

---

# *La Matematica nella Società e nella Cultura*

RIVISTA DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

---

MANLIO BORDONI, ALBERTO BOSCHETTO

## **Costruzione di gusci sottili: dalla teoria matematica al prodotto finito**

*La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione  
Matematica Italiana, Serie 1, Vol. 5 (2012), n.2, p. 149–168.*

Unione Matematica Italiana

[<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI\\_2012\\_1\\_5\\_2\\_149\\_0>](http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2012_1_5_2_149_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

---

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma  
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)  
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>



## **Costruzione di gusci sottili: dalla teoria matematica al prodotto finito**

MANLIO BORDONI - ALBERTO BOSCHETTO

### **1. – Prologo**

(M. Bordoni) Qualche tempo fa trovai una e-mail del Prof. Francesco Veniali (Presidente del cda di Ingegneria Meccanica dell' Università "La Sapienza" di Roma) del tenore "Ti dicono nulla le superfici di Enneper-Weierstrass?" alla quale risposi immediatamente che, se non mi avessero detto nulla, avrei fatto meglio a cambiare mestiere. Qualche giorno dopo il collega mi telefonò chiedendomi "Se ti dico che noi sappiamo fabbricare delle patatine, come reagisci?" La mia risposta fu "Se sono buone le mangio volentieri". "Bene, allora uno di questi giorni passa da me". Recatomi nel suo studio, vidi le 'patatine', cioè gusci sottili, nelle quali riconobbi subito alcune superfici note: nastri di Möbius, superfici di Enneper ed altre. A questo punto Veniali mi disse che per gli ingegneri le superfici hanno uno spessore e mi chiese se fossi in grado di descrivere matematicamente questo fatto. Risposi di sì e venni presentato all'ing. Alberto Boschetto, ricercatore presso la Facoltà di Ingegneria della stessa Università, che fino ad allora aveva assistito in silenzio al nostro colloquio, costruttore materiale delle 'patatine'. Inizì così la nostra collaborazione che ha dato i primi frutti, oggetto di questo articolo (vedi anche [3]).

### **2. – Introduzione**

Poiché le 'patatine' sono superfici ispessite, si pone il problema di descrivere dal punto di vista matematico come dare spessore ad una superficie, tenendo però conto che poi si dovrà costruire materialmente un oggetto. Si dovrà dunque tradurre la teoria matematica in un linguaggio che sia comprensibile per la macchina che costruisce l'oggetto solido, quindi si dovrà informatizzare il modello matematico traducendolo in istruzioni leggibili dalla macchina.

Non va però dimenticato che lo scopo finale è costruire oggetti utili da immettere in commercio e che quindi va tenuto conto dell'aspetto economico. La competizione internazionale e la globalizzazione del 21° secolo spingono le industrie a minimizzare sempre più il tempo di piazzamento di un prodotto sul mercato, riducendo per quanto possibile i costi ed i tempi di progettazione e di realizzazione dei prototipi. Ad esempio 15 anni fa il tempo per sviluppare (dal progetto al prototipo e alla commercializzazione) un'automobile era di circa 60 mesi mentre ora è ridotto approssimativamente a 18 mesi. Addirittura per i componenti elettronici il tempo si misura in settimane. I fattori critici sono tempo, flessibilità, qualità e costi. Ovviamente i prototipi devono essere costruiti più rapidamente possibile con il minimo di costi.

Il processo di ideazione e costruzione di un prototipo si può suddividere in varie fasi. Il primo stadio consiste di solito nel generare un modello solido tramite il CAD (*Computer Aided Design*). Il modello viene quindi informaticamente tradotto in un formato interfaccia detto file STL (*Standard Triangulation Language*), cfr. [5], capace di dialogare con la macchina che fabbrica l'oggetto. Un file STL è un'approssimazione del modello consistente in un insieme non ordinato di faccette triangolari che rappresentano le superfici bordo del solido da costruire. Molti CAD commerciali non sono abbastanza robusti da generare un file senza problemi, per cui è necessaria una verifica del modello STL ottenuto. Passo successivo è la fabbricazione del supporto che dovrà sostenere il prototipo e a tal fine si produce un codice di tracciato-macchina (*toolpath* in inglese) sia per il modello che per il materiale di supporto. La costruzione effettiva del prototipo è quasi totalmente automatica e richiede solo un minimo intervento umano. Il passo finale consiste nel prendere il prototipo dalla piattaforma su cui è stato costruito e rimuovere le strutture di supporto.

Orbene, quando la modellizzazione parte da una descrizione matematica, il CAD richiede la creazione di una nuvola di punti da collegarsi con triangoli ed il software usato può produrre approssimazioni non corrispondenti al modello matematico. Inoltre queste approssimazioni possono divenire critiche nel software usato per la costruzione del prototipo, dando luogo a quattro tipi di problemi: faccette *mancanti*, faccette *degeneri* in cui due spigoli risultano allineati, faccette so-

*vrappoentesi*, oppure *giri a vuoto* durante la triangolazione. Questi problemi sono ben noti, ma i metodi per riparare modelli CAD non validi sono difficili e niente affatto ovvi.

La strategia migliore è non abbandonare il contesto matematico fin che possibile. In questo lavoro si presenta un metodo privo di errori per creare superfici ispessite (i gusci sottili o ‘patatine’) tramite la loro formulazione matematica. Il metodo non richiede approssimazioni fino alla creazione del file STL e minimizza i problemi menzionati prima. In questo modo l’idea espressa in termini matematici può essere realizzata rapidamente, la modificazione dei parametri e l’eventuale soluzione dei problemi dovuti all’approssimazione si possono fare nello stesso contesto originario matematico. Al primo stadio della progettazione del prodotto, quando le variabili di tempi e costi non sono definite, si può dare una descrizione parametrica del problema; variando i parametri si possono ottenere diversi modelli virtuali immediatamente senza i problemi del CAD e quelli derivanti dal file STL, che di solito venivano risolti con approssimazioni che non hanno alcun *feedback* con la descrizione originale.

