$ solo nell'intervallo temporale K (per semplicità, in questa Sottosezione denotiamo la frequenza di taglio con c invece che ω_c). Se immaginiamo di estendere i campioni all'esterno di K , ponendoli zero al di fuori, stiamo in realtà campionando su tutti gli interi una funzione diversa: la funzione $f_0 = f|_K$ (meglio sarebbe immaginare di campionare una funzione C^∞ che coincide con f_0 sui multipli di τ , visto che vogliamo allontanarci il meno possibile dalla classe di Paley–Wiener, che consiste di funzioni C^∞ , ma l'argomento rimane identico).

Allora, stiamo sostituendo la vera funzione f di Paley–Wiener con il suo troncamento f_0 su K , la cui trasformata di Fourier $g := \widehat{f_0}$ non è a supporto compatto. In quale misura g approssima \widehat{f} ? La risposta dipende da quanto grande è K . Fissiamo una tolleranza $\varepsilon > 0$ e poniamo $f = f_0 + f_\infty$, dove ovviamente $f_\infty = f|_{\mathbb{C}K}$. Supponiamo di aver scelto il compatto K così grande che la funzione $f \in B_c \subset L^1$ verifichi $\|f_\infty\|_1 < \varepsilon$. Allora $\|g - \widehat{f}\|_\infty = \|\widehat{f_\infty}\|_\infty \leq \|f_\infty\|_1 < \varepsilon$. Quindi la trasformata di Fourier che siamo in grado di calcolare, ovvero la funzione g , approssima la trasformata di Fourier \widehat{f} a meno di ε per ogni valore della frequenza, e pertanto, a partire dai dati campionati sull'intervallo K , siamo in grado di calcolare una buona approssimazione di \widehat{f} (a meno di una tolleranza arbitraria prefissata ε), ed in particolare di verificare a posteriori se è ragionevole assumere che i dati disponibili siano campioni di una funzione a banda limitata. Occorre però tener presente che tutto questo dipende dalla condizione che K sia sufficientemente grande rispetto al segnale, nel senso che la sua coda f_∞ verifichi $\|f_\infty\|_1 < \varepsilon$: poiché non sappiamo come sia fatta f fuori di K , questa ipotesi è solo una speranza. Questo è un punto debole nel rigore del procedimento, e ci ritorneremo tra poco.

Ma veniamo all'altro lato della questione: quale funzione viene ricostruita se partiamo dai dati campionati $\{f_0(n\tau)\}$? Come visto nel teorema del campionamento, viene ricostruita esattamente la

funzione

$$h(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_0(n\tau) \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{\tau} - n\right) = \sum_{n\tau \in K} f(n\tau) \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{\tau} - n\right).$$

Se avessimo avuto i campioni di f su tutti i multipli di τ , in base al teorema del campionamento avremmo invece ricostruito $f(t) = \sum_n f_0(n\tau) \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{\tau} - n\right)$. La discrepanza è $\sum_{n\tau \notin K} f(n\tau) \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{\tau} - n\right)$. Per stimare questa differenza dobbiamo fare ipotesi ulteriori. Osserviamo che le funzioni $f \in B_c$ appartengono a L^1 , per definizione, ed a L^∞ , perché sono trasformate di Fourier di funzioni a supporto compatto. Quindi è ragionevole assumere che f decresca all'infinito a velocità abbastanza elevata. Anche i dati campionabili $\{f(n\tau)\}$ sono una successione limitata; supponiamo allora che siano anche in uno spazio ℓ^p per qualche $p < \infty$ (ossia che $\|\{f(n\tau)\}\|_{\ell^p}^p := \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f(n\tau)|^p < \infty$). Normalmente, si assume che tutti i segnali siano successioni ℓ^2 , perché questa condizione equivale al fatto che l'energia sia finita. Assumiamo dunque che la successione $\mathbf{f} = \{f(n\tau)\}$ sia in ℓ^2 , ossia che $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |f(n\tau)|^2 < \infty$ (ma il ragionamento resta valido anche se $\mathbf{f} \in \ell^p$ per un qualsiasi $p < \infty$). Poniamo $\mathbf{f}_K = \{f_\infty(n\tau)\}$, ossia $\mathbf{f}_K(n) = f(n\tau)$ se $n\tau \in K$ e 0 altrimenti. Allora $\mathbf{f}_K \in \ell^2$, e per ogni $\varepsilon > 0$, si ha $\|\mathbf{f}_K\|_2 < \varepsilon$ se K è abbastanza grande.

Poniamo ora $\mathbf{s}(t) = \{\operatorname{sinc}\left(\frac{t}{\tau} - n\right)\}_{n=-\infty}^{\infty}$. Osserviamo che la successione $\operatorname{sinc}^2(t - n)$ si maggiora con $1/(t - n)^2 \sim 1/n^2$ se $t \notin [n - 1, n + 1]$ e con 1 se $t \in [n - 1, n + 1]$, quindi appartiene a ℓ^2 per ogni t , con norma ℓ^2 limitata rispetto a t (diciamo, da una costante positiva C). Allora lo stesso vale per \mathbf{s} , che si ottiene da questa successione tramite la dilatazione di passo τ . Quindi, dalla disuguaglianza di Cauchy,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n\tau \notin K} f(n\tau) \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{\tau} - n\right) \right| &= |\langle \mathbf{f}_K, \mathbf{s}(t) \rangle| \\ &\leq \|\mathbf{f}_K\|_2 \left(\sum_{n\tau \notin K} \left| \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{\tau} - n\right) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < C\varepsilon. \end{aligned}$$

Quindi l'errore di ricostruzione del segnale si maggiora con $C\varepsilon$, ed a meno di questa tolleranza possiamo applicare il metodo di ricostruzione basato sul teorema del campionamento.

