*La Matematica nella Società e nella Cultura*

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Rita Nugari

# Osservazioni sul sistema elettorale proporzionale

*La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1*, Vol. **5** (2012), n.3, p. 337–360.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2012_1_5_3_337_0>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica
Italiana, Unione Matematica Italiana, 2012.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. V, Dicembre 2012, 337-360

# Osservazioni sul sistema elettorale proporzionale

RITA NUGARI

## 1. – Il Problema

Molti autori (vedi [8] per un'ampia bibliografia) si sono occupati di studiare i Sistemi Elettorali per stabilire quali siano più vantaggiosi ai fini della governabilità, o quali traducano più fedelmente in un numero di seggi la volontà politica espressa dagli elettori con il voto. In particolare per i sistemi proporzionali oltre [8] sopra citato [9], [6], [2], [13].

Il problema è quello di ripartire un numero intero dato $S$, *proporzionalmente* ad $n$ interi $v_1, v_2 \ldots v_n$. Problema che sorge per esempio, quando si debbano attribuire $S$ seggi a $n$ partiti politici che abbiano ottenuto $v_i$ voti rispettivamente o quando si debba determinare, come accade negli Stati Uniti, quanti rappresentanti debba avere ogni stato nel Congresso, in base al censimento della popolazione.

Detti $V = \sum_1^n v_i$ il numero totale dei voti e $S$ il numero di seggi di cui è composta l'Assemblea, se $v_i$ è il numero di voti ottenuti dal partito $P_i$ la proporzione

$$V : S = v_i : s_i$$

fornisce il numero $s_i$ di seggi guadagnati da $P_i$, cioè $s_i = \frac{S}{V} v_i$ o anche $s_i = \frac{v_i}{V/S}$; $Q := V/S$ è detto *quoziente elettorale* e rappresenta il numero di voti necessario per avere un seggio. Risulta però naturalmente molto raro, se non impossibile che i numeri così ottenuti siano numeri naturali; si dovrà cercare allora una soluzione approssimata al problema posto e si dovrà rivedere la definizione di *proporzionale* [14].

Non essendo quindi unica la soluzione, né unico il modo di ottenerla, nasce la necessità di elaborare un sistema elettorale, cioè un complesso di norme che trasformi i voti degli elettori in seggi parlamentari, e di stabilire quali criteri sia di carattere politico, sia di tipo tecnico debba soddisfare la procedura impiegata.

L'articolo 48 della Costituzione Italiana recita: "*Sono elettori tutti i cittadini, uomini e donne, che hanno raggiunto la maggiore età. Il voto è personale ed eguale, libero e segreto. Il suo esercizio è dovere civico. La legge stabilisce requisiti e modalità per l'esercizio del diritto di voto dei cittadini residenti all'estero e ne assicura l'effettività. A tale fine è istituita una circoscrizione Estero per l'elezione delle Camere, alla quale sono assegnati seggi nel numero stabilito da norma costituzionale e secondo criteri determinati dalla legge. Il diritto di voto non può essere limitato se non per incapacità civile o per effetto di sentenza penale irrevocabile o nei casi di indegnità morale indicati dalla legge*" .

Ancora di carattere "politico" è il Manifesto sottoscritto dagli studiosi partecipanti al *Second Workshop on Mathematics and Democracy* tenuto ad Erice (TP) nel 2005, che elenca le caratteristiche di quello che i sottoscrittori chiamano un SISTEMA ELETTORALE EQUO. Tra le altre, oltre la trasparenza, la semplicità e l'accuratezza, la richiesta che ogni voto abbia il suo peso e che il sistema renda praticamente impossibile per una minoranza avere la maggioranza del Parlamento [13].

Sembrerebbe che il sistema che più corrisponde a questi requisiti sia quello "proporzionale" il quale però non è esente da inconvenienti tra cui il favorire la dispersione di voti in piccoli partiti il che, in assenza di correttivi, come le soglie di sbarramento o il premio di maggioranza, rende difficile la formazione di maggioranze di governo.

Lasciando alla Scienza della Politica di studiare quali debbano essere i requisiti *politici* di un sistema elettorale, quali sono le norme più tecniche per un sistema elettorale proporzionale?

Si parla nel seguito dell'elezione della Camera dei Deputati.

Una prima osservazione riguarda il numero dei seggi assegnati alle varie Circoscrizioni, cioè le 27 parti in cui è divisa l'Italia ai fini elettorali, che coincidono con le Regioni, ad eccezione di alcune regioni più popolose che sono divise in due circoscrizioni (Piemonte, Veneto, Lazio, Campania, Sicilia) o in tre (Lombardia).

Sembrerebbe ragionevole che tale numero sia proporzionale al numero di elettori di quella circoscrizione.

A questo riguardo c'è da osservare che nella legge del 1957 [4] era previsto un rapporto costante (80000) tra numero di elettori e numero di seggi della Camera, il che però rendeva la dimensione della Camera dipendente dalla consistenza della popolazione; dal 1963 in poi è stata fissata definitivamente in 630 la consistenza dalla Camera. Tolti i 12 seggi assegnati alla Circoscrizione Estero, rimangono 618 seggi da assegnare alle 27 circoscrizioni in Italia.

Nella tabella che segue è riportato, per ogni circoscrizione, il numero degli aventi diritto al voto nelle elezioni politiche del 2008, il numero di seggi spettanti e il rapporto tra questi. Si vede che c'è una grande disparità tra la Valle d'Aosta dove per più di 100.000 elettori è previsto 1 seggio e la Calabria dove è previsto un seggio ogni 72.000 aventi diritto al voto.

TABELLA 1. – Circoscrizioni: votanti/Seggi.

| circ. | elettori | seggi | elet/s |
|---|---|---|---|
| Nazionale | 47142437 | 618 | 76282.00 |
| Valle d'Aosta | 100623 | 1 | 100623.00 |
| Piemonte1 | 1798630 | 24 | 74942.91 |
| Piemonte2 | 1697457 | 23 | 73802.47 |
| Lombardia1 | 3010948 | 40 | 75273.70 |
| Lombardia2 | 3248230 | 43 | 75540.23 |
| Lombardia3 | 1185672 | 15 | 79044.80 |
| Trentino A. A. | 760369 | 9 | 84485.44 |
| Veneto1 | 2222833 | 30 | 74094.43 |
| Veneto2 | 1496722 | 20 | 74836.10 |
| Friuli V. G. | 980136 | 13 | 75395.07 |
| Liguria | 1319773 | 17 | 77633.70 |
| Emilia R. | 3345509 | 43 | 77802.53 |
| Toscana | 2923433 | 38 | 76932.44 |
| Umbria | 690176 | 9 | 76686.22 |
| Marche | 1218803 | 16 | 76175.18 |
| Lazio1 | 3204855 | 40 | 80121.37 |
| Lazio2 | 1219047 | 15 | 81269.80 |
| Abruzzo | 1068489 | 14 | 76320.64 |
| Molise | 263993 | 3 | 87997.66 |
| Campania1 | 2423283 | 33 | 73432.81 |
| Campania2 | 2157252 | 29 | 74388.00 |
| Puglia | 3285298 | 44 | 74665.86 |
| Basilicata | 481715 | 6 | 80285.83 |
| Calabria | 1588381 | 22 | 72199.13 |
| Sicilia1 | 1945323 | 25 | 77812.92 |
| Sicilia2 | 2115748 | 28 | 75562.42 |
| Sardegna | 1389739 | 18 | 77207.72 |

## 2. – Proprietà di un sistema elettorale “equo”

Si introducono di seguito alcuni parametri e si definiscono proprietà utili a valutare l'“equità” di un sistema elettorale [3].