In questo articolo viene illustrata la teoria matematica che permette di ispessire gli oggetti, basata sul concetto di *intorno tubolare* (sezione 3), che viene poi esplicitato in maniera semplice per le superfici regolari di  $\mathbb{R}^3$  (sezione 4). Nella sezione 5 viene presentato il metodo di *Additive Manufacturing*, brevemente AM, usato per costruire i prototipi. Il software usato per discretizzare il modello matematico è *Mathematica* di Wolfram, [8]; come esempio concreto viene ispessita una superficie di Enneper e viene quindi costruito materialmente il prototipo (sezione 6). Nella sezione 7 si descrivono gli aspetti tecnici della costruzione del modello solido e sono riportati i risultati sperimentali delle verifiche svolte su di esso. Le misure eseguite dello spessore del prototipo, confrontate con quello previsto teoricamente, danno luogo solo ad alcune differenze localizzate.

Conclude il lavoro la sezione 8 in cui si evidenziano i vantaggi del rimanere in ambito matematico fino in fondo in termini sia di tempo che di costi in confronto ai metodi di solito usati che ricorrono alla discretizzazione fin dal primo momento con strumenti come il CAD. Vengono anche indagati i limiti del metodo proposto, dovuti essenzialmente alla richiesta di regolarità delle superfici ed al fatto che possono essere assemblate correttamente solo superfici regolari in-

collate fra di loro in maniera almeno  $C^1$ , cioè in modo tale che nei punti in cui si incollano due superfici, queste abbiano lo stesso piano tangente e quindi lo stesso versore normale; tali problemi saranno oggetto di ulteriori studi. Viene infine presentato come esempio di applicazione concreta un prototipo di una bocca di aspirapolvere ottenuto incollando in maniera  $C^1$  a due a due cinque superfici ispessite in quantità diverse; con piccole modifiche si può ottenere una mascherina per aerosol.

### 3. – Intorni tubolari

Una superficie ispessita è un *intorno tubolare* di una superficie. Intorni tubolari si incontrano nella vita di ogni giorno: un pezzo di cavo per collegare l'antenna al televisore o un tramezzino al prosciutto ne sono esempi. L'idea matematica si può spiegare in maniera semplice con un esempio che per comodità svolgeremo nel piano.

Consideriamo un arco di curva regolare nel piano ed in ogni suo punto la retta perpendicolare alla tangente. A meno che la curva sia essa stessa una retta, queste perpendicolari si intersecano fra loro in modo piuttosto complicato, tuttavia se si guarda solo una striscia vicina alla curva, le porzioni di perpendicolari non si incontrano e ricoprono l'intera striscia senza lasciare spazi vuoti. La striscia è l'intorno tubolare della curva (Fig. 1).

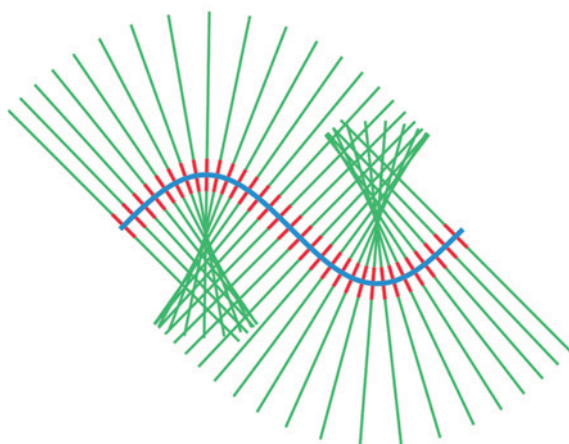


Fig. 1. – Intorno tubolare.

Ci accorgiamo però che non basta la condizione di regolarità per assicurare l'esistenza di un intorno tubolare. Ad esempio consideriamo il *folium* di Cartesio che in un riferimento cartesiano è rappresentato dall'equazione cartesiana  $x^3 + y^3 - 3xy = 0$  (vedere ad esempio [6]): questa curva non è regolare, avendo un nodo nell'origine, punto in cui la costruzione indicata non funziona in quanto non solo vi sono due rette tangenti principali distinte con perpendicolari distinte, ma anche in ogni intorno dell'origine le perpendicolari alle tangenti dei due rami concorrenti si incontrano sempre. Anche se ci limitiamo a considerare la parte di curva (il *semifolium*) rappresentata dalle equazioni parametriche

$$x = \frac{3t}{1+t^3}, \quad y = \frac{3t^2}{1+t^3} \quad t \in (-1, +\infty)$$

questa, pur essendo regolare nell'intervallo indicato, non ammette intorni tubolari in quanto la costruzione indicata viene meno nell'origine, dove la curva passa per  $t = 0$  e poi tende nuovamente quando  $t \rightarrow +\infty$ , ma con tangenti diverse e che tendono a divenire perpendicolari: qualunque sia l'intorno dell'origine considerato, si verifica lo stesso fenomeno che aveva luogo considerando l'intero *folium* (nella Fig. 2 è rappresentato il *semifolium*).

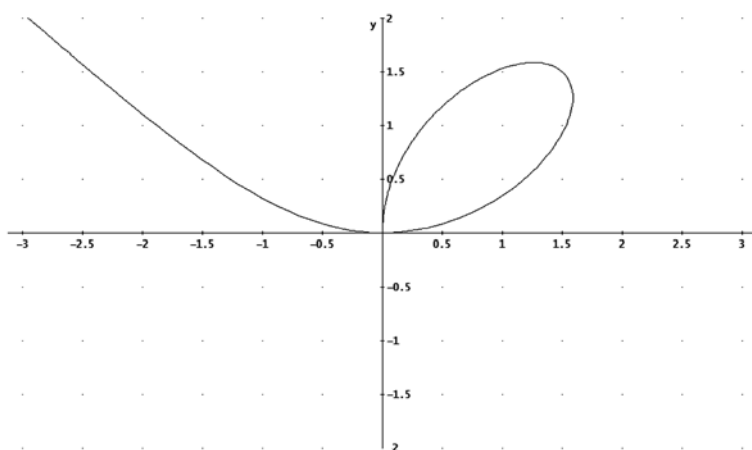


Fig. 2. – Il *semifolium*.