Per futuro riferimento, si noti che abbiamo dimostrato la seguente disuguaglianza:

COROLLARIO 5.1. – *Esiste una costante $C > 0$ tale che, per ogni successione $\{a_n\} \in \ell^2$ e per ogni $t \in \mathbb{R}$, la funzione u definita da $u(t) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} a(n) \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{\tau} - n\right)$ verifica*

$$|u(t)| \leq C \|\{a_n\}\|_{\ell^2}.$$

Ci sono però due punti deboli in questo ragionamento.

Il primo è che C è una costante numerica fissa (in effetti, si può dimostrare che è minore di $\pi^2/3$), ma ε è arbitrario, ed al fine di raggiungere la precisione $C\varepsilon$ possiamo essere costretti a scegliere K grande: ma non sempre questo è possibile, perché a volte il periodo in cui si effettua la misura non è prolungabile a piacere. Si pensi ad esempio alle misure del moto apparente dei pianeti nell'anno, o, nel caso in cui la variabile rappresenti uno spazio invece che un tempo, alle misure della deformazione in un'automobile nel corso di un crash test, o ai valori di luminosità dei pixel in una riga di un'immagine di risoluzione prefissata.

Il secondo punto debole è ancora più imbarazzante, e lo abbiamo già preso in esame, ma ora ci ritorniamo in maniera più approfondita. Dato un segnale $f(t)$ per $t \in \mathbb{R}$ di cui conosciamo solo i valori campionati $\{f(n)\}$ nell'intervallo finito K , non possiamo calcolare, neppure in maniera approssimata, la trasformata di Fourier \hat{f} : sappiamo solo approssimare \hat{f}_0 a meno di ε , non \hat{f} , ed anche questo sappiamo farlo solo sotto l'ipotesi non verificabile K sia abbastanza grande che si abbia $\|f_\infty\|_1 < \varepsilon$. In particolare, non siamo in grado di capire in maniera ovvia se il segnale f è nella classe a banda limitata (o meglio, se esiste una funzione $f \in B_c$ che coincide con i dati campionati al variare di n in K). Però, come visto nella discussione sull'aliasing, anche se f non fosse a banda limitata una versione approssimata della ricostruzione si otterrebbe comunque quando sia f sia \hat{f} decrescono in maniera abbastanza rapida (ad esempio se sono entrambe in L^1 , caso nel quale è applicabile la Formula di Somma di Poisson). Noi abbiamo qualche informazione sull'andamento di f nel

compatto K , grazie ai dati campionati, e certamente siamo in grado di prolungarla fuori di K in maniera che sia in L^1 , ma è meno facile trovare una tale estensione che faccia sì che anche $\hat{f} \in L^1$. Se assumiamo che il segnale f sia nullo fuori di K , allora non solo \hat{f} non può essere a supporto compatto, ma in generale non è neppure in L^1 , come dimostra l'esempio in cui f sia una funzione caratteristica di un intervallo, la cui trasformata di Fourier coincide in modulo con un dilatato della sinc, che non è in L^1 .

Pertanto la nostra analisi euristica è alquanto teorica. In effetti, nella pratica si procede diversamente, ed esattamente come accennato alla fine della Sottosezione 4.2 sull'aliasing. Si parte con un segnale f limitato ed a supporto compatto (e quindi anche in L^2) e lo si prefiltra convolvendolo con una funzione $\phi \in B_c$: in tal modo, in base alla moltiplicatività della trasformata di Fourier sotto convoluzione, si ottiene un nuovo segnale $h = \phi * f$ ancora in B_c (ma non più a supporto compatto). Il segnale filtrato h ha un aspetto più liscio e regolare di f , perché ha perso le componenti di alta frequenza; però, in alcune condizioni che spesso si verificano in pratica, h approssima f , almeno nel senso della norma L^2 (e quindi puntualmente quasi ovunque). Più precisamente, supponiamo di poter scegliere c abbastanza grande rispetto all'estensione dell'intervallo in cui \hat{f} è grande; inoltre esiste certamente ϕ tale che $|\hat{\phi}(\omega)| \leq 1$ per ogni ω , ed uguale a 1 su un sottointervallo grande $[-d, d] \subset [-c, c]$. Allora $\|h - f\|_2$ è piccolo. Infatti $\|h - f\|_2 = \|\hat{h} - \hat{f}\|_2$, e la funzione $\hat{h} - \hat{f}$ vale 0 in $[-d, d]$, verifica $|(\hat{h} - \hat{f})(\omega)| \leq |\hat{f}(\omega)|$ per $c \leq |\omega| \leq d$ (un intervallo piccolo) e $|\hat{h} - \hat{f}|(\omega) = |\hat{f}|(\omega)$ se $|\omega| > c$. Ma quest'ultima disuguaglianza ci dà una buona stima L^2 , perché se c è abbastanza grande allora $\int_{|\omega| \geq c} |\hat{f}|^2 d\omega$ è piccolo, dal momento che $\hat{f} \in L^2$.