1. Il rapporto $Q := \dfrac{V}{S}$ è noto in Gran Bretagna come la *Quota di Hare* dal nome dell'avvocato inglese Thomas Hare che lo usò nel 1859; altrove in Europa è noto come *quota semplice* o *naturale.* Se un partito ha un numero esatto $n$ di quote di Hare di voti, allora deve ricevere esattamente $n$ seggi; altrimenti, se ha tra $n$ ed $n+1$ quote di Hare di voti, allora dovrà ricevere $n$ o $n+1$ seggi. Quindi un partito con $v_i$ voti riceverà un numero di seggi pari a $\left[\dfrac{S}{V}v_i\right]$ o $\left[\dfrac{S}{V}v_i\right]+1$, dove con $[x]$ si è indicata la parte intera del numero reale $x$, il massimo numero intero non superiore a $x$. Questi due numeri si chiamano rispettivamente *Hare minimo* e *Hare massimo* del partito $i$.
*Ogni partito dovrebbe avere un numero di seggi compreso tra il suo Hare minimo e il suo Hare massimo.*

2. La *monotonia rispetto alla Camera* è la proprietà che non si perdano i seggi acquisiti se in una successiva distribuzione il numero dei seggi totali $S$ viene aumentato: può accadere infatti che se il numero di seggi da attribuire passa da $S$ a $S+1$, un partito che avesse ottenuto $s$ seggi nella prima distribuzione ne abbia $s-1$ nella seconda. Questo fenomeno è noto come “Paradosso dell'Alabama”, perché dopo il censimento del 1880 si scoprì che se la dimensione della Camera dei Rappresentanti fosse stata aumentata da 299 a 300, allora il numero dei seggi assegnati allo Stato dell'Alabama sarebbe diminuito da 8 a 7.
*Un sistema equo dovrebbe essere monotono rispetto alla Camera.*

3. Un altro requisito di equità nasce da un argomento che fu proposto per primo dall'avvocato inglese Henry Droop nel 1868 [5]. Droop sottolineò che in una elezione di $S$ individui con $V$ votanti ogni candidato con più di $V/(S+1)$ voti doveva essere eletto, perché non

vi possono essere altri $S$ candidati con un numero di voti superiore a $V/(S+1)$. Il numero $V/(S+1)$ prese allora il nome di *quota di Droop*. Con un argomento simile, nel caso dei seggi da attribuire ai partiti, si potrebbe asserire che un partito che abbia avuto un numero di voti maggiore di $s$ quote di Droop, deve ricevere almeno $s$ seggi, e poiché $v_i = \frac{v_i}{V/(S+1)} V/(S+1) \geq \left\lfloor \frac{(S+1)v_i}{V} \right\rfloor V/(S+1)$, un partito con $v_i$ voti deve ricevere almeno $\left\lfloor \frac{(S+1)v_i}{V} \right\rfloor$ seggi (1). Il numero $\left\lfloor \frac{(S+1)v_i}{V} \right\rfloor$ si chiamerà *Droop minimo* del partito $i$ [3], [8].

*Ogni partito dovrebbe ricevere un numero di seggi pari almeno al suo Droop minimo.*

4. La *superadditività* è la proprietà per cui $s_{X+Y} \geq s_X + s_Y$ che non permette di guadagnare seggi con una scissione: anche questa sembra una buona proprietà per un sistema elettorale.
5. La *monotonia*: $v_X > v_Y \Rightarrow s_X \geq s_Y$.
6. Il rispetto della *maggioranza*: $v_X \geq V/2 \Rightarrow s_X \geq S/2$.

## 3. – Il metodo italiano: pro e contro

Il metodo per assegnare i seggi usato in Italia è il metodo di distribuzione mediante le *quote di Hare con il massimo resto*: ad ogni partito viene per prima cosa attribuito un numero di seggi pari al suo Hare minimo e, se restano seggi da assegnare, questi vengono attribuiti a quei partiti che hanno i maggiori resti nella divisione $\frac{v}{Q}$. (2)

(1) Eccetto nel caso, per altro assai improbabile, in cui il rapporto $\frac{v(S+1)}{V}$ sia un numero intero per ogni partito, in questo caso infatti, attribuendo ad ogni partito il suo Droop minimo si avrebbe $S \geq \sum \frac{v_i(S+1)}{V} = S+1$. Quando si presentasse questa situazione, il modo migliore per risolverla sarebbe di aumentare di un seggio la consistenza della Camera.

(2) Qualunque sia il metodo di attribuzione, si presenta sempre il problema di come risolvere i pareggi: si può favorire il partito maggiore, se ce ne fosse uno solo o affidarsi alla sorte.

Negli Stati Uniti questo metodo è noto come *Metodo di Vinton* e risale al 1850. In realtà esso fu proposto anche da Alexander Hamilton nel 1792, ed è stato usato dopo ogni censimento dal 1850 al 1900 per formare la Camera dei Rappresentanti, assegnando i seggi ai vari stati in proporzione alla popolazione. Questo metodo rispetta ovviamente l'Hare minimo e l'Hare massimo e verifica la Proprietà 5 (vedi Proposizione 1) ma ha diversi inconvenienti:

– Non è monotono rispetto alla Camera come si vede nell'esempio che segue, nel quale il numero di seggi passa da 9 (distribuzione 1, $Q_1 = 10$) a 10 (distribuzione 2, $Q_2 = 9$)

TABELLA 2. – Il metodo delle quote di Hare con il massimo resto non è monotono rispetto alla Camera [14].

| Partito | Voti | Hare1=$v/Q_1$ | Seggi1 | Hare2=$v/Q_2$ | Seggi2 |
|---|---|---|---|---|---|
| A | 43 | 4.3 | 4 | $4.\overline{7}$ | 5 |
| B | 42 | 4.2 | 4 | $4.\overline{6}$ | 5 |
| C | 5 | 0.5 | 1 | $0.\overline{5}$ | 0 |
| Totale | 90 | 9.0 | 9 | 10 | 10 |

– non rispetta il Droop minimo ([3])
– non rispetta la superadditività,
– non rispetta la maggioranza

come si vede negli esempi riportati nelle tabelle che seguono.

([3]) Un modo per evitare questo inconveniente è di fare una prima distribuzione, assegnando ad ogni partito il suo Droop minimo, che è maggiore dell'Hare minimo, ma se non vengono attribuiti tutti i seggi disponibili e si adotta il metodo dei massimi Droop-resti, si ricade ancora nell'inconveniente di non rispettare la monotonia rispetto alla camera, e può succedere che venga superato l'Hare massimo. Esempio A=979,B=13,C=8, con 100 seggi da distribuire, i Droop minimi sono rispettivamente 97, 1 e 0, e con i resti A prende un seggio in più superando l'Hare massimo.