La condizione che assicura l'esistenza di un intorno tubolare è che la curva sia *embedded* nel piano, sia cioè una sottovarietà differenziabile del piano.

In generale diremo che una varietà differenziabile  $S$  contenuta in una varietà differenziabile  $M$  è una sottovarietà di  $M$  se l'inclusione  $i : S \rightarrow M$  è un *embedding* cioè un'immersione (applicazione differenziabile iniettiva con differenziale iniettivo in ogni punto di  $S$ ) tale che la topologia di  $S$  in quanto varietà coincide con quella indotta su  $S$  dalla topologia di  $M$  (vedere ad esempio [7]). Indicheremo brevemente con  $S$  stessa la sua immagine  $i(S) \subset M$ .

DEFINIZIONE. — Sia  $\pi : U \rightarrow S$  una fibrazione di un intorno aperto  $U$  di  $S$  in  $M$  ( $\pi$  indica la proiezione). Se la sezione nulla  $s : S \rightarrow U \subset M$  coincide con l'inclusione  $i : S \rightarrow S \subset M$ , l'aperto  $U$  si dice intorno tubolare di  $S$  in  $M$ .

La dimostrazione dell'esistenza degli intorni tubolari in generale non è facile, ma si può provare in maniera relativamente semplice quando  $M$  è una varietà riemanniana, quando cioè  $M$  è dotata di una metrica riemanniana  $g$  (vedere ancora [7]), precisamente:

TEOREMA. — Se  $S$  è una sottovarietà compatta di una varietà riemanniana  $(M, g)$ , allora esiste un intorno tubolare di  $S$  in  $M$  di ampiezza  $\varepsilon$  per un opportuno  $\varepsilon > 0$ .

*Dimostrazione (cenno).* In ogni punto  $p \in S$  lo spazio tangente  $T_p M$  si spezza nella somma diretta dello spazio tangente in  $p$  ad  $S$  e del suo complemento ortogonale:

$$T_p M = T_p S \oplus N_p S$$

Nello spazio normale  $N_p S$  esiste un  $\varepsilon(p) > 0$  tale che sul disco aperto in  $N_p S$  di centro il punto  $p$  e di raggio  $\varepsilon(p)$  l'applicazione esponenziale in  $p$  sia un diffeomorfismo su una porzione di sottovarietà  $S_p(\varepsilon(p))$  di dimensione pari a quella di  $N_p S$  e contenente al suo interno il punto  $p$ . Al variare di  $p$  in  $S$  si ottiene un intorno tubolare di  $S$  in  $M$ . La funzione  $\varepsilon(p)$  è una funzione continua di  $p \in S$  e dunque ammette, essendo  $S$  compatta, un minimo assoluto  $\varepsilon > 0$ . Considerato allora in ogni  $N_p S$  il



disco aperto di raggio  $\varepsilon$  e detta  $U_p(\varepsilon)$  la sua immagine tramite l'applicazione esponenziale in  $p$ , l'unione  $U = \bigsqcup_{p \in S} U_p(\varepsilon)$  è un intorno tubolare di ampiezza  $\varepsilon$  di  $S$  in  $M$ .  $\square$

Per maggiori dettagli e per una discussione sull'esistenza di intorni tubolari in generale per varietà non compatte, si veda ad esempio [2],[4]; in particolare in [2] si tratta in dettaglio il caso delle sottovarietà di spazi euclidei che è quello usato nel seguito di questo lavoro.

#### 4. – Ispessimento di una superficie

Vogliamo ora dare una descrizione semplice e diretta di come ispessire una superficie, in altri termini di come costruire un intorno tubolare (di cui qui considereremo la chiusura) di una superficie  $S$  regolare *embedded* nello spazio euclideo e compatta (=chiusa e limitata). Supporremo che  $S$  possa eventualmente avere un bordo regolare a tratti  $\partial S$  costituito da una o più curve, ciascuno dei tratti regolari essendo a sua volta *embedded*; supporremo anche che nei punti di raccordo i tratti regolari abbiano semirette tangenti che formino angoli diversi da  $0^\circ$  e da  $180^\circ$ . In un riferimento cartesiano  $S$  si rappresenta con equazioni parametriche

$$x = x(u, v) \quad y = y(u, v) \quad z = z(u, v)$$

Avremo i vettori tangenti

$$\vec{P}_u \equiv (x_u, y_u, z_u) \quad \text{e} \quad \vec{P}_v \equiv (x_v, y_v, z_v)$$

dove  $x_u = \frac{\partial x}{\partial u}$  etc. Il versore normale in un punto  $P \in S$  è allora

$$\mathbf{n}_P = \frac{\vec{P}_u \wedge \vec{P}_v}{\|\vec{P}_u \wedge \vec{P}_v\|}$$

ove  $\wedge$  indica il prodotto vettoriale,

$$\vec{P}_u \wedge \vec{P}_v = \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}$$

essendo  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  la base ortonormale di riferimento (le derivate si intendono calcolate in  $P$ ). Al variare di  $P$  in  $S$  si ha un campo differenziabile di vettori e nei punti di  $\partial S$  si considera il vettore ottenuto per continuità da  $\mathbf{n}$ .

