La Matematica nella Società e nella Cultura

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Paola Lea Staglianò

Moduli graduati generati da s-successioni su anelli noetheriani commutativi

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **5** (2012), n.1 (Fascicolo tesi di Dottorato), p. 95–98.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2012_1_5_1_95_0>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2012.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. V, Aprile 2012, 95-98

Moduli graduati generati da s-successioni su anelli noetheriani commutativi

PAOLA LEA STAGLIANÒ

Per la loro importanza in geometria algebrica, gli anelli graduati sono da sempre oggetto di studio in algebra commutativa. È possibile caratterizzare gli anelli graduati mediante i loro invarianti algebrici, studiati da molti algebristi e geometri commutativi. In questa direzione, le algebre graduate che sono algebre simmetriche di moduli finitamente generati su anelli commutativi Noetheriani sono stati un importante argomento di studio (A. Micali, W.V. Vasconcelos, J. Herzog, A. Simis, e altri). Noi siamo interessati ad alcuni aspetti combinatorici di questo problema, più precisamente al calcolo degli invarianti utilizzando la teoria delle basi di Gröbner. Nella tesi si è sviluppato questo argomento per algebre simmetriche di moduli generati da s-successioni.

Sia R un anello commutativo Noetheriano unitario, sia $M = Rf_1 + Rf_2 + \ldots + Rf_q$ un R-modulo finitamente generato e sia $Sym_R(M) = R[T_1, T_2, \ldots, T_q]/J$ l'algebra simmetrica di M. Gli invarianti standard dell'algebra simmetrica $Sym_R(M)$ esaminati nella tesi sono stati la dimensione di Krull, $dim(Sym_R(M))$, la molteplicità, $e(Sym_R(M))$, la profondità, $depth(Sym_R(M))$, rispetto all'ideale massimale graduato di R, la regolarità, $reg(Sym_R(M))$. I primi tre invarianti sono classici, la regolarità, $reg(Sym_R(M))$, è la regolarità di Castelnuovo-Munford del modulo graduato M. La sua importanza è brevemente indicata nel teorema di Einsenbud-Goto ([2]), nel quale è descritta in termini di numeri di Betti di M. Einsenbud e Goto mostrano che $reg(M)$, quando M è un R-modulo graduato finitamente generato, con $R = K[x_1, \ldots, x_n]$ anello dei polinomi nelle indeterminate $x_1, \ldots, x_n$ a coefficienti nel campo K, misura la "complessità" della risoluzione libera minimale di M come un R-modulo. Ne segue che la regolarità gioca un ruolo importante in molti campi dell'algebra commutativa. Precisamente, data una risoluzione libera graduata minimale di M su R, $0 \to F_l \to \ldots \to F_1 \to F_0 \to M \to 0$ se b_i è il massimo grado dei generatori dei moduli liberi F_i, allora $reg(M) = sup\{b_i - i, i \geq 0\}$. In altre parole, $reg(M)$ è il più piccolo intero m tale che per ogni j, il j-esimo modulo di sizigie di M è generato nel grado $\leq m + j$. Se R non è l'anello dei polinomi, la regolarità di M può essere infinita.

Un possibile metodo per studiare gli invarianti dell'algebra simmetrica di M è "via" l'ideale delle relazioni J di $Sym_R(M)$ ed utilizzando il metodo delle s-successioni, introdotto da J. Herzog, G. Restuccia e Z. Tang nel 2001 ([4]). Si consideri $S = R[T_1, \ldots, T_n]$ come anello graduato assegnando ad ogni variabile T_i grado 1 ed agli elementi di R grado 0. Allora J è un ideale graduato ed il naturale epimorfismo $S \to Sym_R(M)$ è un omomorfismo di R-algebre graduate. Per calcolare $in_<(J)$ è necessario un ordinamento monomiale "ammissibile"nell'anello $R[T_1, T_2, \ldots, T_q]$ con la proprietà che $T_q > \ldots > T_1$. L'ideale iniziale di J, $in_<(J)$, è l'ideale monomiale definito da $in_<(J) = (in_<(f) : f \in J)$, con $in_<(f) = a_\alpha \underline{T}^\alpha$ termine iniziale di f e $\underline{T}^\alpha$ il più grande monomio di f nelle variabili $T_1, \ldots, T_q$ rispetto all'ordinamento monomiale introdotto sui monomi di $R[T_1, T_2, \ldots, T_q]$. Questo metodo è risultato efficace poiché è possibile controllare gli invarianti standard di $Sym_R(M)$ su $in_<(J)$. Sono, infatti, noti i seguenti teoremi per un ideale I di R

i) $H_I(t) = H_{in_<(I)}(t)$ (Macaulay Theorem, Cf.[1], Theorem 4.2.3.)
ii) $reg(I) \leq reg(in_<(I))$ (Green Theorem, Cf.[3], Corollary 2.12.)

con $H_I(t)$ funzione di Hilbert di I. In generale,

$$(I_1T_1, I_2T_2, \ldots, I_qT_q) \subseteq in_<(J)$$

dove $I_1, I_2, \ldots, I_q$ sono gli ideali annullatori della successione $f_1, f_2, \ldots, f_q$ generatrice di M e $I_i = M_{i+1} :_R \langle f_i \rangle$ per ogni $i = 1, \ldots, q$ con $M_{i-1} = Rf_1 + \ldots + Rf_{i-1}$.