TABELLA 3. – Il metodo delle quote di Hare con i massimi resti non garantisce il Droop minimo.

| Partito | Voti | Hare | Droop | Seggi |
|---|---|---|---|---|
| A | 842 | 84.2 | 85.042 | 84 |
| B | 86 | 8.6 | 8.686 | 9 |
| C | 72 | 7.2 | 7.272 | 7 |
| Totale | 1000 | 100.00 | 101.00 | 100 |

TABELLA 4. – Il metodo delle quote di Hare con i massimi resti non rispetta la superadditività.

| Partito | Voti | Hare | Seggi |
|---|---|---|---|
| A | 596 | 59.6 | 59 |
| B | 147 | 14.7 | 15 |
| C | 257 | 25.7 | 26 |
| A | 596 | 59.6 | 60 |
| B+C | 404 | 40.4 | 40 |
| Totale | 1000 | 100.00 | 100 |

TABELLA 5. – Il metodo delle quote di Hare con i massimi resti non rispetta la maggioranza.

| Partito | Voti | Hare | Seggi |
|---|---|---|---|
| A | 51 | 5.61 | 5 |
| B | 34 | 3.74 | 3+1 |
| C | 15 | 1.65 | 1+1 |
| Totale | 100 | 11.00 | 11 |

PROPOSIZIONE 1. – *Il metodo delle quote di Hare con i massimi resti è monotono.*

DIM. – Supponiamo che $v_X$ sia maggiore di $v_Y$. Nella prima assegnazione di seggi ogni partito guadagna il suo Hare minimo: $H_X = \left[\frac{v_X}{V}S\right] \geq H_Y = \left[\frac{v_Y}{V}S\right]$, quindi se nessuno dei due partiti ottiene seggi con i resti si ha $s_X = H_X \geq H_Y = s_Y$. Analogamente, se entrambi i partiti guadagnano un seggio con i resti, $s_X = H_X + 1 \geq H_Y + 1 = s_Y$. Se il partito $X$ ottiene un seggio con i resti e il partito $Y$ no, $s_X = H_X + 1 \geq H_Y + 1 = S_Y + 1 > s_Y$.

Resta da esaminare il caso in cui $Y$ prende un seggio con i resti e $X$ no: essendo $v = HQ + r$, se $r_X < r_Y$ non può essere $H_X = H_Y$, quindi sarà $H_X > H_Y$ (poiché $v_X > v_Y$) $s_X = H_X \geq H_Y + 1 = s_Y$.

## 4. – I metodi Sainte Lagüe e D'Hondt

Un metodo completamente differente è stato proposto da Andrè Sainte Laguë (1882-1950) nel 1910, nell'articolo [12]. L'autore tratta la questione come un problema di minimizzazione dell'errore. Più precisamente: l'errore $|s_i - \alpha_i|$ è quello che si commette approssimando le soluzioni $s_i = v_i \dfrac{S}{V} = \dfrac{v_i}{Q}$ delle proporzioni con degli interi $\alpha_i$ che sono le incognite del problema. Sainte Lagüe osserva che ogni elettore ha diritto ad una "frazione" di deputato pari a $S/V = 1/Q$ e riceve in realtà – se ha votato per il partito $i$ – $\alpha_i/v_i$ di deputato per cui si commette, nella ripartizione, un errore pari a

$$\left|\frac{\alpha_i}{v_i} - \frac{S}{V}\right|.$$

Lo scopo è determinare i numeri $\alpha_i$ in modo da minimizzare questo errore.

Sainte Lagüe utilizza il metodo di Gauss dei **minimi quadrati** che consiste nel minimizzare la somma dei quadrati degli errori commessi.

L'errore commesso è, come abbiamo visto, per ciascun elettore dell'$i$-mo partito $\left|\dfrac{\alpha_i}{v_i} - \dfrac{S}{V}\right|$. La somma dei quadrati degli errori per i $v_i$ elettori di questa lista è $v_i\left(\dfrac{\alpha_i}{v_i} - \dfrac{S}{V}\right)^2$, e quindi per la totalità degli elettori

$$\begin{aligned}
\sigma &= \sum_{i=1}^{n} v_i\left(\frac{\alpha_i}{v_i} - \frac{S}{V}\right)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{(\alpha_i V - S v_i)^2}{V^2 v_i^2} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{v_i \alpha_i^2 V^2 - 2\alpha_i v_i^2 S V + v_i^3 S^2}{V^2 v_i^2} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i^2}{v_i} - 2\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i S}{V} + \sum_{i=1}^{n} \frac{v_i S^2}{V^2}
\end{aligned}$$

Tenuto conto che $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ deve essere uguale al numero dei seggi $S$ e che $\sum_{i=1}^{n} v_i = V$ si ha:

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i^2}{v_i} - 2\frac{S^2}{V} + \frac{S^2}{V} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i^2}{v_i} - \frac{S^2}{V} \tag{1}$$

La quantità da minimizzare è dunque $\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i^2}{v_i}$. Sainte Lagüe osserva a questo punto che, se $\alpha$ è un naturale non nullo,

$$\alpha^2 = 1 + 3 + 5 + \ldots (2\alpha - 3) + (2\alpha - 1) \tag{2}$$

come si dimostra facilmente per induzione.

Discende da questa osservazione che l'espressione da minimizzare è:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i^2}{v_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1+3+5+\ldots 2\alpha_i - 1}{v_i} = \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{1}{v_i} + \frac{3}{v_i} + \frac{5}{v_i} + \ldots \frac{2\alpha_i - 1}{v_i} \right) \tag{3}$$

Occorre trovare i numeri $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ tali che : $\sum_{i} \alpha_i = S$ e in modo che sia minima la somma (3). Se si considera la tabella seguente ( a $n$ righe e $S$ colonne):

$$\begin{array}{cccccccc}
\frac{1}{v_1} & \frac{3}{v_1} & \frac{5}{v_1} & \ldots & \ldots & \frac{2\alpha_1 - 1}{v_1} & \ldots & \frac{2S-1}{v_1} \\
\frac{1}{v_2} & \frac{3}{v_2} & \frac{5}{v_2} & \ldots & \frac{2\alpha_2 - 1}{v_2} & \vdots & \ldots & \frac{2S-1}{v_2} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \ldots & \vdots & \ldots & \vdots \\
\frac{1}{v_n} & \frac{3}{v_n} & \frac{5}{v_n} & \ldots & \ldots & \frac{2\alpha_n - 1}{v_n} & \ldots & \frac{2S-1}{v_n}
\end{array} \tag{4}$$

nella quale, non essendo noti gli $\alpha_i$, non è precisata la posizione dei quozienti $\frac{2\alpha_i - 1}{v_i}$, si vede che per rendere minima la somma (3) occorrerà prendere precisamente gli $S$ numeri più piccoli della tabella, la qual cosa è resa agevole dal fatto che i numeri sono, su ogni riga, in ordine crescente. Una ulteriore facilitazione si avrà se si ordinano i voti $v_i$ in modo decrescente $v_1 > v_2 > \ldots, > v_n$ cosicché i numeri saranno in ordine crescente anche in ogni colonna.

Equivalentemente, se si prendono i reciproci dei suddetti rapporti, si devono prendere gli $S$ numeri più grandi della nuova tabella

$$
\begin{array}{ccccccc}
\frac{v_1}{1} & \frac{v_1}{3} & \frac{v_1}{5} & \cdots & \frac{v_1}{2\alpha_1 - 1} & \cdots & \frac{v_1}{2S-1} \\
\frac{v_2}{1} & \frac{v_2}{3} & \frac{v_2}{5} & \cdots & \frac{v_2}{2\alpha_2 - 1} & \cdots & \frac{v_2}{2S-1} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
\frac{v_n}{1} & \frac{v_n}{3} & \frac{v_n}{5} & \cdots & \frac{v_n}{2\alpha_n - 1} & \cdots & \frac{v_n}{2S-1}
\end{array}
\tag{5}
$$

Le soluzioni $\alpha_i$ sono precisamente il numero di quozienti presi dalla riga $i$-ma della tabella.