Definiamo l'ispessimento di  $S$  in  $P$  prendendo

$$P + t\mathbf{n}_P \quad \text{per} \quad -\varepsilon \leq t \leq \varepsilon$$

consideriamo cioè sulla normale ad  $S$  in  $P$  un segmento di ampiezza  $2\varepsilon$ , dove  $\varepsilon$  va preso abbastanza piccolo in modo da evitare sovrapposizioni fra i vari ispessimenti puntuali. Al variare di  $P$  e di  $\mathbf{n}_P$  si ha l'ispessimento della superficie, dato dai punti di coordinate

$$(x(u, v) + tn_x(u, v), y(u, v) + tn_y(u, v), z(u, v) + tn_z(u, v))$$

ove  $(n_x, n_y, n_z)$  sono le componenti di  $\mathbf{n}$ . L'ispessimento è un solido (infatti intervengono 3 parametri) delimitato dalle 2 superfici che si ottengono dalle precedenti per  $t = -\varepsilon$  e per  $t = \varepsilon$ . Se inoltre  $S$  aveva bordo  $\partial S$ , determinato dagli estremi degli intervalli in cui si fanno variare i parametri  $u, v$ , allora il solido è limitato anche dalle superfici che sono state ottenute per ispessimento del bordo (il bordo è dato da una o più curve, ispessendo ciascuna delle quali si ottiene una superficie).

Per ispessire la superficie  $S$  secondo la direzione di una retta  $r$  di versore  $\mathbf{r}$ , sia  $\alpha$  l'angolo che  $\mathbf{r}$  forma col versore normale  $\mathbf{n}_P$ . Supponiamo  $\alpha \neq \pm \frac{\pi}{2}$  per evitare che  $r$  sia tangente alla superficie; questo implica automaticamente che  $r$  non sia tangente neppure al bordo di  $S$ . Eseguendo l'ispessimento

$$P + t\mathbf{r}, \quad -\varepsilon \leq t \leq \varepsilon$$

questi si decompone in un ispessimento secondo la normale ed uno in una direzione tangente. Il primo si ottiene considerando la proiezione ortogonale

$$P + t\mathbf{n} \cos \alpha = P + t'\mathbf{n}$$

avendo posto  $t' = t \cos \alpha$  e dunque risulta

$$\begin{aligned} -\varepsilon \cos \alpha \leq t' \leq \varepsilon \cos \alpha & \quad \text{se} \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \\ \varepsilon \cos \alpha \leq t' \leq -\varepsilon \cos \alpha & \quad \text{se} \quad \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \end{aligned} .$$

L'ispessimento tangenziale è la differenza fra l'ispessimento nella direzione  $r$  e quello normale, dunque è dato da

$$P + t\mathbf{r} - t\mathbf{n}_P \cos \alpha = P + t(\mathbf{r} - \mathbf{n}_P \cos \alpha)$$

il cui modulo è

$$t'' = \|t(\mathbf{r} - \mathbf{n}_P \cos \alpha)\| = t \sin \alpha \quad \text{con} \quad -\varepsilon \sin \alpha \leq t'' \leq \varepsilon \sin \alpha$$

(si noti che  $\sin \alpha > 0$  sia per un angolo  $\alpha$  acuto che ottuso). L'ispessimento verticale è quello effettivamente osservabile, mentre quello orizzontale corrisponde a quanto si vede eseguendo sezioni orizzontali, che poi è il modo in cui viene costruito l'oggetto. Naturalmente questi ispessimenti variano da punto a punto.

NOTA. Si può fare il discorso inverso decidendo per ragioni costruttive che l'ispessimento sia costante per esempio in verticale in quanto la macchina depone su ogni sezione la stessa quantità di materiale. In tal caso sarà quello indicato con  $t'$  a dover variare secondo

$$-\varepsilon' \leq t' \leq \varepsilon'$$

per  $\varepsilon'$  opportuno e di conseguenza si determina la variazione  $t$  secondo la normale alla superficie e quella tangente  $t''$  invertendo le relazioni precedentemente scritte.

## 5. – Costruzione delle ‘patatine’

La costruzione di un qualsiasi oggetto, a ben pensare, si può effettuare essenzialmente in due modi: per sottrazione o per addizione di materiale. Ad esempio gli scultori agiscono nel primo modo (la leggenda narra che Michelangelo “vedesse” l'opera già nel blocco di marmo e quindi che il suo lavoro consistesse solo nell'asportare il materiale superfluo), mentre i pittori seguono il secondo, depositando pigmenti colorati su supporti più disparati (tela, legno, carta ed altri, senza dimenticare i muri come si è sempre fatto con gli affreschi, in tempi più recenti con i murales e come fanno al giorno d'oggi i *writers*).

Questi procedimenti sono usati anche per la costruzione di prototipi, nel nostro caso di superfici ispessite. Il primo modo consiste nell'asportare materiali quali legno, schiume, poliuretani o altri, con metodi

tradizionali, ad esempio asportazione controllata dal computer, o con tecnologie non tradizionali come taglio laser, scariche di elettroni, getti d'acqua. Tutti questi metodi sono spesso caratterizzati sia da alti investimenti iniziali, sia da tempi relativamente lunghi.

Il metodo additivo consiste nell'aggiungere successivamente materiale tramite fenomeni fisici e/o chimici; indicheremo nel seguito con AM (*Additive Manufacturing*) questo metodo. L'uso di AM può accelerare la ricerca, lo sviluppo del processo produttivo e quindi il tempo di piazzamento sul mercato di un prodotto; esso porta vantaggi rispetto al metodo classico di sottrazione non solo in termini di tempo ma anche di fabbricazione, permettendo di costruire oggetti geometricamente non semplici senza la necessità di usare macchine elaborate e quindi riducendo anche i costi.

I più conosciuti sistemi di AM sono:

- SLA: *Stereo Lithography Apparatus*;
- FDM: *Fused Deposition Modelling*;
- 3DP: *3-Dimensional Printing*;
- LOM: *Laminated Object Manufacturing*;
- SLS: *Selective Laser Sintering*.

