La Matematica nella Società e nella Cultura

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Agnese Ilaria Telloni

Gruppi e varietà tridimensionali da poliedri simmetrici

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **5** (2012), n.1 (Fascicolo tesi di Dottorato), p. 99–102.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2012_1_5_1_99_0>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2012.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. V, Aprile 2012, 99-102

Gruppi e varietà tridimensionali da poliedri simmetrici

AGNESE ILARIA TELLONI

1. – Introduzione

La tesi riguarda la topologia e la geometria di alcune classi di varietà chiuse tridimensionali e lo studio dei loro principali invarianti algebrici: il gruppo fondamentale, i gruppi di omologia e, nel caso iperbolico, il volume e il gruppo delle isometrie. Queste famiglie di varietà si ottengono da solidi platonici ed archimedei oppure da 3-celle poliedrali con triangolazioni di tipo simmetrico mediante identificazione a coppie delle facce di bordo. L'interesse per queste classi di varietà è ben noto in letteratura (si veda ad esempio il lavoro di diversi autori, tra i quali Emil Molnàr e il suo gruppo di ricerca, Everitt, Best, Lorimer, Richardson e Rubinstein). In questo ambito di ricerca si presentano in modo naturale alcuni problemi, quali la costruzione esplicita di varietà mediante schemi poliedrali, la classificazione delle loro strutture topologica e geometrica, la rappresentazione combinatoria di questi spazi mediante diagrammi di Heegaard e come rivestimenti ramificati di nodi o link, la determinazione di presentazioni geometriche dei loro gruppi fondamentali e lo studio delle proprietà algebriche di queste presentazioni.

2. – Varietà costruite dai solidi platonici

Per *varietà platonica* si intende una 3–varietà chiusa, connessa ed orientabile ottenuta mediante identificazione a coppie delle facce di bordo di un solido platonico. Il problema della classificazione modulo isometrie delle varietà platoniche è stato completamente risolto da Brent Everitt [1]. Il nostro principale obiettivo è lo studio della struttura topologica delle varietà platoniche, per le quali si ottiene la classificazione topologica completa nei casi delle geometrie sferica ed euclidea [2] e si illustrano numerose proprietà topologiche nel caso iperbolico [3]. Sia $X = S^3$, E^3 o H^3. Una *X-varietà* M è uno spazio quoziente X/G, dove G é un gruppo di isometrie che agisce su X in modo propriamente discontinuo e senza punti fissi. Questo determina naturalmente una tassellazione di X. Qui consideriamo le tassellazioni di X aventi come dominio fondamentale uno dei cinque solidi platonici. Si noti che le isometrie di G definiscono delle identificazioni a coppie tra le facce di bordo del dominio fondamentale e generano il gruppo fondamentale della 3-varietà.

TEOREMA 1. – *Le varietà platoniche con geometria sferica ed euclidea sono omeomorfe ai seguenti spazi fibrati:*

Varietà sferiche
$M_1 \cong L(5,2)$
$M_2 \cong L(8,3)$
$M_3 \cong S^3/_{\langle 222\rangle} = (O\ 0\ o\ :-1\ (2,1)(2,1)(2,1))$
$M_4 \cong S^3/_{Q_8\times Z_3} = (O\ 0\ o\ :0\ (2,1)(2,1)(2,1))$
$M_5 \cong S^3/_{D_{24}} = (O\ 0\ o\ :-1\ (2,1)(2,1)(3,2))$
$M_6 \cong S^3/_{\langle 332\rangle} = (O\ 0\ o\ :-1\ (3,1)(3,1)(2,1))$
$M_7 \cong S^3/_{P_{120}} = (O\ 0\ o\ :-1\ (2,1)(3,1)(5,1))$
$M_8 \cong S^3/_{P_{24}\times Z_5} = (O\ 0\ o\ :-1\ (2,1)(3,2)(3,2))$