Ne segue la **regola dei minimi quadrati applicata alla rappresentazione proporzionale**: *Si dividono i numeri $v_i$ per i dispari consecutivi $1, 3, 5 \ldots$, e successivamente si prendono, nelle diverse liste di quozienti così formate, quelli più grandi fino ad averne S. La lista i riceve quindi tanti seggi quanti quozienti ha avuto tra quegli S la riga i–ma.*

Illustriamo il metodo con un esempio: i tre partiti $P_1, P_2$ e $P_3$ hanno ottenuto rispettivamente $v_1 = 71, v_2 = 42$ e $v_3 = 13$ voti e si devono spartire $S = 7$ seggi.

TABELLA 6. – Il metodo dei minimi quadrati di Sainte Lagüe.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **71** | $\mathbf{\frac{71}{3}}$ | $\mathbf{\frac{71}{5}}$ | $\mathbf{\frac{71}{7}}$ | $\frac{71}{9}$ |
| **42** | $\mathbf{\frac{42}{3}}$ | $\frac{42}{5}$ | $\frac{42}{7}$ | $\frac{42}{9}$ |
| **13** | $\frac{13}{3}$ | $\frac{13}{5}$ | $\frac{13}{7}$ | $\frac{13}{9}$ |

$71 > 42 > \frac{71}{3} > \frac{71}{5} > \frac{42}{3} > 13 > \frac{71}{7}$. I quozienti, detti anche “quote” costituiscono un lista decrescente. I 7 maggiori assegnano i seggi: 4 al partito $P_1$, 2 al partito $P_2$, ed infine 1 al partito $P_3$.

In pratica i seggi vengono attribuiti, uno alla volta. Ad ogni passo si attribuisce un seggio mediante il confronto delle quote $\frac{v_1}{2\alpha_1 - 1}, \ldots, \frac{v_N}{2\alpha_N - 1}$, dove ognuna delle liste ha già ottenuto $\alpha_i - 1$ seggi. Il seggio in palio andrà al partito il cui quoziente è maggiore e, per il successivo confronto la quota di quel partito passerà da $\frac{v}{2\alpha - 1}$ a $\frac{v}{2(\alpha + 1) - 1}$. Quindi ad ogni passo $s_i = \alpha_i$ per la lista che ottiene il seggio, mentre $s_j = \alpha_j - 1$ per le altre.

Seguendo passo passo il procedimento nell’esempio si ha:

Passo 1 Si confrontano i quozienti con $\alpha = 1$, $\mathbf{71}, 42, 13$. Il maggiore risulta 71, la quota di $P_1$ diventa $\frac{71}{3}$ $(\alpha_1 = 2)$.

Passo 2 $\frac{71}{3}, \mathbf{42}, 13$. Il maggiore risulta 42, la quota di $P_2$ diventa $\frac{42}{3}$ $(\alpha_2 = 2)$.

Passo 3 $\mathbf{\frac{71}{3}}, \frac{42}{3}, 13$. Il maggiore risulta $\frac{71}{3}$, la quota di $P_1$ diventa $\frac{71}{5}$ $(\alpha_1 = 3)$.

Passo 4 $\mathbf{\frac{71}{5}}, \frac{42}{3}, 13$. Il maggiore risulta $\frac{71}{5}$, la quota di $P_1$ diventa $\frac{71}{7}$ $(\alpha_1 = 4)$.

Passo 5 $\frac{71}{7}, \mathbf{\frac{42}{3}}, 13$. Il maggiore risulta $\frac{42}{3}$, la quota di $P_2$ diventa $\frac{42}{5}$ $(\alpha_2 = 3)$.

Passo 6 $\frac{71}{5}, \frac{42}{5}, \mathbf{13}$. Il maggiore risulta 13, la quota di $P_3$ diventa $\frac{13}{3} (\alpha_3 = 2)$.

Passo 7 ULTIMO Si confrontano $\frac{\mathbf{71}}{\mathbf{7}}, \frac{42}{5}, \frac{13}{3}$. Il maggiore risulta $\frac{71}{7}$.

OSSERVAZIONE. – La quota di $P_1$ è $Q = \frac{71}{7}$, $s_1 = 4 = \alpha_1$; le quote degli altri partiti $\left(\frac{42}{5} \text{ e } \frac{13}{3}\right)$ sono minori di $Q$, mentre le quote che avevano $P_2$ e $P_3$ quando hanno ottenuto il loro ultimo seggio $\left(\frac{42}{3} \text{ e } 13 \text{ rispettivamente}\right)$ sono maggiori di $Q$.

Una variante di questo metodo è il metodo D'Hondt che prende il nome dal belga Victor D'Hondt che lo propose nel 1882.

La variante consiste nel considerare i quozienti con tutti i divisori e non soltanto i dispari.

Questo metodo è stato usato in Italia per un certo periodo, per assegnare i seggi della quota proporzionale del Senato della Repubblica, nella Regione Trentino Alto Adige, come previsto dalla Legge Elettorale D.Lgs. 20 dicembre 1993, n. 533. art. 21bis, comma 3.

## 5. – Proprietà dei metodi Sainte Lagüe e D'Hondt

Esaminiamo ora il funzionamento di questi metodi dei quozienti rispetto ai requisiti di equità 1-5.

1 - Hare. Pur non rispettando l'Hare massimo (vedi esempio Tab. 7) i metodi dei quozienti si possono modificare affinchè anche questo requisito venga soddisfatto, cessando di attribuire seggi a quei partiti che abbiano raggiunto la soglia massima.

TABELLA 7. – Il metodo d'Hondt può superare l'Hare massimo [14].

| Partito | Voti | Hare Max | Seggi |
|---|---|---|---|
| A | 285 | 3 | 4 |
| B | 65 | 1 | 1 |
| C | 64 | 1 | 1 |
| D | 63 | 1 | 0 |
| E | 62 | 1 | 0 |
| F | 61 | 1 | 0 |

2 - Monotonia. Poiché i seggi vengono attribuiti uno alla volta, ne segue subito che sono monotoni rispetto alla Camera.

Le altre proprietà vengono esaminate nel seguente Teorema:

TEOREMA 1. – *Il metodo d'Hondt garantisce l'Hare minimo e soddisfa le proprietà* 3, 4, 5 *e* 6. *Il metodo Sainte Lagüe non verifica le proprietà* 4 *e* 6; *verifica la proprietà* 5 *e garantisce il Droop minimo (propr.* 3*) se è verificata l'ipotesi aggiuntiva* $2Q \leq D$ *dove* $Q$ *è il valore del quoziente quando viene assegnato l'ultimo seggio e* $D = \dfrac{V}{S+1}$ *è la quota di Droop.*

Dimostrazione:

3 - Droop. Che il metodo D'Hondt garantisca ad ogni partito il suo Droop minimo (e quindi l'Hare minimo, essendo quest'ultimo minore o uguale del Droop minimo) è dimostrato in [14].
Più laborioso è dimostrare la Proprietà 3 per il metodo Sainte Lagüe. Sia $Q$ il valore della quota quando viene assegnato l'ultimo seggio. Vogliamo dimostrare

$$\frac{1}{2}\left(\frac{v_i}{Q}-1\right) \leq s_i \leq \frac{1}{2}\left(\frac{v_i}{Q}+1\right) \tag{6}$$

Se è $P_i$ che ottiene questo seggio, allora $Q(2\alpha_i - 1) = v_i \Leftrightarrow$:

$$\alpha_i = \frac{1}{2}\left(\frac{v_i}{Q}+1\right) > \frac{1}{2}\left(\frac{v_i}{Q}-1\right)$$

Essendo $s_i = \alpha_i$,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{v_i}{Q}-1\right) < s_i \leq \frac{1}{2}\left(\frac{v_i}{Q}+1\right)$$

(dove in realtà vale l'uguale al secondo membro).
Per $P_j (j \neq i)$,

- nell'ultimo confronto si ha $\dfrac{v_j}{2\alpha_j - 1} < Q$ e $\alpha_j = s_j + 1$; quindi $v_j < Q(2s_j + 1)$ da cui
$$s_j > \frac{1}{2}\left(\frac{v_j}{Q}-1\right)$$
- mentre nel confronto in cui $P_j$ ha preso il suo ultimo seggio, la sua quota era $\dfrac{v_j}{2\alpha_j - 1}$ con $\alpha_j = s_j$ ed essa era maggiore di $Q$ (perché i quozienti sono disposti in ordine decrescente). Quindi $\dfrac{v_j}{2s_j - 1} \geq Q$ da cui
$$s_j \leq \frac{1}{2}\left(\frac{v_j}{Q}+1\right)$$

Quindi vale la (6) per ogni $i$.

