La Matematica nella Società e nella Cultura

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Sophie Marie Fosson

Deconvoluzione di sistemi lineari con ingresso quantizzato: un approccio basato sulla teoria dell'informazione

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **5** (2012), n.1 (Fascicolo tesi di Dottorato), p. 79–82.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2012_1_5_1_79_0>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2012.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. V, Aprile 2012, 79-82

Deconvoluzione di sistemi lineari con ingresso quantizzato: un approccio basato sulla teoria dell'informazione

SOPHIE M. FOSSON

1. – Introduzione

Per deconvoluzione si intende la ricostruzione dell'input di un sistema di convoluzione date delle misure dell'output. Tale problema è riscontrato in vari contesti scientifici e tecnologici, ad esempio in astrofisica, in geofisica, nella ricostruzione di immagini ed in alcuni sistemi biomedici ed industriali.

Motivato dalle numerose applicazioni, lo studio della deconvoluzione è stimolante dal punto di vista matematico per la sua natura di problema inverso e mal posto. L'operazione di inversione dell'integrale di convoluzione può dare risultati non unici e che non dipendono con continuità dai dati (quindi a piccole imprecisioni nella lettura dell'output possono corrispondere grandi perturbazioni nella ricostruzione dell'input); per questo motivo, si devono cercare altre vie per stimare l'input.

Il duplice interesse applicativo e teorico-matematico ha spinto diverse comunità scientifiche verso lo studio della deconvoluzione e molteplici tecniche risolutive sono state proposte negli ultimi trent'anni. Data la vastità del problema, tipicamente ogni tecnica è sviluppata per casi specifici, cioè per sistemi con precise caratteristiche in termini di dimensioni, parametri, regolarità delle funzioni in gioco; inoltre, a seconda dello scopo applicativo, possono variare i requisiti di prestazioni e complessità degli algoritmi. Tra le metodologie note, non è quindi possibile individuare un approccio universalmente valido: in questo senso, la deconvoluzione è destinata a rimanere un problema aperto.

Dal punto di vista matematico, il problema della deconvoluzione può essere formulato come segue: dato un sistema convolutivo

$$x(t) = \int_0^t \mathcal{K}(t-s)u(s)\,\mathrm{d}s \qquad t \in [0,T]$$

dove T può tendere all'infinito, si deve ricostruire $u(t)$ a partire da misure di $x(t)$ e noto il nucleo di convoluzione $\mathcal{K}(t)$. In generale, le misure di $x(t)$ non sono esatte, il che rende il problema più complesso.

L'obiettivo della tesi è studiare la deconvoluzione di sistemi lineari del tipo

$$\begin{cases} x'(t) = \mathrm{A}x(t) + \mathrm{B}u(t) & t \in [0,T] \\ y(t) = \mathrm{C}x(t) \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

dove $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p, x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^q, y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^r$ e A, B e C sono matrici reali di dimensioni consistenti. La relazione fra input e output è la seguente:

$$y(t) = \mathrm{C} \int_0^t e^{(t-s)\mathrm{A}} \mathrm{B} u(s)\, \mathrm{d}s.$$

Inoltre, assumiamo che (a) i dati disponibili siano una versione campionata e affetta da rumore additivo di $y(t)$, vale a dire $y_k = \mathrm{C}x_k + n_k$ dove $x_k = x(\tau k)$, $\tau > 0$, $k = 1, \dots, K$ con $K = T/\tau \in \mathbb{N}$; (b) n_k, $k = 1, \dots, K$, siano rumori gaussiani bianchi, ovvero realizzazioni di variabili aleatorie gaussiane, indipendenti, con media nulla e matrice di covarianza $\sigma^2 I$; (c) $u(t)$ sia costante a tratti e quantizzata, cioè

$$u(t) = \sum_{k=0}^{K-1} u_k \mathbf{1}_{[k\tau,(k+1)\tau[}(t) \qquad u_k \in \mathcal{U}$$

dove $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^q$ è un alfabeto finito.

In altri termini, $u(t)$, con $t \in [0, T]$, è equivalente ad una sequenza di simboli $(u_0, \dots, u_{K-1}) \in \mathcal{U}^K$. Lo studio di sistemi con ingresso quantizzato è motivato dalla recente diffusione delle tecnologie *ibride*, nelle quali si affronta il problema di interfacciare segnali digitali con dispositivi analogici.