DEFINIZIONE 1. – *Sia M un R-modulo finitamente generato, $M = Rf_1 + \ldots + Rf_q$. La successione $f_1, f_2, \ldots, f_q$ è una $s-$successione per M se*

$$(I_1T_1, I_2T_2, \ldots, I_qT_q) = in_<(J)$$

Se, inoltre, $I_1 \subset I_2 \subset \ldots \subset I_q$ allora la $s-$successione è detta strong.

Se M è generato da una s-successione è possibile calcolare gli invarianti di $Sym_R(M)$ utilizzando gli ideali annullatori della successione $f_1, f_2, \ldots, f_q$ generatrice di M, quindi ideali dell'anello R ([4]). Più precisamente, il risultato è il seguente

$$d := dim(Sym(M)) = \max_{\substack{0 \leq r \leq q, \\ 1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq q}} \{dim(R/(I_{i_1} + \ldots + I_{i_r})) + r\},$$

$$e(Sym(M)) = \sum_{\substack{0 \leq r \leq n, 1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq q \\ dim(R/(I_{i_1} + \ldots + I_{i_r})) = d-r}} e(R/(I_{i_1} + \ldots + I_{i_r})).$$

Per s-successioni strong si ha

$$dim(Sym_R(M)) = \max_{0 \leq r \leq q} \{dim(R/I_r) + r\}, \quad e(Sym_R(M)) = \sum_{\substack{0 \leq r \leq q \\ dim(R/I_r) = d-r}} e(R/I_r).$$

Se R è l'anello dei polinomi

$$reg(Sym_R(M)) \leq max\{reg(I_i), i = 1, \ldots, q\},$$

$$depth(Sym_R(M)) \geq min\{depth(R/I_i + i), i = 0, 1, \ldots, q\}.$$

Recentemente, la teoria delle $s-$successioni è stata applicata ad ideali monomiali, ideali generati da $d-$successioni e da successioni proprie, ideali massimali di algebre graduate standard quozienti di anelli di polinomi con la graduazione standard per ideali monomiali, moduli generici.

Problema aperto

Studiare e classificare moduli finitamente generati su anelli commutativi Noetheriani unitari il cui rango è maggiore o uguale a 1, cioè moduli che non siano necessariamente ideali, generati da $s-$successioni.

L'obiettivo della tesi è stato quello di studiare alcune classi di moduli generati da s-successioni: moduli monomiali, moduli di sizigie di ideali monomiali, ideali generati da circuiti di $R[x_1, \ldots, x_n]$ ed ideali generati da forme lineari nell'anello $R[x_1, \ldots, x_n]$.

Moduli monomiali.

Sia $S = K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ l'anello dei polinomi in n indeterminate sul campo K. Sia F un $S-$modulo libero con base $e_1, \ldots, e_n$. Un modulo monomiale M è un $S-$modulo isomorfo ad un sottomodulo monomiale di F che è del tipo $\bigoplus_{i=1}^{n} I_i e_i$, con I_i ideali monomiali dell'anello S.

TEOREMA 1. – *Sia $M = \bigoplus_{i=1}^{n} I_i e_i$ un modulo monomiale, $I_i = (m_{i1}, \ldots, m_{ir_i})$, $i = 1, \ldots, n$. Se*

$$gcd(m_{ij,lk}, m_{tu,zv}) = 1, \text{ con } m_{ij,lk} = \frac{m_{ij}}{gcd(m_{ij}, m_{lk})}$$

con $i = l$ e $j<k$, $t = z$ e $u<v$ o $i<l$, $t<z$, $(i,j) \neq (t,u)$, $(l,k) \neq (z,v)$ per $1 \leq i \leq n$, $1 \leq l \leq n$, $1 \leq j \leq r_i$, $1 \leq k \leq r_l$, $1 \leq t \leq n$, $1 \leq z \leq n$, $1 \leq u \leq r_t$, $1 \leq v \leq r_z$, allora M è generato da una $s-$successione.

Il teorema generalizza una ben nota condizione sufficiente per ideali monomiali ([4]). Gli ideali annullatori della successione si possono esprimere in funzione degli ideali annullatori di ciascuna componente $M_i = I_i e_i$ del modulo M.