Se $Q \leq \dfrac{D}{2}, \dfrac{v_i}{2Q} \geq \dfrac{v_i}{D}$ e in questo caso si può dimostrare che $s_i \geq \left[\dfrac{v_i}{D}\right]$. Infatti se $\dfrac{v_i}{D} - \left[\dfrac{v_i}{D}\right] \geq \dfrac{1}{2}$ si ha $s_i > \dfrac{v_i}{D} - \dfrac{1}{2} \geq \left[\dfrac{v_i}{D}\right]$. Se $\dfrac{v_i}{D} - \left[\dfrac{v_i}{D}\right] < \dfrac{1}{2}$ si ha $\dfrac{v_i}{D} - \dfrac{1}{2} < \left[\dfrac{v_i}{D}\right] \leq \dfrac{v_i}{D}$ e tra $\dfrac{v_i}{D} - \dfrac{1}{2}$ e $\dfrac{v_i}{D}$ c'è un solo intero, quindi necessariamente $s_i \geq \left[\dfrac{v_i}{D}\right]$.

Nello stesso modo si vede che se $Q \leq \dfrac{H}{2} := \dfrac{V}{S}$ il metodo Sainte Lagüe garantisce l'Hare minimo.

Osservazione: se $Q > \dfrac{D}{2}$ il Droop minimo non è garantito come non è garantito l'Hare minimo nel caso $Q > \dfrac{H}{2} := \dfrac{V}{S}$. Infatti

TABELLA 8. – Il metodo Sainte Lagüe non garantisce il Droop minimo.

| Partito | Voti | Droop | Seggi |
|---|---|---|---|
| A | 80 | 3.0477 | 2 |
| B | 25 | 0.9523 | 1 |
| Totale | 105 | 4.000 | 3 |

TABELLA 9. – Il metodo Sainte Lagüe non garantisce l'Hare minimo.

| Partito | Voti | Hare min | Seggi |
|---|---|---|---|
| A | 280 | 3 | 2 |
| B | 66 | 0 | 1 |
| C | 65 | 0 | 1 |
| D | 64 | 0 | 1 |
| E | 63 | 0 | 1 |
| F | 62 | 0 | 1 |

4 - Superadditività. In [3] gli autori dimostrano che il metodo D'Hondt è superadditivo.
Il metodo dei minimi quadrati (Sainte Lagüe) non è superadditivo come mostra l'esempio seguente dove 3 partiti A, B, C si contendono 5 seggi, separatamente, oppure con la coalizione B + C contro il partito A:

TABELLA 10. – Il metodo Sainte Lagüe non è superadditivo.

| Partito | Voti | Seggi |
|---|---|---|
| A | 40 | 2 |
| B | 25 | 2 |
| C | 10 | 1 |
| A | 40 | 3 |
| B+C | 35 | 2 |

5 - Monotonia cioè $v_i > v_j \Rightarrow s_i \geq s_j$. I metodi dei quozienti sono monotoni. Si dimostra per induzione sul numero dei seggi da attribuire, $S$.

Supponiamo che il numero dei voti ottenuti dai partiti siano ordinati in senso decrescente: $v_1 > v_2 > \ldots, > v_n$.
Se $S = 1$ il primo ed unico seggio viene attribuito al primo partito e quindi la proprietà è soddisfatta.
Nel seguito poniamo $d(s) = s + 1$ oppure $d(s) = 2s + 1$ a secondo che si tratti del metodo d'Hondt o del metodo Sainte Lagüe.
Dopo aver attribuito i primi $S - 1$ seggi la situazione è, per l'ipotesi induttiva, $s_1 \geq s_2 \geq \ldots \geq s_n$ e si deve effettuare il confronto tra i quozienti $\dfrac{v_i}{d(s_i)}, i = 1, 2, \ldots, n$. Si supponga che il massimo dei quozienti sia $\dfrac{v_k}{d(s_k)}$ per cui il partito $P_k$ passa da $s_k$ ad $s_k + 1$ seggi.
Sia $i \neq k$, ci sono due casi possibili: se $i > k, s_i \leq s_k < s_k + 1$ e l'ordine resta invariato; se $i < k$ non può essere $s_i = s_k$ perché sarebbe $\dfrac{v_i}{d(s_i)} < \dfrac{v_k}{d(s_k)}$ contro l'ipotesi che il maggiore quoziente sia quello relativo al partito $k$-mo. Quindi deve essere $s_i > s_k$ ovvero $s_i \geq s_k - 1$, pertanto se $P_k$ guadagna un seggio l'ordine resta invariato.

6 - Maggioranza. Questa proprietà discende dal rispetto del Droop minimo. Infatti se $v \geq V/2$, $s \geq \left[\dfrac{v}{V}(S+1)\right] \geq \left[\dfrac{S+1}{2}\right] \geq \dfrac{S}{2}$.

Il metodo Sainte Lagüe non soddisfa questa proprietà, come si vede nell'esempio in cui il partito A, avendo 351 voti, ha più della metà dei 666 voti complessivi, ma ottiene solo 3 degli 8 seggi in palio.

TABELLA 11. – Il metodo Sainte Lagüe non soddisfa la maggioranza.

| Partito | Voti | Seggi |
|---|---|---|
| A | 351 | 3 |
| B | 65 | 1 |
| C | 64 | 1 |
| C | 63 | 1 |
| D | 62 | 1 |
| E | 61 | 1 |

## 6. – Attribuzione dei seggi per partito e per circoscrizione

Quando si debbano attribuire i seggi per partito e per circoscrizione in base ai voti ottenuti dai partiti nelle varie circoscrizioni si ha un problema di *allocazione biproporzionale* le cui difficoltà sono state ampiamente studiate in [11].

Qui viene trattato ancora con il metodo dei minimi quadrati illustrato precedentemente, avendo come dati il numero $v_{ij}$ dei voti avuti dal partito $i$ nella circoscrizione $j$, e volendo calcolare $s_{ij}$, il numero dei seggi da attribuire a quel partito in quella circoscrizione.

Sia $M$ il numero dei partiti, $N$ il numero delle circoscrizioni, $S$ numero dei seggi da assegnare, $\sigma_j$ il numero dei seggi da assegnare nella circoscrizione $j$ allora:

$$\sigma_j = \sum_{i=1}^{M} s_{ij} \quad j = 1, \ldots, N$$

$$S = \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} s_{ij} \quad V = \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} v_{ij}$$

$$V_i = \sum_{j=1}^{N} v_{ij} \text{ voti ottenuti dal partito } i = 1, \ldots, M$$

$$v_j = \sum_{i=1}^{M} v_{ij} \text{ voti espressi nella circoscrizione } j = 1, \ldots, N$$

$$S_i = \sum_{j=1}^{N} s_{ij} \text{ seggi da attribuire al partito } i = 1 \ldots, M$$

La proporzione che consente di calcolare $s_{ij}$ rispetto alle circoscrizioni è:

$$s_{ij} : v_{ij} = \sigma_j : v_j \quad \forall j$$

il peso di un voto deve essere uguale in ogni circoscrizione quindi $\dfrac{\sigma_j}{v_j} = \dfrac{S}{V}$ mentre rispetto ai partiti è

$$s_{ij} : v_{ij} = S_i : V_i \quad \forall i$$

e il peso di un voto deve essere uguale per ogni partito, cioè: $\dfrac{S_i}{V_i} = \dfrac{S}{V}$.