Varietà euclidee
$M_9 \cong T\times I/_{\left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\end{smallmatrix}\right)} = (O\ 0\ o\ :-1\ (3,1)(3,1)(3,1))$
$M_{10} \cong M_{14} \cong T\times I/_{\left(\begin{smallmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{smallmatrix}\right)} = (O\ 0\ o\ :-2\ (2,1)(2,1)(2,1)(2,1))$
$M_{11} \cong (K\underset{\sim}{\times} I)\cup(K\underset{\sim}{\times} I)/_{\left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)} = (O\ 1\ n\ :-1\ (2,1)(2,1))$
$M_{12} \cong T\times I/_{\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)} = S^1\times \mathbb{S}^1\times \mathbb{S}^1$
$M_{13} \cong T\times I/_{\left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{smallmatrix}\right)} = (O\ 0\ o\ :-1\ (4,1)(4,1)(2,1))$

3. – Varietà costruite da solidi archimedei

Alla fine degli anni ottanta E. Molnár dimostrò che è possibile definire un sistema di identificazione delle facce di bordo dei solidi archimedei $F_G := (6,6,5)$ e $F_{G'} := (10,10,3)$ in modo da ottenere come spazi quoziente 3-varietà chiuse ed iperboliche $M = H^3/G \sim F_G$ e $M' = H^3/G' \sim F_{G'}$. I gruppi di isometrie $G \cong \pi_1(M)$ e $G' \cong \pi_1(M')$ ammettono presentazioni con due generatori:

$$G = \langle a,b:\ a^3b^{-1}a^2(b^{-2}a^{-1})^2b^{-2}a^2b^{-1}a^3b=1,\ a^3b^{-1}a^3b^2a^{-2}ba^{-3}ba^{-2}ba^{-3}ba^{-2}b^2=1\rangle$$

e

$$G' = \langle a,b:\ b^3ab^2a^{-3}b^2a=1,\ a^4ba^3b^{-2}a^3b=1\rangle.$$

Alcuni dei nostri risultati, ottenuti in [4], sono:

TEOREMA 2. – *Le precedenti presentazioni dei gruppi fondamentali $G \cong \pi_1(M)$ e $G' \cong \pi_1(M')$ sono geometriche, cioè corrispondono a diagrammi di Heegaard di genere 2 di M e M'.*

TEOREMA 3. – *Le 3-varietà M e M' sono omeomorfe ai doppi rivestimenti ciclici della 3-sfera ramificati sui link a 3 ponti π-iperbolici L e L' mostrati in figura 1. Inoltre il gruppo delle isometrie delle varietà iperboliche M e M' è isomorfo a $Z_2 \times Z_2$.*

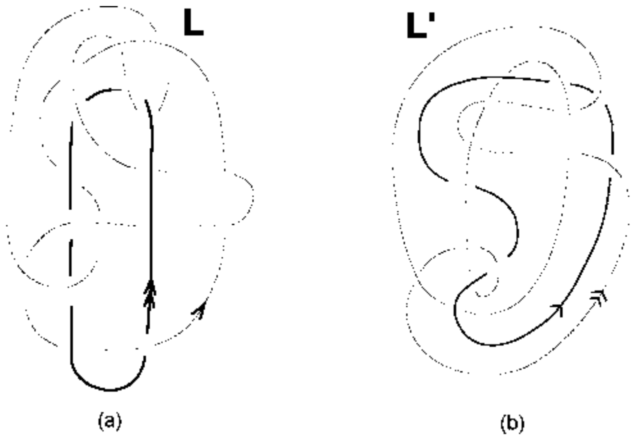

Fig. 1. – I link a 3 ponti π-iperbolici L e L'.

4. – Gruppi di varietà poliedrali

In questa sezione introduciamo una nuova famiglia di gruppi con presentazione ciclica, suggerita dallo studio dei gruppi fondamentali di alcune varietà chiuse. Siano $n \geq 1$ e k, ℓ, q, t interi non negativi tali che $t \neq 0$ e q divide $2t$ e ℓt. Indichiamo con $\Gamma^k_{n,t,q,\ell}$ il gruppo definito dalla presentazione finita con generatori $a_0, \cdots, a_{2n}$ e relazioni cicliche del tipo

$$\prod_{r=1}^{\alpha} a_{i+rq} = \prod_{j=0}^{\ell} \prod_{s=0}^{\beta} a_{i+(j+1)(q-t)+j\beta q+sq},$$