In particolare il sistema FDM, usato in questo lavoro, si è fortemente sviluppato negli ultimi 15 anni, sorpassando nel 1996 la vendita di macchine SLA. Questo sistema si basa sulla deposizione di un flusso di materiale viscoso bollente su un supporto preventivamente preparato, da rimuovere al termine del processo. La solidificazione del materiale deposto avviene per raffreddamento naturale, quindi si può usare quasi ogni materiale fusibile per calore. Agli inizi furono usati cera e nylon, sostituiti al giorno d'oggi dall'ABS (*Acrylonitrile Butadiene Styrene resin*) mentre è oggetto d'investigazione l'uso di metalli, ceramiche, elastomeri e materiali composti.

## 6. – La procedura operativa in un esempio concreto

In questa sezione presentiamo un esempio concreto per descrivere la procedura operativa che sviluppa il metodo matematico proposto. Un'ampia gamma di superfici trattate informaticamente

con *Mathematica* si trova in [1]. La superficie da noi qui considerata è la ben nota superficie minima di Enneper, di equazioni parametriche

$$x = u - \frac{u^3}{3} + uv^2, \quad y = v - \frac{v^3}{3} + vu^2, \quad z = u^2 - v^2$$

Da queste si ottengono i vettori tangenti

$$\vec{P}_u \equiv (1 - u^2 + v^2, 2uv, 2u) \quad \text{e} \quad \vec{P}_v \equiv (2uv, 1 + u^2 - v^2, -2v)$$

e quindi

$$\vec{P}_u \wedge \vec{P}_v \equiv (-2u - 2u^3 - 2uv^2, 2v + 2u^2v + 2v^3, 1 - u^4 - 2u^2v^2 - v^4)$$

e  $\|\vec{P}_u \wedge \vec{P}_v\| = (1 + u^2 + v^2)^2$ . Il calcolo del versore normale  $\mathbf{n}$  e del corrispondente ispessimento è immediato. Il bordo della superficie è determinato dagli estremi degli intervalli in cui variano  $u, v$ . Qui consideriamo i domini:

$$u \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad v \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

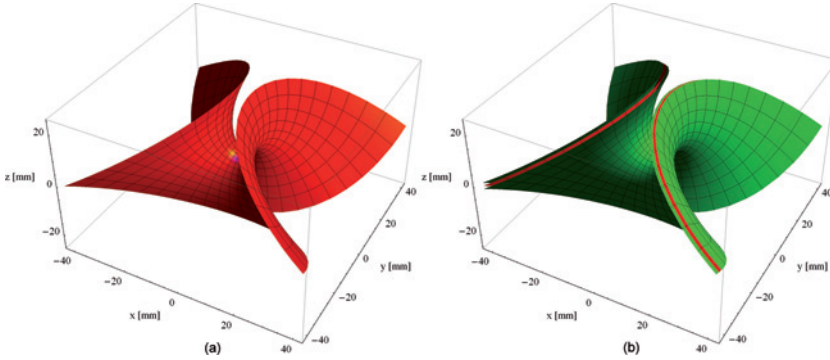


Fig. 3. – Superficie di Enneper (a) e suo ispessimento (b).

Per ragioni costruttive, abbiamo usato nelle equazioni il centimetro come unità di misura. Nelle Fig. 3a e 3b sono riportate la rappresentazione della superficie e le due superficie bordo della superficie ispessita a distanza di  $\pm 2$  mm.

Occorre ora considerare anche altre superfici per contornare un modello solido costruibile. Nel nostro caso queste superfici (Fig. 4) possono essere rappresentate in corrispondenza di quattro condizioni al bordo per  $u$  e  $v$  e variando  $t$ :

$$S_1 : P + t \cdot \mathbf{n}_P \quad , \quad u = -\frac{\pi}{2}, v \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad , \quad -\varepsilon \leq t \leq \varepsilon$$

$$S_2 : P + t \cdot \mathbf{n}_P \quad , \quad u = \frac{\pi}{2}, v \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad , \quad -\varepsilon \leq t \leq \varepsilon$$

$$S_3 : P + t \cdot \mathbf{n}_P \quad , \quad v = -\frac{\pi}{2}, u \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad , \quad -\varepsilon \leq t \leq \varepsilon$$

$$S_4 : P + t \cdot \mathbf{n}_P \quad , \quad v = \frac{\pi}{2}, u \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad , \quad -\varepsilon \leq t \leq \varepsilon$$

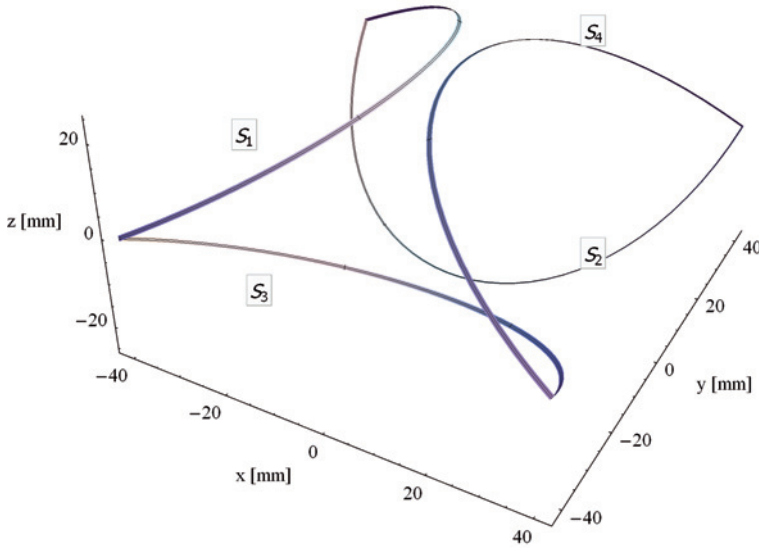


Fig. 4. – Ispessimento del bordo.