L'errore da minimizzare è dunque $\left|\dfrac{\alpha_{ij}}{v_{ij}} - \dfrac{S}{V}\right|$ dove $\alpha_{ij}$, le incognite del problema, sono i numeri interi che approssimano le soluzioni $s_{ij}$ e devono soddisfare $\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}\alpha_{ij} = S$.

$$\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\alpha_{ij}}{v_{ij}} - \frac{S}{V}\right)^2 v_{ij} =$$

$$\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}\frac{(\alpha_{ij}V - Sv_{ij})^2}{v_{ij}^2 V^2} v_{ij} =$$

$$\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}\frac{\alpha_{ij}^2 V^2 - 2\alpha_{ij}VSv_{ij} + S^2 v_{ij}^2}{v_{ij}V^2} =$$

$$\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}\frac{\alpha_{ij}^2}{v_{ij}} - \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N} 2\,\frac{\alpha_{ij}S}{V} + \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}\frac{S^2 v_{ij}}{V^2} =$$

$$\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}\frac{\alpha_{ij}^2}{v_{ij}} - 2\frac{S}{V}S + \frac{S^2}{V^2}V =$$

$$\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}\frac{\alpha_{ij}^2}{v_{ij}} - \frac{S^2}{V}$$

Ripetendo lo stesso calcolo fatto in precedenza, si devono valutare i quozienti

$$v_{ij}, \frac{v_{ij}}{3}, \frac{v_{ij}}{5} \dots \frac{v_{ij}}{2\alpha_{ij} - 1} \dots$$

e attribuire gli $S$ seggi in palio ai partiti e nelle circoscrizioni che hanno gli $S$ più grandi rapporti.

Si ha un analogo del metodo D'Hondt aggiungendo i quozienti con denominatore pari.

## Applicazioni

In questa ultima parte sono raccolti i risultati ottenuti con il il metodo d'Hondt e con il metodo Sainte Lagüe per le attribuzioni dei seggi per partito, per circoscrizione, utilizzando i dati delle elezioni per la Camera dei Deputati del 2008. I calcoli sono stati fatti usando *Maple*. Per il metodo D'Hondt è stato anche effettuato un calcolo con il controllo sul superamento dell'Hare minimo, nel senso che non sono stati attribuiti seggi ad un partito in una circoscrizione, se già era stata raggiunta quella soglia.

Come valutazione della "bontà" dell'approssimazione ottenuta, viene usata la differenza tra i risultati delle proporzioni e i seggi calcolati, come in [10] e messa in evidenza la massima differenza. Il metodo Sainte Lagüe è risultato preferibile.

Esistono molti indici che misurano la "disproporzionalità" di un sistema elettorale: Rae, Loosemore e Hanby, Sainte Lagüe, D'Hondt, [7], [8] e sono in realtà alla base del metodo stesso, nel senso che ogni sistema di distribuzione dei seggi genera la sua misura di disproporzionalità.

TABELLA 12. – Attribuzione dei seggi per partito, per circoscrizione con il metodo D'Hondt. Non viene effettuato il controllo sul superamento dell'Hare massimo.

| Circoscrizione | PD | IDV | PDL | Lega N. | MPA | UDC | SVP |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Piemonte1 | 10 | 1 | 9 | 2 | 0 | 1 | 0 |
| Piemonte2 | 7 | 1 | 9 | 4 | 0 | 1 | 0 |
| Lombardia1 | 15 | 2 | 18 | 8 | 0 | 1 | 0 |
| Lombardia2 | 13 | 2 | 17 | 15 | 0 | 2 | 0 |
| Lombardia3 | 6 | 0 | 6 | 3 | 0 | 0 | 0 |
| Trentino A. A. | 3 | 0 | 2 | 1 | 0 | 0 | 3 |
| Veneto1 | 9 | 1 | 10 | 10 | 0 | 2 | 0 |
| Veneto2 | 6 | 1 | 6 | 6 | 0 | 1 | 0 |
| Friuli V. G. | 4 | 0 | 5 | 2 | 0 | 0 | 0 |
| Liguria | 7 | 1 | 7 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| Emilia R. | 26 | 2 | 16 | 4 | 0 | 2 | 0 |
| Toscana | 22 | 1 | 15 | 0 | 0 | 2 | 0 |
| Umbria | 8 | 0 | 7 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| Marche | 5 | 0 | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Lazio1 | 20 | 2 | 21 | 0 | 0 | 2 | 0 |
| Lazio2 | 6 | 0 | 9 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| Abruzzo | 5 | 1 | 7 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Molise | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Campania1 | 10 | 1 | 17 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| Campania2 | 9 | 1 | 16 | 0 | 0 | 2 | 0 |
| Puglia | 15 | 2 | 22 | 0 | 0 | 3 | 0 |
| Basilicata | 2 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Calabria | 7 | 0 | 9 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| Sicilia1 | 7 | 1 | 12 | 0 | 1 | 3 | 0 |
| Sicilia2 | 7 | 0 | 14 | 0 | 2 | 2 | 0 |
| Sardegna | 7 | 0 | 8 | 0 | 0 | 1 | 0 |

TABELLA 13. – Le differenze tra i seggi calcolati con il metodo D'Hondt (tab. 12) e i risultati delle proporzioni (cfr. pag. 17). L'errore massimo è 1.98539.

| Circoscrizione | PD | IDV | PDL | Lega N. | MPA | UDC | SVP |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Piemonte1 | .51803 | −.55542 | .54326 | −.25931 | 0. | −.31502 | 0. |
| Piemonte2 | −.09932 | .019425 | −.05941 | −.16644 | 0. | −.33135 | 0. |
| Lombardia1 | .69612 | −.09169 | 1.45568 | .60469 | 0. | −.61986 | 0. |
| Lombardia2 | .57049 | .07131 | 1.09505 | .86580 | 0. | −.45620 | 0. |
| Lombardia3 | .38625 | −.58064 | −.11036 | −.33440 | 0. | −.81722 | 0. |
| Trentino A. A. | .17571 | −.38309 | −.41532 | −.08717 | 0. | −.48112 | .23407 |
| Veneto1 | .09572 | −.36217 | .57649 | .19654 | 0. | −.07465 | 0. |
| Veneto2 | −.30940 | −.10548 | −.26572 | .25391 | 0. | −.12859 | 0. |
| Friuli V. G. | −.47464 | −.62357 | .03689 | .13618 | 0. | −.86107 | 0. |
| Liguria | −.03675 | .07788 | .12116 | −.27956 | 0. | −.70815 | 0. |
| Emilia R. | **1.98539** | −.21958 | .98340 | −.07873 | 0. | −.24296 | 0. |
| Toscana | 1.20431 | −.54807 | .97527 | −.90397 | 0. | .15509 | 0. |
| Umbria | .41546 | −.82385 | .58678 | −.40392 | 0. | −.12057 | 0. |
| Marche | .30691 | −.31724 | .35345 | −.17613 | 0. | −.47855 | 0. |
| Lazio1 | 1.61555 | −.14878 | 1.70727 | 0. | −.13140 | −.01335 | 0. |
| Lazio2 | .43863 | −.53957 | .05377 | 0. | −.07285 | −.09672 | 0. |
| Abruzzo | −.19087 | −.08743 | .55503 | 0. | −.25034 | −.90723 | 0. |
| Molise | −.66153 | −.02289 | −.34805 | 0. | −.19785 | −.21456 | 0. |
| Campania1 | .35195 | −.61637 | 1.36511 | 0. | −.86929 | −.77295 | 0. |
| Campania2 | .40596 | −.34257 | .94670 | 0. | −.62844 | −.29498 | 0. |
| Puglia | 1.16362 | −.03031 | 1.63532 | 0. | −.79333 | −.54782 | 0. |
| Basilicata | −.46099 | −.37714 | −.34658 | 0. | −.04961 | −.43871 | 0. |
| Calabria | .51406 | −.71599 | .78528 | 0. | −.51398 | −.63989 | 0. |
| Sicilia1 | .59422 | .03537 | .61791 | 0. | −.37767 | .174218 | 0. |
| Sicilia2 | −.04897 | −.82958 | .72409 | 0. | −.68534 | −.13324 | 0. |
| Sardegna | .36758 | −.72949 | .22490 | 0. | −.11614 | −.02362 | 0. |