dove $\alpha := tk(\ell+1) + (\ell t)/q$, $\beta := tk + (2t)/q - 1$, $i = 0, \ldots, 2n$ (gli indici sono considerati modulo $2n+1$). Questa famiglia contiene come casi particolari una classe di gruppi studiati da Sidki [5] e alcuni gruppi fondamentali di 3-varietà chiuse. Ci proponiamo di determinare le principali proprietà algebriche dei gruppi $\Gamma^k_{n,t,q,\ell}$ e il loro eventuale significato geometrico. I risultati ottenuti sono raccolti in [6].

TEOREMA 4. – *Il gruppo $\Gamma^k_{n,t,q,\ell}$ ammette la seguente presentazione con due generatori e tre relazioni*

$$\langle a, u : (au^{-qm})^{\alpha+\beta+1} = ((au^{-qm})^{\beta+1}u^{tm})^{\ell+2} = u^{m'(2n+1)}, [u^{2n+1}, a] = 1\rangle$$

dove $\alpha = tk(\ell+1) + (\ell t)/q$, $\beta = tk + (2t)/q - 1$ *e* $qm(\alpha+\beta+1) + m'(2n+1) = 1$.

Si osservi che la terza relazione della presentazione non è, in generale, conseguenza delle due precedenti. Pertanto, per alcuni valori dei parametri, il gruppo $\Gamma^k_{n,t,q,\ell}$ non può essere il gruppo fondamentale di una 3-varietà chiusa, poichè ammette una presentazione irriducibile non bilanciata. Il seguente teorema fornisce condizioni specifiche sui parametri in modo tale che la presentazione nell'enunciato del Teorema 4 corrisponda ad una spina di una varietà tridimensionale chiusa, connessa ed orientabile.

TEOREMA 5. – *Siano* $n \geq 1$, t, q, k, $\ell \geq 0$ *interi tali che* $t \neq 0$, q *divide* $2t$ *e* ℓt, $(q(\alpha+\beta+1), 2n+1) = 1$, $\alpha+\beta > 0$, $(\alpha, \beta+1) = 1$ *e* $qm(\alpha+\beta+1) + m'(2n+1) = 1$. *Allora* $\Gamma^k_{n,t,q,\ell}$ *è il gruppo fondamentale dello spazio fibrato di Seifert definito dai seguenti invarianti*

$$(O\ 0\ o:\ -1\ (2n+1, tm)\ (\alpha+\beta+1, \beta+1)\ (\ell+2, \ell+1)).$$

In particolare, il gruppo $\Gamma^k_{n,t,q,\ell}$ *è infinito se e solo se*

$$(\ell+2)(2n+1) \leq [2n(\ell+1) - 1](\alpha+\beta+1).$$

BIBLIOGRAFIA

[1] B. EVERITT, *3-manifolds from Platonic solids*, Topology Applications, **138** (2004), 253-263.

[2] A. CAVICCHIOLI, F. SPAGGIARI e A. I. TELLONI, *Topology of compact space forms from Platonic solids. I*, Topology Applications, **156** (2009), 921-931.

[3] A. CAVICCHIOLI, F. SPAGGIARI e A. I. TELLONI, *Topology of compact space forms from Platonic solids. II*, Topology Applications, **157** (2010), 812-822.

[4] A. CAVICCHIOLI e A. I. TELLONI, *On football manifolds of E. Molnár*, Acta Mathematica Hungarica, **124** (2009), 321-332.

[5] S. SIDKI, *On the fundamental groups of 3−manifolds of Lins−Mandel*, preprint.

[6] A. I. TELLONI, *Groups of some fibered spaces,* Journal of Group Theory, **157** (2010), 812-822.

Dipartimento di Matematica - Università di Modena e Reggio Emilia
e-mail: agneseilaria.telloni@unimore.it
Dottorato in Matematica con sede presso l'Università
di Modena e Reggio Emilia – Ciclo XXIII
Direttore di ricerca: Prof. Alberto Cavicchioli, Università di Modena e Reggio Emilia