Pertanto si adotta il seguente compromesso. Scegliamo la larghezza di banda $2c$ in modo che $\tau = \frac{1}{2c}$ costituisca un passo di campionamento accettabile per la velocità di misura dei nostri strumenti di campionamento (ad esempio proporzionata alla larghezza del nostro canale uditivo, il che porta ai 44 KHz del campionamento dei CD come visto nell'Introduzione, o pari alla distanza fra due pixel

adiacenti del nostro sensore di immagini). Poi prefiltriamo il segnale f tagliandone le frequenze al di fuori di questa banda, come spiegato sopra. In tal modo si ottiene un nuovo segnale h modificato (ed allisciato), che in vari casi pratici non differisce troppo da f , come visto prima. A questo punto il procedimento di ricostruzione basato sul teorema del campionamento funziona, però non ricostruisce il segnale originale, bensì il segnale filtrato f . Questo dà luogo, nei casi tipici, ad una ricostruzione non esatta bensì approssimata, però entro una tolleranza prefissata.

5.2 – Stabilità della ricostruzione sotto perturbazioni dei dati

Una volta attuato il procedimento di ricostruzione, almeno nel senso approssimato illustrato alla fine della Sottosezione precedente, occorre domandarci quanto esso sia stabile sotto piccole perturbazioni dei dati. Infatti i dati sono catturati da apparecchiature di misura che sono affette da errore, spesso in maniera casuale, e vogliamo essere sicuri che il procedimento ricostruisca un segnale perturbato non troppo diverso dall'originale. In particolare, vogliamo assicurarci che la discrepanza fra i valori del segnale ricostruito a partire dai valori perturbati e di quello originale non diverga sotto perturbazione dei dati, ma anzi tenda a zero in qualche senso appropriato se le perturbazioni diventano piccole.

Per fortuna, questo è vero e non occorre nessuna fatica per dimostrarlo. Infatti, supponiamo che ogni dato campionato $f(n)$ sia affetto da un errore $a(n)$. Sappiamo che il segnale $f \in B_c$ appartiene a $L^1 \cap L^\infty$, per ipotesi: più precisamente, nella ricostruzione approssimata con prefiltraggio, spiegata nella precedente Sottosezione, non si assume $f \in B_c$, ma si assume comunque $f \in L^1 \cap L^\infty$, e tipicamente $f \in L^2$. Abbiamo allora fatto l'ipotesi ragionevole che la successione $\{f(n)\}$ sia in ℓ^2 . È anche ovvio assumere che la percentuale di errore sperimentale sia limitata da una costante piccola ε , e quindi $|a(n)| \leq \varepsilon |f(n)|$ per ogni n . Allora anche $\{a(n)\} \in \ell^2$, con $\|\{a(n)\}\|_{\ell^2} \leq \varepsilon \|\{f(n)\}\|_{\ell^2}$, e quindi la stabilità segue direttamente dal Corollario 5.1.

5.3 – Ricostruzione esatta e ricostruzioni approssimate

In questo articolo abbiamo esposto i principi teorici della ricostruzione esatta di segnali tramite l'analisi di Fourier a partire da una successione infinita di dati campionati, ma poi ci siamo resi conto che, nella pratica, ogni successione apparentemente infinita di dati è di fatto finita, essendo nulla prima dell'inizio dell'esperimento e dopo la fine. Abbiamo anche capito che il fatto che la successione dei dati sia finita impedisce la validità delle ipotesi necessarie alla ricostruzione esatta e permette solo una ricostruzione approssimata, peraltro entro una tolleranza prefissata (pur di accettare alcune ipotesi naturali di decadimento del segnale che generalmente non sono verificabili). A questo punto, abbiamo deciso di prefiltrare il segnale, che allora è ricostruibile solo entro una tolleranza prefissata: però in tal modo stiamo ricostruendo non il segnale originale, ma una sua approssimazione.

Però, per ricostruire i segnali in maniera approssimata anziché esatta, ci sono anche altri modi. I due modi tipici sono l'interpolazione dei dati tramite polinomi algebrici (*splines*) o tramite polinomi trigonometrici (combinazioni lineari delle funzioni $\sin nt$ e $\cos nt$ al variare di n). Ci limitiamo ad accennarne.

Il modo più semplice di interpolazione polinomiale dei dati è l'interpolazione lineare a tratti, nella quale il grafico dell'approssimante si ottiene congiungendo con un segmento i punti del piano corrispondenti a due dati consecutivi. In tal modo, in tutti gli istanti intermedi fra due tempi di campionamento consecutivi, l'approssimante lineare a tratti ha valori intermedi fra quelli dei due dati campionati, ma rispetto alla ricostruzione ispirata dal teorema del campionamento abbiamo perso qualcosa. Infatti, ora ovviamente non possiamo più sapere quanto l'approssimante differisca dal segnale vero ad ogni tempo intermedio: non è possibile stimare la discrepanza se non imponendo limiti sul valore della derivata del segnale, o, equivalentemente, sulle frequenze massime e minime per le quali la trasformata di Fourier è non nulla. Peggio: questa interpolazione è inutilizzabile nella pratica, perché la derivata non è continua (l'approssimante ha punti angolosi ai punti di campionamento). Ad esempio, nel caso di ricostruzione di suoni questo procedimento produce distorsioni ad alta frequenza od altri disturbi, e

nel caso di immagini produce effetti di bande in prossimità dei punti angolosi.