TABELLA 14. – Attribuzione dei seggi per partito, per circoscrizione con controllo del superamento dell'Hare massimo.

| Circoscrizione | PD | IDV | PDL | Lega N. | MPA | UDC | SVP |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Piemonte1 | 10 | 1 | 9 | 2 | 0 | 1 | 0 |
| Piemonte2 | 8 | 1 | 10 | 4 | 0 | 1 | 0 |
| Lombardia1 | 15 | 2 | 17 | 8 | 0 | 1 | 0 |
| Lombardia2 | 13 | 2 | 16 | 15 | 0 | 2 | 0 |
| Lombardia3 | 6 | 0 | 6 | 3 | 0 | 0 | 0 |
| Trentino A. A. | 3 | 0 | 2 | 1 | 0 | 0 | 3 |
| Veneto1 | 9 | 1 | 10 | 10 | 0 | 2 | 0 |
| Veneto2 | 7 | 1 | 7 | 6 | 0 | 1 | 0 |
| Friuli V. G. | 5 | 0 | 5 | 2 | 0 | 0 | 0 |
| Liguria | 7 | 1 | 7 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| Emilia R. | 25 | 2 | 16 | 4 | 0 | 2 | 0 |
| Toscana | 21 | 1 | 15 | 1 | 0 | 2 | 0 |

*segue*

TABELLA 14. – *Seguito.*

| Circoscrizione | PD | IDV | PDL | Lega N. | MPA | UDC | SVP |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Umbria | 8 | 0 | 7 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| Marche | 5 | 0 | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Lazio1 | 19 | 2 | 20 | 0 | 0 | 2 | 0 |
| Lazio2 | 6 | 0 | 9 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| Abruzzo | 5 | 1 | 7 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| Molise | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Campania1 | 10 | 1 | 16 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| Campania2 | 9 | 1 | 16 | 0 | 0 | 2 | 0 |
| Puglia | 14 | 2 | 21 | 0 | 0 | 4 | 0 |
| Basilicata | 2 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Calabria | 7 | 0 | 9 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| Sicilia1 | 7 | 1 | 12 | 0 | 1 | 3 | 0 |
| Sicilia2 | 7 | 0 | 14 | 0 | 3 | 2 | 0 |
| Sardegna | 7 | 0 | 8 | 0 | 0 | 1 | 0 |

TABELLA 15. – Le differenze tra i seggi calcolati con il metodo D'Hondt (tab. 14) e i risultati delle proporzioni (cfr. pag. 17). L'errore massimo è .98539.

| Circoscrizione | PD | IDV | PDL | Lega N. | MPA | UDC | SVP |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Piemonte1 | .51803 | −.55542 | .54326 | −.25931 | 0. | −.31502 | 0. |
| Piemonte2 | .90067 | .01942 | .94058 | −.16643 | 0. | −.33135 | 0. |
| Lombardia1 | .69612 | −.09169 | .45568 | .60469 | 0. | −.61986 | 0. |
| Lombardia2 | .57049 | .07131 | .09505 | .86580 | 0. | −.45620 | 0. |
| Lombardia3 | .38625 | −.58064 | −.11036 | −.33440 | 0. | −.81722 | 0. |
| Trentino A. A. | .17571 | −.38309 | −.41532 | −.08717 | 0. | −.48112 | .23407 |
| Veneto1 | .09572 | −.36217 | .57649 | .19654 | 0. | −.07465 | 0. |
| Veneto2 | .69059 | −.10548 | .73427 | .25391 | 0. | −.12859 | 0. |
| Friuli V. G. | .52535 | −.62357 | .03689 | .13618 | 0. | −.86107 | 0. |
| Liguria | −.03675 | .07788 | .12116 | −.27956 | 0. | −.70815 | 0. |
| Emilia R. | **.98539** | −.21958 | .98340 | −.07873 | 0. | −.24296 | 0. |
| Toscana | .20431 | −.54807 | .97527 | .09602 | 0. | .15509 | 0. |
| Umbria | .41546 | −.82385 | .58678 | −.40392 | 0. | −.12057 | 0. |
| Marche | .30691 | −.31724 | .35345 | −.17613 | 0. | −.47855 | 0. |
| Lazio1 | .61555 | −.14878 | .70727 | 0. | −.13140 | −.01335 | 0. |
| Lazio2 | .43863 | −.53957 | .05377 | 0. | −.07285 | −.09672 | 0. |
| Abruzzo | −.19087 | −.08743 | .55503 | 0. | −.25034 | .09276 | 0. |
| Molise | −.66153 | −.02289 | −.34805 | 0. | −.19785 | −.21456 | 0. |
| Campania1 | .35195 | −.61637 | .36511 | 0. | −.86929 | −.77295 | 0. |
| Campania2 | .40596 | −.34257 | .94670 | 0. | −.62844 | −.29498 | 0. |
| Puglia | .16362 | −.03031 | .63532 | 0. | −.79333 | .45217 | 0. |
| Basilicata | −.46099 | −.37714 | −.34658 | 0. | −.04961 | −.43871 | 0. |
| Calabria | .51406 | −.71599 | .78528 | 0. | −.51398 | −.63989 | 0. |
| Sicilia1 | .59422 | .035378 | .61791 | 0. | −.37767 | .17421 | 0. |
| Sicilia2 | −.04897 | −.82958 | .72409 | 0. | .31465 | −.13324 | 0. |
| Sardegna | .36758 | −.72949 | .22490 | 0. | −.11614 | −.02362 | 0. |

TABELLA 16. – Attribuzione dei seggi per partito, per circoscrizione con il metodo Sainte Lagüe, senza controllo sul superamento dell'Hare massimo.