Un file STL (cioè una opportuna triangolazione) pronto per la costruzione del prototipo viene generato dall'assemblaggio delle sei superfici di bordo (Fig. 5a). Il modello mostrato consta di 26590 triangoli. Naturalmente è possibile modificare la triangolazione

STL al fine di ottimizzare l'approssimazione del solido: in particolare è possibile cambiare l'orientazione dei triangoli, la divisione dei triangoli e così via. Per esempio la Fig. 5b mostra una struttura a rete orientata lungo il piano  $xy$  a distanza  $z$  proporzionale allo strato di fabbricazione. È da notare che, operando nello stesso ambiente, ogni modificazione o scelta dei parametri, delle equazioni o della fabbricazione del file STL si possono facilmente produrre ad ogni passo senza i problemi dovuti al CAD o alle eventuali riparazioni del file STL. In effetti il vantaggio del nostro metodo consiste nel fatto che la discretizzazione viene introdotta all'ultimo stadio appena prima della fabbricazione del file STL mentre nel CAD questa operazione appare al primo passo producendo probabilmente alcuni degli errori menzionati in precedenza.

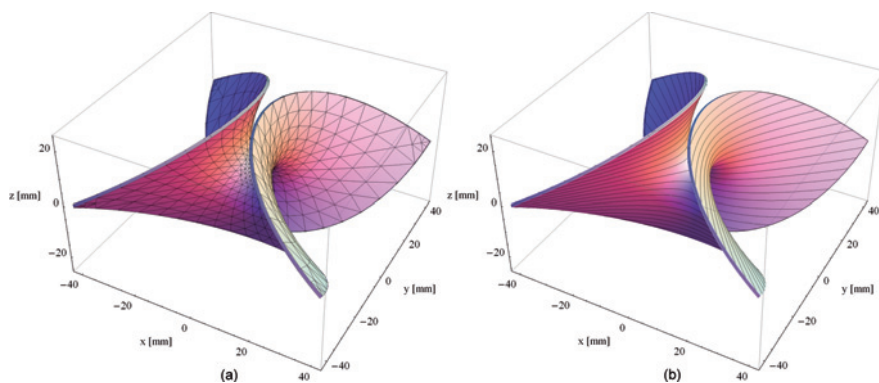


Fig. 5. – Visualizzazione di files STL.

## 7. – Risultati sperimentali

La macchina usata per la costruzione del prototipo è una Stratasys Dimension BST 768. Questa fa parte di una famiglia di macchine fortemente innovative che possiamo chiamare in generale stampanti 3D (tridimensionali) e che trovano ampio uso in svariati ambiti. Alcuni, forse esagerando, sostengono che queste macchine produrranno in futuro una rivoluzione paragonabile a

quella portata dai personal computer. Tornando alla Stratasys, la dimensione della camera è di  $203 \times 203 \times 305 \text{ mm}^3$ . Sia il modello che il supporto sono in ABS. La temperatura della camera è fissata a  $75^\circ\text{C}$  mentre l'ABS è fuso a  $270^\circ\text{C}$ . Lo spessore dello strato scelto è  $0.245 \text{ mm}$ . I modi di riempimento sono stati scelti *solid* per il modello e *break away* per il supporto al fine di ridurre la quantità di materiale ed il tempo di costruzione. In Fig. 6 si mostra il prototipo di superficie di Enneper ispessita insieme al supporto su cui è stata costruita.



Fig. 6. – Prototipo di superficie di Enneper ispessita.

La precisione indicata dal costruttore è  $\pm 0,127 \text{ mm}$  ma non è fatta alcuna menzione sugli spessori. Per verificare il modello solido prodotto abbiamo usato uno scanner ottico Agiotech ATOS III di *reverse engineering*. Questo strumento ha una precisione fino a  $0,02 \text{ mm}$  e può misurare le deviazioni dalla superficie e lo spessore delle pareti. Sono stati presi in esame 171328 punti del prototipo e questi mostrano una deviazione rispetto all'equazione matematica che giace nell'intervallo da  $-0,9$  a  $0,85 \text{ mm}$  come ri-



portato in Fig. 7. Questo potrebbe essere dovuto allo stress termico durante la solidificazione che può indurre anche stress residui. Potrebbero anche essersi presentati problemi meccanici relativi alla quantità limitata di materiale usata per il supporto. Ulteriori analisi potrebbero essere condotte per ottimizzare la corrispondenza fra il modello matematico e il prototipo concreto.

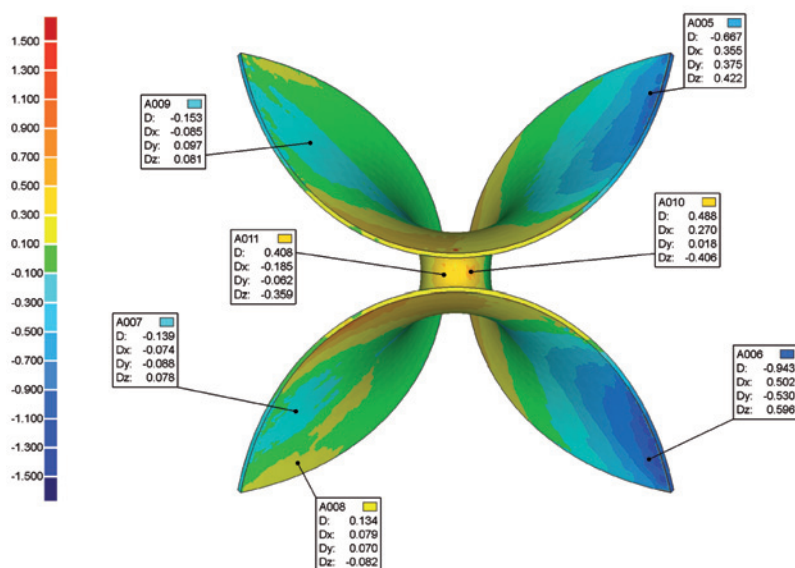


Fig. 7. – Deviazioni dal modello matematico.