È però facile ottenere una approssimazione polinomiale non solo continua ma anche di classe C^1 : basta approssimare con splines di grado più elevato. Ad esempio, se invece che segmenti utilizziamo archi polinomiali di terzo grado (quindi determinati da due parametri aggiuntivi), allora abbiamo abbastanza gradi di libertà per interpolare ogni tripletto di dati consecutivi ed in più fissare a nostro piacere la pendenza al punto iniziale. Incollando insieme uno dopo l'altro questi archi di grado tre possiamo fabbricare una curva interpolante di classe C^1 . Ma anche in tal caso, non sapremo stimare l'errore di approssimazione.

L'approssimazione trigonometrica è analoga: se disponiamo di $2n + 1$ campioni, li possiamo interpolare con un unico polinomio trigonometrico di grado $n + 1$: una combinazione lineare delle $2n + 1$ funzioni $\cos kt$ per $k = 0, \dots, n$ e $\sin kt$ per $k = 1, \dots, n$. Il polinomio trigonometrico approssimante, ovviamente, è di classe C^∞ (derivabile infinite volte). Anche in questo caso, però, non possiamo dire nulla sulla precisione dell'approssimazione tranne che sui punti di campionamento, dove ovviamente l'errore è nullo. Anche se volessimo assumere che il segnale vero fosse periodico, non per questo esso coinciderebbe con il polinomio trigonometrico approssimante, a meno che i suoi coefficienti di Fourier non nulli fossero esattamente quelli del polinomio trigonometrico. Si noti che, in tal caso, staremmo assumendo l'annullarsi dei coefficienti di Fourier a frequenze elevate: ossia una condizione analoga a quella del teorema del campionamento, che ci dava la ricostruzione esatta o almeno una buona stima sull'errore. In effetti, questa analogia è legata ad una connessione più profonda: la costruzione del polinomio trigonometrico viene semplificata, e diventa più naturale, se la effettuiamo utilizzando una discretizzazione della trasformata di Fourier e della sua formula di inversione, la Trasformata di Fourier Discreta [2, 4, 9].

6. – Cenni sul campionamento non uniforme

Abbiamo testè osservato che la ricostruzione mediante il teorema del campionamento si applica in particolare a segnali bidimensionali, le immagini. Nel caso di immagini catturate da un sensore tipica-

mente i punti di campionamento formano una griglia euclidea. Ma ci sono immagini importanti per le applicazioni dove non è così: ad esempio, la griglia può essere distribuita in maniera radiale in certe immagini tomografiche e nelle immagini ecografiche. Pertanto diventa importante studiare la ricostruzione a partire da campioni non equidistribuiti. Un altro caso tipico di campioni irregolari è quello nel quale gli strumenti campionatori non possono essere fissati rigidamente su una griglia, o quello, frequentissimo, nel quale qualche dato campionato non viene trasmesso e si perde: ad esempio, nel caso in cui i dati vengono letti da un Compact Disc che ha un graffio, oppure quando si tratta di dati astronomici rilevati con cielo parzialmente nuvoloso. A causa della perdita della periodicità, la ricostruzione a partire da campioni non uniformemente distribuiti è un problema al confine fra l'analisi numerica e l'analisi reale ma non più una applicazione dell'analisi di Fourier, e quindi qui ci limitiamo a qualche facile esempio (unidimensionale) ed a citare il risultato più importante.

ESEMPIO 6.1 – Il primo esempio è quello nel quale vengono combinate due serie di campioni, ciascuna equispaziata dello stesso passo (diciamo 1, per semplicità), ma sfasate nel tempo di una distanza ρ , dove ovviamente $0 < \rho \leq 1/2$. Se $\rho = 1/2$, allora le due serie si combinano per formare un'unica serie equispaziata di passo $1/2$, e quindi in grado di ricostruire senza perdite segnali la cui trasformata di Fourier ha supporto di diametro 2, in base al teorema del campionamento. Se invece $0 < \rho < 1/2$, i dati campionati permettono ancora di ricostruire il segnale originale?

La risposta è affermativa, pur di adottare un adeguato processo di ricostruzione tramite medie, come ora illustriamo. Consideriamo un segnale f tale che $\hat{f} = 0$ al di fuori dell'intervallo $[-1, 1]$ e due successioni di punti di campionamento $\{n \in \mathbb{Z}\}$ e $\{\rho + n : n \in \mathbb{Z}\}$. Stiamo quindi considerando l'istogramma dei dati campionati fornito dalla distribuzione $f(K + \lambda_\rho K)$ (qui, al solito, λ_ρ è l'operatore di traslazione di passo ρ). Ciascuna delle due distribuzioni fK e $f\lambda_\rho K$ è insufficiente a ricostruire esattamente il segnale, a causa delle sovrapposizioni illu-

strate, ad esempio per la prima delle due, nel grafico di \widehat{fK} in Figura 9 (la trasformata di Fourier \widehat{fK} è la somma di tutte le campane traslate).

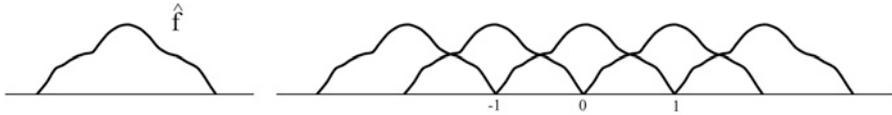


Fig. 9 – A sinistra il grafico di \widehat{f} , con supporto di diametro 2; a destra le sue repliche traslate, le quali formano gli addendi della trasformata di Fourier dell'istogramma \widehat{fK} ottenuto da una sola sequenza di dati a passo uniforme 1, che è inadeguato.