| Circoscrizione | PD | IDV | PDL | Lega N. | MPA | UDC | SVP |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Piemonte1 | 10 | 2 | 9 | 2 | 0 | 1 | 0 |
| Piemonte2 | 7 | 1 | 9 | 4 | 0 | 1 | 0 |
| Lombardia1 | 14 | 2 | 17 | 7 | 0 | 2 | 0 |
| Lombardia2 | 13 | 2 | 16 | 14 | 0 | 2 | 0 |
| Lombardia3 | 6 | 1 | 6 | 3 | 0 | 1 | 0 |
| Trentino A. A. | 3 | 0 | 2 | 1 | 0 | 0 | 3 |
| Veneto1 | 9 | 1 | 9 | 10 | 0 | 2 | 0 |
| Veneto2 | 6 | 1 | 6 | 6 | 0 | 1 | 0 |
| Friuli V. G. | 5 | 1 | 5 | 2 | 0 | 1 | 0 |
| Liguria | 7 | 1 | 7 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| Emilia R. | 24 | 2 | 15 | 4 | 0 | 2 | 0 |
| Toscana | 21 | 2 | 14 | 1 | 0 | 2 | 0 |
| Umbria | 8 | 1 | 6 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| Marche | 5 | 0 | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Lazio1 | 18 | 2 | 19 | 0 | 0 | 2 | 0 |
| Lazio2 | 6 | 1 | 9 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| Abruzzo | 5 | 1 | 6 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| Molise | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Campania1 | 10 | 2 | 16 | 0 | 1 | 2 | 0 |
| Campania2 | 9 | 1 | 15 | 0 | 1 | 2 | 0 |
| Puglia | 14 | 2 | 20 | 0 | 1 | 4 | 0 |
| Basilicata | 2 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Calabria | 7 | 1 | 8 | 0 | 1 | 2 | 0 |
| Sicilia1 | 6 | 1 | 11 | 0 | 1 | 3 | 0 |
| Sicilia2 | 7 | 1 | 13 | 0 | 3 | 2 | 0 |
| Sardegna | 7 | 1 | 8 | 0 | 0 | 1 | 0 |

TABELLA 17. – Le differenze tra i seggi calcolati con il metodo Sainte Lagüe (tab. 16) e i risultati delle proporzioni. (cfr. pag. 17). Il massimo errore .57049.

| Circoscrizione | PD | IDV | PDL | Lega N. | MPA | UDC | SVP |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Piemonte1 | .51803 | .44457 | .54326 | –.25931 | 0. | –.31502 | 0. |
| Piemonte2 | –.09932 | .01942 | –.05941 | –.16644 | 0. | –.33135 | 0. |
| Lombardia1 | –.30387 | –.09169 | .45568 | –.39530 | 0. | .38013 | 0. |
| Lombardia2 | **.57049** | .07131 | .09505 | –.13419 | 0. | –.45620 | 0. |
| Lombardia3 | .38625 | .419358 | –.11036 | –.33440 | 0. | .182776 | 0. |
| Trentino A. A. | .17571 | –.383099 | –.41532 | –.08717 | 0. | –.481121 | .23407 |
| Veneto1 | .09572 | –.36217 | –.42350 | .19654 | 0. | –.07465 | 0. |
| Veneto2 | –.30940 | –.10548 | –.26572 | .25391 | 0. | –.12859 | 0. |
| Friuli V. G. | .52535 | .37642 | .03689 | .13618 | 0. | .13892 | 0. |
| Liguria | –.03675 | .07788 | .12116 | –.27956 | 0. | .29184 | 0. |
| Emilia R. | –.01460 | –.21958 | –.01659 | –.07873 | 0. | –.24296 | 0. |

*segue*

TABELLA 17. – *Seguito.*

| Circoscrizione | PD | IDV | PDL | Lega N. | MPA | UDC | SVP |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Toscana | .20431 | .45192 | −.02472 | .09602 | 0. | .15509 | 0. |
| Umbria | .41546 | .17614 | −.41321 | −.40392 | 0. | −.12057 | 0. |
| Marche | .30691 | −.31724 | .35345 | −.17613 | 0. | −.47855 | 0. |
| Lazio1 | −.38444 | −.14878 | −.29272 | 0. | −.13140 | −.01335 | 0. |
| Lazio2 | .43863 | .46042 | .05377 | 0. | −.07285 | −.09672 | 0. |
| Abruzzo | −.19087 | −.08743 | −.44496 | 0. | −.25034 | .09276 | 0. |
| Molise | .33846 | −.02289 | −.34805 | 0. | −.19785 | −.21456 | 0. |
| Campania1 | .35195 | .38362 | .36511 | 0. | .13070 | .22704 | 0. |
| Campania2 | .40596 | −.34257 | −.05329 | 0. | .37155 | −.29498 | 0. |
| Puglia | .16362 | −.03031 | −.36467 | 0. | .20666 | .45217 | 0. |
| Basilicata | −.46099 | −.37714 | −.34658 | 0. | −.04961 | −.43871 | 0. |
| Calabria | .51406 | .28400 | −.21471 | 0. | .48601 | .36010 | 0. |
| Sicilia1 | −.40577 | .03537 | −.38208 | 0. | −.37767 | .17421 | 0. |
| Sicilia2 | −.04897 | .17041 | −.27590 | 0. | .31465 | −.13324 | 0. |
| Sardegna | .36758 | .27050 | .22490 | 0. | −.11614 | −.02362 | 0. |

## RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI


[1] M. L. BALINSKI - H. P. YOUNG, *Fair Representation: Meeting the Ideal of One Man One Vote*, Yale University Press, (1982), New Haven, CT.

[2] M. L. BALINSKI - H. P. YOUNG, *The quota Method of apportionment*, American Mathematical Monthly, **82** (1982), 701-729.

[3] C. BERNARDI - M. MENGHINI, *Sistemi Elettorali proporzionali. La "soluzione" italiana*, Boll. UMI, **4**-A (7) (1990) 271-293.

[4] D.P.R. 30 marzo 1957, n. 361.

[5] H. R. DROOP, *On Methods of Electing Representatives*, Journal of Statistical Society of London, **44**, n. 2 (1881), 141-202. (Ristampato in Voting Matters, n. 24 (2007), 7-46).

[6] D. S. FELSENTHAL - M. MACHOVER, *The measurement of voting power: Theory and practice, problems and paradoxes*. Cheltenam: Edward Elgar (1998).

[7] M. GALLAGHER, *Proportionality, Disproportionality and Electoral Systems*, Electoral Studies, **10**, 1 (1991), 33-51.

[8] P. GRILLI DI CORTONA - C. MANZI - A. PENNISI - F. RICCA - B. SIMEONE, *Evaluation and Optimization of Electoral Systems*, SIAM Monographs on Discrete Mathematics and Applications. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1999.

[9] H. NURMI, *Comparing voting Systems*. Dordrecht Reidel 1987.

[10] A. PENNISI - F. RICCA - B. SIMEONE, *Malfunzionamenti dell'allocazione biproporzionale di seggi nella riforma elettorale italiana*, Rapporto tecnico n. 21 (2005), Dipartimento di Statistica, Probabilità e statistiche applicate, Università degli Studi Roma "La Sapienza".

[11] A. PENNISI - F. RICCA - B. SIMEONE, *Bachi e Buchi della legge elettorale italiana nell'allocazione biproporzionale dei seggi*, Sociologia e Ricerca Sociale, **27** (2006), 55-76.

[12] A. SAINTE LAGÜE, *La representation proportionelle et la méthode des moindre carrés*, Annales Scientifique De L'ÉNS, **27** (1910), 529-542.

[13] B. SIMEONE - F. PUKELSHEIM editors, *Mathematics and Democracy, Recent Advances in Voting Systems and Collective Choice*, Springer, Berlino (2010). Atti dell'International workshop on Mathematics and Democracy: Voting Systems and Collective Choice tenuto ad Erice (TP) dal 18 al 23 settembre 2005.

[14] D. R. WOODALL, *How Proportional is Proportional Representation?*, The Mathematical Intelligencer, 8, 4 (1986), 36-46.

Rita Nugari
Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione e Scienze Matematiche
Università degli Studi di Siena, Via Roma 56 - 53100 Siena
e-mail: rita.nugari@unisi.it