Moduli di sizigie di ideali monomiali

Essendo definito il primo modulo di sizigie di un ideale monomiale, nella tesi sono stabilite condizioni sufficienti affinché il primo modulo di sizigie risulti generato da una s-successione. In particolare si considera una classe di ideali monomiali, la cui struttura del secondo modulo di sizigie, $Syz_2(I)$, è semplice. Precisamente, $Syz_2(I)$ è generato da trinomi. Questo fatto non è vero in generale, si veda la descrizione di Bruns e Herzog in termini di sizigie cicliche (*On Multigraded Resolutions*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., vol 118, 1995, pp. 245-257). Se $I = (f_1, \ldots, f_t)$ è un ideale monomiale, si è denotato con

$$s_{ij} = \frac{f_i}{gcd(fi,f_j)} e_j - \frac{f_j}{gcd(fi,f_j)} e_i = f_{ij} e_j - f_{ji} e_i, \quad 1 \leq i<j \leq t$$

i binomi generatori di $Syz_1(I)$, essendo $e_1, \ldots, e_t$ una base standard per R^t, $R^t \to I \to 0$ e con g_{ik} gli elementi della base del modulo libero $R^{\binom{t}{2}}$, $R^{\binom{t}{2}} \to Syz_1(I) \to 0$.

TEOREMA 2. – *Sia $I = (f_1, \ldots, f_t)$ un ideale monomiale tale che*

$$(i) \quad gcd\left(\frac{lcm(f_{i_1}, f_{i_2}, f_{i_3})}{lcm(f_{i_2}, f_{i_3})}, \frac{lcm(f_{j_1}, f_{j_2}, f_{j_3})}{lcm(f_{j_2}, f_{j_3})}\right) = 1,$$

$$1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq t, \quad 1 \leq j_1 < j_2 < j_3 \leq t, \quad i_1 \neq j_1, i_2 \neq j_2, i_3 \neq j_3$$

(ii) il secondo modulo di sizigie di I, $Syz_2(I)$, è generato da trinomi.

Allora $Syz_1(I)$ è generato da una s-successione.

Ideali generati da circuiti

Sia K un campo e sia $K[x_1, \ldots, x_n]$ l'anello dei polinomi in n indeterminate. La nozione di circuito proviene dall'algebra lineare. L'introduzione di un ordinamento monomiale $<$ in $K[x_1, \ldots, x_n]$ dà la possibilità di avere altri significati di circuito e conduce alla corrispondente nozione nell'anello dei polinomi $R[x_1, \ldots, x_n]$, con R non necessariamente campo. Nella tesi si sono studiate le relazioni tra circuiti e s-successioni.

DEFINIZIONE 2. – *Sia $S = R[Y_1, \ldots, Y_n]$ l'anello dei polinomi nelle n indeterminate $Y_1, \ldots, Y_n$ a coefficienti nell'anello R. Siano $f_1, \ldots, f_m$ elementi di S lineari nelle variabili Y_i.*

$$f_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} Y_j, \quad i = 1, \ldots, m, \quad a_{ij} \in R.$$

L'ideale $J = (f_1, \ldots, f_m)$ è generato da circuiti se

$$in_<(J) = (I_{i_1} Y_{i_1}, I_{i_2} Y_{i_2}, \ldots, I_{i_m} Y_{i_m}), \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_m \leq n$$

per ogni ordinamento "ammissibile"$<$ tra i monomi di $R[Y_1, \ldots, Y_n]$, con $Y_n > Y_{n-1} > \ldots > Y_1$, $I_{i_t} \neq (0)$ per ogni $t \in \{1, \ldots, m\}$, essendo $I_{i_1}, I_{i_2}, \ldots, I_{i_m}$ ideali di R.

Ideali generati da forme lineari

Si è investigato su ideali di $S = R[x_1, \ldots, x_n]$ generati da forme lineari nelle variabili x_i. In particolare, gli ideali considerati sono nuclei di epimorfismi di algebre simmetriche, pertanto ideali di relazioni (Avramov L., *Complete Intersections and Symmetric Algebras*, Reports Dept. Math. University of Stockholm, vol. 7, 1980).

Nella tesi è stato utilizzato frequentemente il software "CoCoA "(Capani A., Niesi G., Robbiano L., *CoCoA: a System for Doing Computations in Commutative Algebra*, http://cocoa.dima.unige.it/)

BIBLIOGRAFIA

[1] BRUNS W. e HERZOG J., *Cohen-Macaulay Rings-Revised Edition*, Cambridge Studies in Advanced Mathemathics, **39** (1998).

[2] EISENBUD D. e GOTO S., *Linear Free Resoltions and Minimal Multiplicity*, Journal of Algebra, 88 (1984), 89-133.

[3] ELIAS J., GIRAL J.M., MIRÒ-ROIG R.M. e ZARZUELA S., *Six Lectures on Commutative Algebra*, Progress in Mathematics, **166**, (1998).

[4] HERZOG J., RESTUCCIA G. e TANG Z., *s-Sequences and Symmetric Algebras*, Manuscripta Math., **104** (2001), 479-501.

Dipartimento di Matematica, Università di Messina
e-mail: pstagliano@unime.it
Dottorato in Matematica, con sede presso l'Università di Messina – Ciclo XXII
Direttore di ricerca: Prof.ssa Gaetana Restuccia, Università di Messina