Ora esaminiamo la trasformata di Fourier dell'altro istogramma, $f\lambda_\rho K$. Dalla proprietà (v) del Compendio sappiamo che $\widehat{K} = K$, e dalla proprietà (iv) segue che $\widehat{\lambda_\rho K}(\omega) = e^{-2\pi i \rho \omega} K(\omega)$. Infine, dalla proprietà (i) del Compendio sappiamo che la trasformata di Fourier di $f\lambda_\rho K$ è la convoluzione delle trasformate $\widehat{f} * \widehat{\lambda_\rho K} = \widehat{f} * \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i \rho n} \delta_n$, e quindi, per la proprietà (vi), la somma delle repliche traslate e pesate $\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i \rho n} \lambda_n(\widehat{f})$.

È istruttivo riconsiderare ora il caso $\rho = 1/2$, nel quale sappiamo che il segnale è ricostruibile a partire dai campioni. Nella Figura 10 sono disegnate le campane traslate che costituiscono gli addendi della trasformata di Fourier dell'istogramma in questo caso particolare $\rho = 1/2$, nel quale $e^{-2\pi i \rho n} = e^{-i\pi n} = (-1)^n$: i termini pari sono gli stessi del precedente istogramma, i termini dispari sono gli opposti.

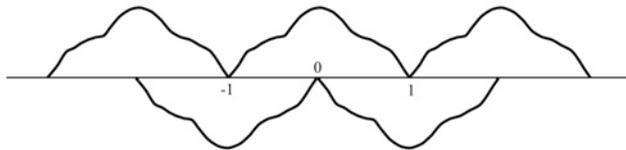


Fig. 10 – Addendi della trasformata di Fourier dell'istogramma ottenuto campionando con la stessa sequenza uniforme ma traslata di passo 1/2 (ancora inadeguata).

Quando sommiamo le trasformate di Fourier delle due sequenze di campioni, le campane pari si raddoppiano e quelle dispari si cancellano, e rimane una successione di campane a supporto contiguo ma disgiunto, ciascuna una copia di \widehat{f} . Quindi possiamo recuperare \widehat{f} tramite il consueto filtraggio passa basso, e poi rico-

struire f antitrasformata di Fourier, ma ora bisogna anche dividere per due per eliminare il raddoppio delle campane pari. Sapevamo che questo doveva succedere, dal momento che, per $\rho = 1/2$, la combinazione delle due sequenze di punti di campionamento forma una nuova sequenza equispaziata di passo esattamente corrispondente alla massima frequenza di taglio necessaria per riprodurre esattamente il segnale.

Osserviamo che questo significa che \hat{f} viene ricostruita a partire dalle due successioni di campioni e la trasformata di Fourier dei loro istogrammi tramite una operazione di media.

Come cambia questo argomento per $0 < \rho < 1/2$? In questo caso, la trasformata di Fourier del primo istogramma fK è la stessa di prima. Per la seconda, invece di segni alterni abbiamo la moltiplicazione per una fase progressiva $e^{-2\pi ip}$. Il lettore non abituato alla moltiplicazione di numeri complessi può restringere l'attenzione alla parte reale $\cos(\pi n\rho)$ ed alla parte immaginaria $\sin(\pi n\rho)$. Si tratta di numeri oscillanti intorno a zero in maniera periodica, e quindi le campane costituite dalla repliche traslate di \hat{f} vengono moltiplicate per un peso oscillante (come illustrato nella Figura 11, dove viene illustrata solo la parte reale). Se concentriamo l'attenzione al segmento $[-1, 1]$ (quello del filtraggio), entrambi i contributi, quello derivante dalla successione di dati originali e quello dalla successione traslata $\widehat{f\lambda_\rho K}$, sono somme di due repliche traslate di \hat{f} , il primo con pesi uguali (è la somma delle due repliche traslate) ed il secondo con pesi 1 e $e^{-2\pi ip}$. In altre parole, filtrando ed antitrasformando il primo istogramma otteniamo il valore $a(\omega) := \hat{f}(\omega) + \hat{f}(\omega + 1)$, mentre dal secondo istogramma otteniamo $b(\omega) := \hat{f}(\omega) + e^{-2\pi ip}\hat{f}(\omega + 1)$. Osserviamo che la matrice

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & e^{-2\pi ip} \end{pmatrix}$$

ha determinante $e^{2\pi ip} - 1 \neq 0$, e quindi è invertibile, e ne ricaviamo

$$\begin{pmatrix} \hat{f}(\omega) \\ \hat{f}(\omega + 1) \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} a(\omega) \\ b(\omega) \end{pmatrix}.$$

In questo modo abbiamo portato a termine la ricostruzione: si noti

però che, se $\rho \sim 0$, l'algoritmo è numericamente poco stabile, perché il determinante di M è vicino a zero, e quindi la matrice inversa M^{-1} ha elementi ed autovalori grandi e tende ad amplificare piccole perturbazioni dei dati, sempre di più man mano che ρ viene scelto più vicino a zero. D'altra parte questo comportamento è intrinseco al problema numerico proposto, perché per piccole traslazioni ρ i punti di campionamento della prima successione sono molto vicini a quelli della seconda, e quindi differenze dei due corrispondenti valori di f implicano pendenze ripidissime, che comportano amplificazioni delle perturbazioni.