Per quel che riguarda la misura dello spessore, raramente questo eccede 1 mm come evidenziato in Fig. 8. In particolare, il 96% dei dati cade nell'intervallo da 0,81 a 0,97 mm. La deposizione non omogenea del materiale ha creato zone con spessore minore e altre con spessore maggiore del previsto. La mancanza di materiale è un risultato inatteso in quanto la generazione del tracciato-macchina segue la regola che tutto il materiale depositato deve stare dentro il modello virtuale. Questa mancanza, riscontrata specialmente per le parti sottili del modello, potrebbe essere dovuta all'impossibilità di aggiungere materiale nelle zone a pendenza più ripida, dando luogo ad un effetto-scalino. Alcune zone estreme mostrano un accumulo di materiale ma

esse sono molto piccole. La superficie superiore della zona centrale, chiamata “z” nella Fig. 8a e più visibile nella Fig. 8b, eccede lo spessore previsto in misura maggiore, raggiungendo valori sopra i 1,2 mm.

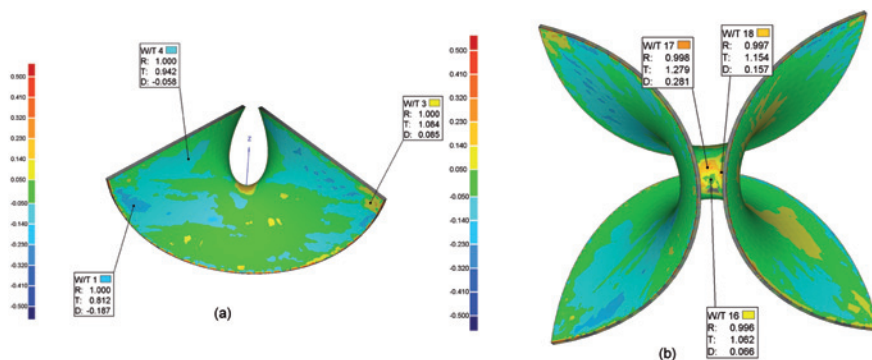


Fig. 8. – Mancanza (a) e accumulo (b) di materiale.

Per investigare questa zona il modello solido è stato tagliato lungo una sezione con un piano corrispondente a  $v = 0$  come riportato in Fig. 9a. Il prototipo è stato tagliato fisicamente con una macchina di precisione di taglio metallografico, usando una ruota di 150 mm di diametro e 0,5 mm di spessore, con abrasivo Sic e corpo in Bakelite. Il taglio è stato eseguito molto lentamente per evitare delaminazioni del materiale.

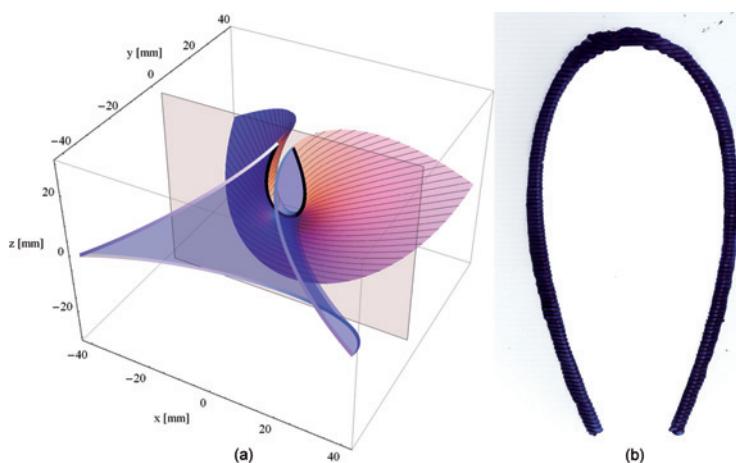


Fig. 9. – Sezione virtuale (a) e materiale (b).

Un'immagine della sezione è mostrata nella Fig. 9b, che evidenzia come nella zona superiore ci sia stato qualche problema nella deposizione del materiale. Per lo studio di questa zona si è prodotta un'immagine digitale dei punti di bordo: lo spessore della sezione si può valutare misurando la distanza nella direzione normale, ossia secondo il versore normale  $\mathbf{n}_P$  calcolato teoricamente. La Fig. 10a riporta il grafico di questo valore in funzione della variabile  $u$ . Risulta chiaro che lo spessore eccede 1 mm attorno al valore  $u = 0$ , raggiungendo il valore di 1,36 mm vicino alla zona ingrandita riportata nella Fig. 10b. Le altre zone non sono simmetriche rispetto all'asse verticale: questo potrebbe essere dovuto al modo di riempimento del prototipo. In effetti il tracciato-macchina nel piano  $xy$  segue un percorso lungo rette parallele che formano con l'asse  $x$  un angolo detto *angolo di raster*. Ad esempio, è questo il modo in cui vengono sollecitati ad altissima velocità i pixel di un televisore per produrre le immagini (l'angolo di raster è correlato al formato scelto, 16:9 oppure 4:3 o altri ancora). Nel presente caso il tracciato-macchina nel piano  $xy$  è caratterizzato da un angolo di raster di  $45^\circ$  che denota un comportamento differente del materiale lungo le due branche.

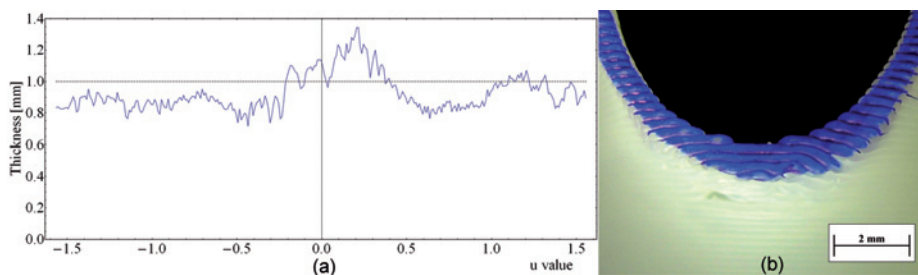


Fig. 10. – Diagramma degli spessori (a); ingrandimento della sezione (b).