2. – Algoritmi di deconvoluzione

In generale, gli algoritmi classici di deconvoluzione [4] non sono adatti a sistemi con ingresso quantizzato in quanto studiati per sistemi con funzioni in ingresso regolari. Nasce quindi l'esigenza di sviluppare nuove metodologie risolutive. Inoltre, le tecniche classiche lavorano "off-line", cioè dopo il tempo T che segna la fine della trasmissione o del processo. In molti casi, tuttavia, T può risultare molto grande o addirittura tendere all'infinito (si pensi a processi industriali che potenzialmente non si interrompono mai); per questo, nella tesi ci siamo concentrati su algoritmi iterativi causali, che, sulla base delle misure passate e presenti, forniscono in tempo reale (o con un ritardo limitato) una stima dell'input corrent.

La quantizzazione dell'input e la conseguente equivalenza con un messaggio digitale suggeriscono l'utilizzo di algoritmi di decodifica per affrontare la deconvoluzione, vale a dire di algoritmi usati nelle trasmissioni digitali per ricostruire segnali codificati e inviati su canali rumorosi [5]. Nel nostro modello, la convoluzione e le imprecisioni nella lettura dell'output possono essere pensate rispettivamente come una codifica e un passaggio attraverso un canale rumoroso: vi è quindi una forte analogia tra il nostro sistema convolutivo e un sistema di trasmissione digitale, tra deconvoluzione e decodifica. L'uso della teoria dell'informazione e dei codici per affrontare il problema è quindi ben motivato.

Tra le tecniche di decodifica, consideriamo il noto algoritmo BCJR [1], una procedura iterativa che permette di calcolare la stima "Maximum A Posteriori" del messaggio in input (si veda [5] per maggiori dettagli). Esso è ottimale, nel senso che minimizza l'errore quadratico medio, ma non è causale in quanto decodifica il messaggio dopo la sua completa trasmissione. Tuttavia la sua struttura iterativa può essere resa causale considerando ad ogni passo solo l'informazione presente e passata. Più precisamente, il BCJR classico considera ad ogni passo tutti i possibili stati (nel nostro caso, i possibili valori assunti da x_k, $k = 1, \ldots, K$) e ne calcola la probabilità, utilizzando i dati $y_1, \ldots, y_K$; lo stesso fa il BCJR causale, ma utilizzando solo $y_1, \ldots, y_k$ per stimare x_k. Per diminuire ulteriormente la complessità, possiamo introdurre dei BCJR causali con un numero prefissato di stati, ovvero ad ogni passo temporale si tengono in memoria solo gli n stati più probabili e si trascurano gli altri. In questo modo, si ottengono algoritmi a complessità estremamente bassa, al prezzo di una possibile diminuzione delle prestazioni. Nella tesi abbiamo proposto gli algoritmi "One State" e "Two States", in cui si memorizzano rispettivamente uno e due stati e abbiamo mostrato che le loro prestazioni sono buone rispetto al BCJR causale.

3. – Analisi delle prestazioni

Nella tesi, abbiamo testato l'approccio basato sulla teoria dell'informazione sopra descritto in alcuni casi e, attraverso simulazioni numeriche e analisi teoriche rigorose (basate sui processi di Markov), abbiamo valutato le prestazioni dei diversi algoritmi.

In primo luogo, abbiamo implementato gli algoritmi BCJR, BCJR causale, "One State" e "Two States" nel caso di sistema monodimensionale con A $= 0$, B $=$ C $= 1$, $\mathcal{U} = \{0, 1\}$ e supponendo che ogni u_k, $k = 0, \ldots, K-1$, abbia la stessa probabilità di essere 0 o 1, indipendentemente dai bit precedenti o successivi. Le prestazioni sono state valutate rispetto all'errore quadratico medio definito come

$$\frac{1}{K}\sum_{k=0}^{K-1} \mathbb{E}[(u_k - \widehat{u}_k)^2]$$

dove $\mathbb{E}$ è la media stocastica e $\widehat{u}_k$ indica la stima di u_k. Naturalmente, i risultati simulativi mostrano che le prestazioni migliori sono ottenute con il BCJR. Considerando invece gli algoritmi causali, abbiamo notato un fatto sorprendente: l'algoritmo "Two States" ha pressochù le stesse prestazioni del BCJR causale (che è ottimo tra gli algoritmi causali), nonostante la complessità molto più bassa.