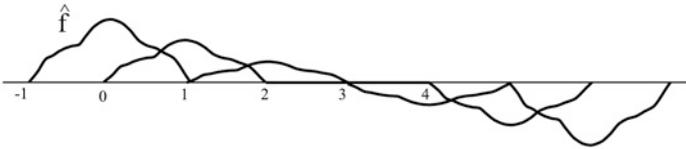


Fig. 11 – Le repliche traslate di \hat{f} , pesate con un peso oscillante, che formano $\widehat{f\lambda_\rho K}$.

Ricapitolando, in questi esempi abbiamo considerato un segnale con banda di frequenza di diametro 2, che quindi richiede, per la ricostruzione, una successione uniforme di campioni di passo $1/2$. Invece, abbiamo usato punti di campionamento costituiti da due sequenze equidistribuite di passo 1, ciascuna delle quali è quindi inadeguata per la ricostruzione, ed abbiamo visto che, prese insieme, diventano adeguate. Quindi in questi casi, per l'adeguatezza del processo di ricostruzione, basta che la distribuzione dei campioni sia *in media* di passo $1/2$. \square

ESEMPIO 6.2 – Consideriamo un secondo esempio di campionamento non uniforme la cui capacità di ricostruire i segnali può essere stabilita a partire dal teorema del campionamento: quello nel quale si mescolano due successioni equispaziate, la prima di passo, diciamo, 1, e la seconda di passo τ con $\tau > 0$ (ed ovviamente $\tau \neq 1$). Come prima, il supporto di \hat{f} ha diametro 2. Quindi, in base al teorema del campionamento, la prima successione di campioni è inadeguata per la ricostruzione, e la seconda è adeguata se $\tau \leq 1/2$ ed inadeguata se $\tau > 1/2$. L'istogramma dei dati è $f(K + \frac{1}{\tau}K_1)$, perché $\frac{1}{\tau}K_1 = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta_{n\tau}$

(parte (vi) del Compendio all'inizio della Sezione 4). In base a (11), $\frac{1}{\tau}\widehat{K}_\tau = K_\tau = \frac{1}{\tau}\sum_{-\infty}^{\infty}\delta_{\frac{n}{\tau}}$, e quindi la trasformata di Fourier dell'istogramma è la distribuzione

$$\widehat{f} * K + \widehat{f} * K_\tau = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n \widehat{f} + \frac{1}{\tau} \lambda_{\frac{n}{\tau}} \widehat{f}.$$

Queste due distribuzioni, come ormai abbiamo visto più volte, sono due serie di repliche di traslati di \widehat{f} . La seconda serie ha altezza diversa, perché è stata riscalata con il fattore $1/\tau$. Poiché conosciamo l'intera successione dei dati campionati, possiamo scindere le due sottosuccessioni, e quindi separare i due treni di repliche. Per semplicità, riscaldiamo il secondo moltiplicandolo per τ , in maniera che le repliche del secondo treno abbiano la stessa altezza 1 di quelle del primo.

Consideriamo dapprima il caso $1/2 < \tau < 1$, e poniamo $\frac{1}{\tau} = 1 + \rho$ con $0 < \rho < 1$. La prima delle due successioni di traslati di \widehat{f} ha passo 1, e quindi il traslato n -simo è adiacente al traslato $(n+2)$ -simo, e ciascuno dei due si sovrappone a metà del traslato $(n+1)$ -simo, come già visto in Figura 9. Invece la seconda è formata da repliche più separate: il traslato $(n+2)$ -simo comincia a distanza $2+2\rho$ dall'inizio del traslato n -simo, e quindi a distanza 2ρ a destra della fine dell'altra. Pertanto, ogni replica si sovrappone solo alla precedente ed alla successiva. In maggiore dettaglio: la funzione \widehat{f} ha supporto in $[-1, 1]$, la replica precedente comincia a sinistra dell'intervallo e finisce al punto $-\rho$, ed il primo traslato destro $\lambda_1 \widehat{f}$ comincia al punto ρ e finisce oltre l'intervallo (al punto $2+\rho$): si veda la Figura 12. Pertanto, in questa catena di repliche, solo la replica originale \widehat{f} è non nulla nell'intervallo $[-\rho, \rho]$, e quindi ne possiamo ivi leggere il valore.

Ora cominciamo un processo di *bootstrap* fra i due campionamenti. Consideriamo i traslati di passo 1: nel sottointervallo $[-\rho, 0]$ si sovrappongono solo le repliche date da \widehat{f} e dal suo traslato sinistro $\lambda_{-1}\widehat{f}$, e, visto che lì ormai la prima di queste funzioni è nota grazie alla fase precedente basata sul secondo campionamento, ne ricaviamo la seconda funzione. Ma in quell'intervallo questa seconda funzione assume gli stessi valori che la prima assume in $[1-\rho, 1]$; analogamente, nel-