## 8. – Conclusioni

Il metodo qui presentato per creare superfici ispessite (i gusci sottili o ‘patatine’) tramite la loro formulazione matematica non richiede approssimazioni fino alla creazione del file STL (cioè della

triangolazione) ed è quindi privo di errori a livello teorico e minimizza i problemi citati in precedenza a livello informatico. In questo modo l'idea espressa in termini matematici può essere rapidamente realizzata, la modificazione dei parametri e l'eventuale soluzione dei problemi dovuti all'approssimazione si può fare nello stesso contesto originario matematico. Il metodo proposto ha alcuni limiti: infatti nel caso in cui le superfici da ispessire presentino delle irregolarità, come ad esempio superfici autointersecantesi, nei punti singolari si hanno più fogli ciascuno dei quali ha un suo vettore perpendicolare e quindi non è possibile definire univocamente l'ispessimento. In questi casi Mathematica crea ugualmente un file STL che però dà luogo a false interpretazioni da parte della macchina AM che depone materiale dove non dovrebbe e viceversa non depone materiale dove dovrebbe, e producendo oggetti che non corrispondono al modello matematico. Ad esempio, semplicemente modificando il dominio di variabilità dei parametri nella superficie di Enneper considerata nella Sezione 6 si ottiene una superficie autointersecantesi ma l'oggetto prodotto dalla macchina non ha nulla a che vedere con essa, come mostra la Fig. 11.

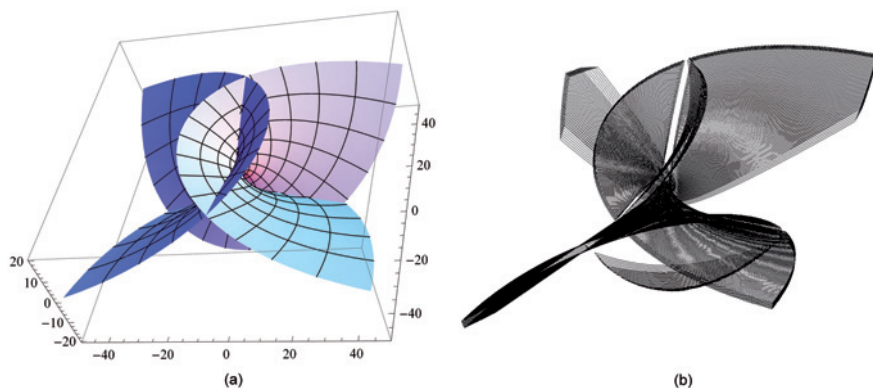


Fig. 11. – Superficie di Enneper autointersecantesi (a); corrispondente oggetto costruito (b).

Anche nell'assemblare due o più superfici regolari i punti di incollamento possono creare problemi, a meno che l'incollamento non

sia di classe almeno  $C^1$ . La Fig. 12 presenta un assemblaggio  $C^1$  di cinque superfici, ciascuna delle quali viene sottoposta ad ispessimento di diversa entità: l'oggetto ottenuto è una bocca di aspirazione o di diffusione.

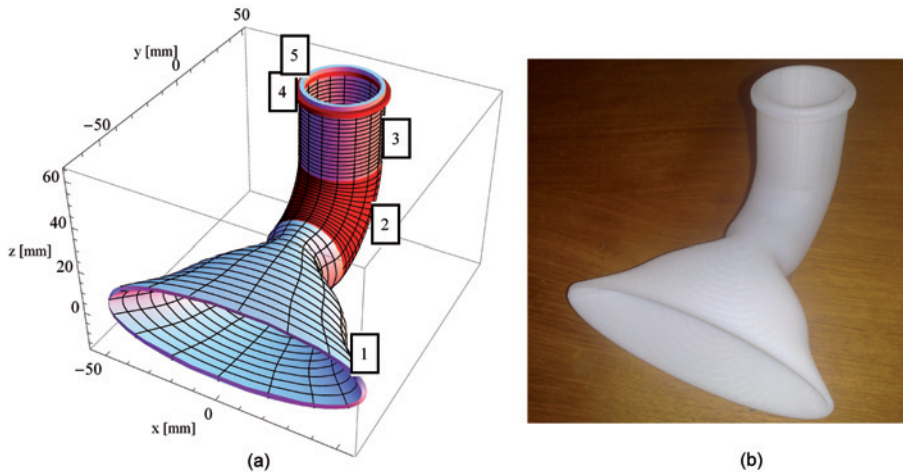


Fig. 12. – Aspirapolvere.

I problemi dovuti alla presenza di singolarità, di autointersezioni e di incollamenti non  $C^1$  saranno oggetto di ulteriori studi.

## RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [1] GRAY A., ABBENA E., SALAMON S.: *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica*, 3rd Edition, Chapman Hall/CRC, 2006.
- [2] BERGER M., GOSTIAUX B.: *Differential Geometry: Manifolds, Curves, and Surfaces*, Graduate texts in Mathematics n. 115, Springer-Verlag, New York, 1988.
- [3] BORDONI M., BOSCHETTO A.: *Thickening of surfaces for direct additive manufacturing fabrication*, Rapid Prototyping Journal, 18 (4): 308-318, 2012.
- [4] BOTT R., TU L.W.: *Differential forms in algebraic topology*, Berlin: Springer-Verlag, 1982.
- [5] JACOBS P.F.: *Rapid Prototyping and Manufacturing*, Society of Manufacturing Engineers, 1992.
- [6] LAWRENCE, J. D.: *A Catalog of Special Plane Curves*, New York: Dover, 1972.

- [7] SPIVAK M.: *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Vol. I. Publish or Perish, Inc. Berkeley, 1979.
- [8] WOLFRAM S.: *A New Kind of Science*, Wolfram Media, 2002.

Manlio Bordoni

Dipartimento SBAI, Università degli Studi “La Sapienza”, Roma  
e-mail: bordoni@dmmm.uniroma1.it

Alberto Boschetto

Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Aerospaziale,  
Università degli Studi “La Sapienza”, Roma  
e-mail: a.boschetto@dma.ing.uniroma1.it