Per K tendente all'infinito, abbiamo calcolato analiticamente l'errore quadratico medio per gli algoritmi "One State" e "Two States" utilizzando risultati noti dalla Teoria Ergodica dei processi di Markov. Inoltre, per entrambi abbiamo dimostrato che

$$\lim_{K\to\infty} \frac{1}{K}\sum_{k=0}^{K-1} \mathbb{E}[(u_k - \widehat{u}_k)^2] = \lim_{K\to\infty} \frac{1}{K}\sum_{k=0}^{K-1} \mathbb{E}[(u_k - \widehat{u}_k)^2 | u_0, u_1, \ldots]$$

per π-quasi ogni $(u_0, u_1, \ldots) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, dove π è la misura uniforme su $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Questo risultato afferma che, sebbene le prestazioni varino a seconda dell'input, per quasi ogni input l'errore tende all'errore medio (ottenuto cioè mediando su tutti i possibili input).

In secondo luogo, abbiamo utilizzato lo stesso approccio per sistemi monodimensionali con $\mathrm{A} < 0$ e $\mathrm{B}, \mathrm{C} \neq 0$. In questo caso, gli algoritmi BCJR e BCJR causali risultano troppo complessi all'aumentare di K (gli stati possibili sono 2^K, quindi il numero di computazioni cresce esponenzialmente); d'altra parte l'algoritmo "Two States" risulta poco migliore del più semplice "One State", per cui l'analisi si è concentrata su quest'ultimo. In particolare, abbiamo calcolato analiticamente il suo errore quadratico medio utilizzando elementi della teoria delle funzioni iterate casuali [3]. Le prestazioni variano a seconda dei parametri in gioco, ma in generale risultano soddisacenti: una buona ricostruzione è possibile anche in presenza di disturbi piuttosto elevati nella lettura dell'output.

In terzo luogo, abbiamo implementato l'algoritmo "One State" per affrontare un problema multidimensionale di carattere applicativo: un sistema di "fault tolerant control" in cui la deconvoluzione coincide con il rilevamento di un errore in un processo [2]. In particolare, abbiamo testato il nostro approccio su un esempio numerico riguardante il controllo di volo di un aereo e abbiamo individuato i parametri di design ottimali per avere un rilevare le eventuali avare in modo preciso e con la maggior prontezza di risposta possibile. Più precisamente, abbiamo calcolato il passo temporale τ ottimale, che deve essere sufficientemente piccolo per avere una buona prontezza, ma allo stesso sufficientemente grande da poter acquisire l'informazione necessaria per una corretta deconvoluzione.

BIBLIOGRAFIA

[1] Bahl L., Cocke J., Jelinek F. e J. Raviv, *Optimal decoding of linear codes for minimizing symbol error rate*, IEEE Trans. Inf. Theory, **IT-20** (1974), 284-287.

[2] Fosson S.M., *A decoding Approach to Fault Tolerant Control of Linear Systems with Quantized Disturbance Input*, International Journal of Control, **84 (11)** (2011), 1779-1795.

[3] Stenflo O., *Ergodic theorems for markov chains represented by iterated function systems*, Bull. Polish Acad. Sci. Math., **49 (1)** (2001), 27-43.

[4] Tikhonov A.N. e Arsenin V.Y., *Solutions of ill-posed problems*, Winston and Sons (1977).

[5] Richardson T. e Urbanke R., *Modern Coding Theory*, Cambridge University Press (2008).

Dipartimento di Matematica, Politecnico di Torino
e-mail: sophie.fosson@polito.it
Perfezionamento in Matematica per le Tecnologie Industriali
con sede presso la Scuola Normale Superiore di Pisa
Direttore di ricerca: Prof. Fabio Fagnani, Dipartimento di Matematica,
Politecnico di Torino