l'intervallo $[0, \rho]$ la funzione \hat{f} di questa catena di repliche si sovrappone solo con il suo traslato destro $\lambda_1 \hat{f}$, ed allo stesso modo questo ce ne rivela i valori in $[-1, -1 + \rho]$. A questo punto abbiamo ampliato il dominio di ricostruzione a $[-1, -1 + \rho] \cup [-\rho, \rho] \cup [1 - \rho, 1]$, e proseguiamo il bootstrap paragonando i risultati su questi tre intervalli con quelli del secondo treno di repliche (quelle di passo $1 + \rho$). In effetti, nell'intervallo di sinistra, $[-1, -1 + \rho]$, questo treno di repliche fa sovrapporre \hat{f} (ivi già nota) solo con il suo traslato di passo $-1 - \rho$, che quindi viene ricostruito, ed i valori che esso assume sono quelli di \hat{f} fra -2ρ e $-\rho$ (si veda la Figura 12). Utilizzando in maniera analoga gli altri due intervalli vediamo che questa fase del bootstrap raddoppia il dominio di ricostruzione, estendendolo a $[-1, -1 + 2\rho] \cup [-2\rho, 2\rho] \cup [1 - 2\rho, 1]$. A questo punto è chiaro come proseguire il bootstrap per raddoppiare il dominio di ricostruzione: in un numero finito di passi si recupera \hat{f} interamente, ossia su tutto l'intervallo $[-1, 1]$.

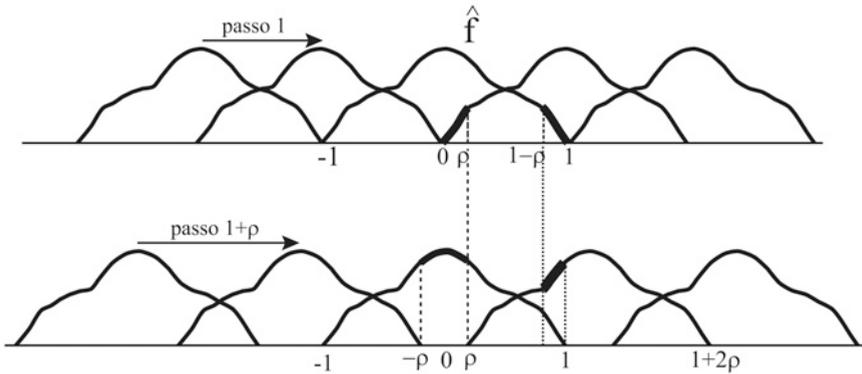


Fig. 12 – Due successioni equispaziate di repliche di passo differente (quelle in alto a passo 1, quelle in basso a passo maggiore) danno luogo ciascuna a campionamento inadeguato, ma di densità complessiva adeguata. La ricostruzione si basa sull'interplay fra le sequenze di repliche con i due passi di traslazione (*bootstrap*). La figura evidenzia alcuni intervalli di ricostruzione ottenuti nelle prime due fasi del bootstrap: il secondo passo di traslazione restituisce i valori di \hat{f} in $[-\rho, \rho]$ (evidenziati con spessore medio). Da questi dati, il primo passo di traslazione restituisce \hat{f} in $[-1, -1 + \rho]$ e $[1 - \rho, 1]$ (evidenziati con spessore grande); a sua volta, questa informazione permette al secondo passo di traslazione di ricostruire \hat{f} in $[-2\rho, -\rho]$ (spessore molto grande), e così via.

Si noti che, in questo caso, la densità media dei punti di campionamento è maggiore di $1/2$ e riusciamo ad operare la ricostruzione di ogni

f tale che \widehat{f} abbia supporto di lunghezza 2, come avveniva per campioni equidistribuiti.

Veniamo ora all'altro caso, $\tau > 1$, e poniamo $\frac{1}{\tau} = 1 + \rho$ con $-1 < \rho < 0$. In questo caso, da un lato la densità media dei campioni è minore di $1/2$. Dall'altro lato, il metodo di ricostruzione illustrato più sopra fallisce: il bootstrap non può cominciare perché non ci sono intervalli in cui la trasformata di Fourier di uno dei due istogrammi consiste di una sola replica di \widehat{f} (anzi, in molti intervalli il secondo istogramma fa sovrapporre tre repliche invece che due sole). Quindi in questo caso non riusciamo a ricostruire il segnale. \square

I precedenti Esempi 6.1 e 6.2 suggeriscono una caratterizzazione degli insiemi di campionamento in termini della densità minima dei punti di campionamento. Premettiamo due definizioni.

DEFINIZIONE 6.3. – Una successione $\{x_j\}$ di numeri reali si chiama un *insieme di unicità* per la classe di Paley–Wiener B_c se la sola funzione $f \in B_c$ tale che $f(x_j) = 0$ per ogni j è la funzione nulla. In altre parole, se si conoscono i valori di f su un insieme di unicità, esiste una unica ricostruzione dell'intera f a partire dai suoi campioni: naturalmente per ricostruire f occorre trovare un appropriato algoritmo di ricostruzione (come abbiamo fatto nel precedente Esempio 6.1).

Però non è detto che esista un tale algoritmo con la proprietà di essere stabile sotto piccole perturbazioni dei dati campionati (ad esempio arrotondamenti numerici). Una successione $\{x_j\} \subset \mathbb{R}$ si dice un *insieme di campionamento stabile* in uno spazio normato di funzioni, ad esempio L^p , se f è ricostruibile dai suoi valori $\{f(x_j)\}$ in maniera da cambiare di poco se i campioni sono perturbati di poco, nel senso che per ogni $p \geq 1$ esiste $C > 0$ tale che ogni $f \in B_c \cap L^p$ verifica

$$\|f\|_p \leq C \|\{f(x_j)\}\|_{\ell^p} := \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} |f(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Evidentemente gli insiemi stabili sono i soli insiemi di campionamento di interesse nelle applicazioni il cui numero di elementi denotiamo con $|X|$.

DEFINIZIONE 6.4. – Dato un insieme al più numerabile $X \subset \mathbb{R}$, si chiama *densità di Beurling* di X il numero

$$D(X) := \liminf_{r \rightarrow \infty} \inf_{y \in \mathbb{R}} \frac{|X \cap [y, y + r]|}{r}.$$

NOTA 6.5. – Osserviamo che $\inf_{y \in \mathbb{R}} |X \cap [y, y + r]|$ è il minimo (o meglio, la migliore approssimazione per difetto) del numero di punti di X in intervalli di lunghezza r . Pertanto $\inf_{y \in \mathbb{R}} \frac{|X \cap [y, y + r]|}{r}$ è il minimo della densità dei punti di X in tali intervalli, e quindi $D(X)$ rappresenta il minimo della densità di X in intervalli via via più lunghi, ossia la densità asintotica minima di X .

Vale la seguente caratterizzazione degli insiemi di campionamento stabili [7], che non dimostriamo:

TEOREMA 6.6 (Beurling, Landau.). – *Se un insieme numerabile $X \subset \mathbb{R}$ ha densità di Beurling $D(X) > 1$ (Definizione 6.4), allora è un insieme di campionamento stabile per $B_{\frac{1}{2}} \cap L^p$ per tutti i $p \geq 1$ (Definizione 6.3). Viceversa, ogni insieme di campionamento stabile per $B_{\frac{1}{2}} \cap L^p$ verifica $D(X) \geq 1$.*

(Se si vuole considerare B_c invece di $B_{\frac{1}{2}}$, il risultato continua a valere pur di riscalarlo appropriatamente il valore della densità nel senso del teorema del campionamento).

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [1] A. ALDROUBI, Grochenig, *Non-Uniform Sampling and Reconstruction in Shift-Invariant Spaces*, SIAM Review 43 no. 4 (2001), 585-620.
- [2] W. L. BRIGGS - V. E. HENSON, *The DFT: An Owner's manual for the Discrete Fourier Transform*, SIAM, Philadelphia, 1995.
- [3] S. CAMPANATO, *Lezioni di Analisi Matematica*, vol. 2, Giordano Pellegrini editore, Pisa, 1966.
- [4] P. DE MOTTONI, *Complementi di Matematica*, voll. 1 e 2, Aracne, Roma, 1992.
- [5] H. DYM - H. P. MCKEAN, *Fourier Series and Integrals*, Academic Press, New York, 1972.
- [6] V. A. KOTELNIKOV, *On the carrying capacity of the ether and wire in telecommunications*, Material for the First All-Union Conference on Questions of Communication, Izd.

- Red. Upr. Svyazi RKKA, Moscow, 1933 (tradotto in inglese e commentato da C. C. Bissel e V. E. Katsnelson, <http://ict.open.ac.uk/classics/1.pdf>).
- [7] H. LANDAU, *Necessary density conditions for sampling and interpolation of certain entire functions*, Acta Math. **117** (1967), 37-52.
- [8] S. M. NIKOLSKY, *Corso di Analisi Matematica*, vol. 2, MIR, Mosca, 1975 (traduzione italiana 1981).
- [9] M. A. PICARDELLO, *Analisi armonica: aspetti classici e numerici*, Università di Roma "Tor Vergata", 2011 (www.mat.uniroma2.it/~picard/SMC/didattica/materiali_did/Anal.Armon./LIBRO.pdf).
- [10] W. RUDIN, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1966.
- [11] W. RUDIN, *Functional Analysis*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1991.
- [12] L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions*, Hermann, Parigi, 1951.
- [13] C. E. SHANNON, *A Mathematical Theory of Communication*, Bell System Techn. Journ. **1** (1948), 379-423 e 623-656 (<http://cm.bell-labs.com/cm/ms/what/shannonday/paper.html>).
- [14] C. E. SHANNON, *Communication in the presence of noise*, Proc. Institute of Radio Engineers, **37**, no. 1 (1949), 10-21 (ristampato in Proc. IEEE **86**, n. 2 (1998) (<http://www.stanford.edu/class/ee104/shannonpaper.pdf>)).
- [15] E. T. WHITTAKER, *On the Functions Which are Represented by the Expansions of the Interpolation Theory*, Proc. Royal Soc. Edinburgh, Sec. A, **35** (1915), 181-194.
- [16] J. M. WHITTAKER, *Interpolatory Function Theory*, Cambridge Tracts in Mathematics and Math. Physics **33**, Cambridge University Press, Cambridge, England, and Macmillan, New York, 1935 (recensione: E. Hille, Bull. Amer. Math. Soc. **42**, n. 5 (1936), 305-306, (<http://projecteuclid.org/DPubS?service=UI&version=1.0&verb=Display&handle=euclid.bams/1183498841>)).
- [17] A. ZYGMUND, *Trigonometric Series*, 2nd ed., Cambridge University Press, Cambridge, 1959 (revisione 1968).

Massimo A. Picardello

Dipartimento di Matematica, Università di Roma "Tor Vergata"

Via della Ricerca Scientifica, 00133 Roma, Italia.

E-mail: picard@mat.uniroma2.it