
La Matematica nella Società e nella Cultura

RIVISTA DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

ROBERTA D'AMBROSIO

Risultati di immersione e compattezza in alcuni spazi di funzioni

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. 5 (2012), n.1 (Fascicolo tesi di Dottorato), p. 71–74.

Unione Matematica Italiana

[<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2012_1_5_1_71_0>](http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2012_1_5_1_71_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Risultati di immersione e compattezza in alcuni spazi di funzioni

ROBERTA D'AMBROSIO

Oggetto della tesi è la costruzione di opportune decomposizioni per funzioni appartenenti a spazi funzionali, la cui introduzione è legata alla risolubilità di alcuni problemi di Dirichlet per equazioni differenziali alle derivate parziali, del secondo ordine, lineari, di tipo ellittico, con soluzioni in certi spazi di Sobolev (con o senza peso) e su domini di $\mathbb{R}^n$ non necessariamente limitati e regolari. Come applicazione, si ottengono risultati di immersione e compattezza su un operatore di moltiplicazione definito tra spazi di Sobolev (con o senza peso).

Nello spirito delle classiche decomposizioni di Calderón e Zygmund per funzioni appartenenti allo spazio di Lebesgue L^1 , la nostra idea consiste nello scrivere, per ogni fissato $h \in \mathbb{R}_+$, una data funzione g appartenente alla chiusura di un sottoinsieme di uno specifico spazio di Banach, come somma di un funzione g_h , più regolare, e di una restante funzione $g - g_h$, la cui norma è controllata dal modulo di continuità della funzione g stessa, definito quest'ultimo come una particolare funzione continua che va a zero all'infinito.

Le decomposizioni sono utili in differenti contesti come dimostrazioni di risultati di interpolazione e stime a priori sulle soluzioni di problemi al contorno. Per esempio, nello studio di vari problemi ellittici con soluzioni in spazi di Sobolev $S(\Omega)$ (con o senza peso) definiti su un aperto Ω di $\mathbb{R}^n$, non necessariamente limitato e/o regolare, è necessario, a volte, stabilire risultati di regolarità e stime a priori per le soluzioni di tali problemi. Questi risultati si basano, molto spesso, sulla limitatezza e eventualmente compattezza dell'operatore di moltiplicazione

$$(1) \quad u \longrightarrow g u$$

definito su uno spazio di Sobolev $S(\Omega)$ e a valori in uno spazio di Lebesgue $L^p(\Omega)$ con un opportuno $p \in [1, +\infty[$ e dove g è un'assegnata funzione definita in uno spazio normato V . È necessario, quindi, ottenere una stima del tipo

$$(2) \quad \|g u\|_{L^p(\Omega)} \leq c \cdot \|g\|_V \cdot \|u\|_{S(\Omega)},$$

dove la costante c dipende dalle proprietà di regolarità di Ω e dagli esponenti di sommabilità, e la funzione g soddisfa opportune condizioni.

Se L è l'operatore differenziale associato al problema ellittico, stime del tipo (2) permettono, ad esempio, di provare immediatamente la limitatezza dell'operatore, dove g rappresenta uno dei coefficienti di ordine inferiore dell'operatore stesso.

Tuttavia, altri tipi di risultati non si riescono ad ottenere direttamente per l'operatore L , a causa della natura non necessariamente regolare dei suoi coefficienti. Risulta, dunque, necessario introdurre una classe di operatori L_h , i cui coefficienti, più regolari, approssimano i coefficienti dell'operatore L . Questa "deviazione" dei coefficienti di L_h da quelli di L deve essere fatta controllando le norme dei coefficienti approssimanti con quelle dei coefficienti dati. Dunque, è necessario ottenere stime dove la dipendenza dai coefficienti è espressa solo in termini delle loro norme (in modo, ad esempio, da non aver problemi nel passaggio al limite). Le decomposizioni costruite, nel lavoro di tesi, per funzioni appartenenti a opportuni spazi funzionali (che rappresentano l'ambiente di appartenenza dei coefficienti dei termini di ordine inferiore dell'operatore differenziale), giocano un ruolo molto rilevante in questo processo di approssimazione, in quanto forniscono stime in cui le costanti dipendono solo dalle norme dei coefficienti dati e dai loro moduli di continuità, e non dipendono dalla particolare decomposizione considerata.

Nella prima parte della tesi, si approfondisce lo studio di una classe di spazi funzionali pesati, denotata con $K_t^r(\Omega)$ ($r \in [1, +\infty[$, $t \in \mathbb{R}$), definita su un aperto Ω di $\mathbb{R}^n$, dove il peso è una funzione appartenente ad una specifica classe di funzioni peso, denotata con $\mathcal{A}(\Omega)$. Precisamente, una funzione misurabile $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ appartiene alla classe $\mathcal{A}(\Omega)$ se e solo se esiste una costante $\gamma \in \mathbb{R}_+$, indipendente da x e da y , tale che

$$(3) \quad \gamma^{-1} \rho(y) \leq \rho(x) \leq \gamma \rho(y), \quad \forall y \in \Omega, \quad \forall x \in \Omega \cap B(y, \rho(y)),$$

dove $B(y, \rho(y)) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - y| < \rho(y)\}$.

Si nota che $\mathcal{A}(\Omega)$ contiene, ad esempio, la classe delle funzioni $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ che sono lipschitziane in Ω con coefficiente di Lipschitz minore di 1.

Si denota, pertanto, con $K_t^r(\Omega)$ lo spazio delle funzioni g che appartengono localmente allo spazio $L^r(\Omega)$ tali che

$$\sup_{\Omega} \left(\rho^{t-\frac{n}{r}}(x) \|g\|_{L^r(\Omega \cap B(x, \rho(x)))} \right) < +\infty,$$

dove ρ è una funzione di classe $\mathcal{A}(\Omega)$. Si definiscono, inoltre, i sottospazi $\tilde{K}_t^r(\Omega)$ e $\mathring{K}_t^r(\Omega)$ di $K_t^r(\Omega)$ come le rispettive chiusure di $L_t^\infty(\Omega)$ e $C_0^\infty(\Omega)$ in $K_t^r(\Omega)$ (lo spazio $L_t^\infty(\Omega)$ è costituito dalle funzioni g tali che $\rho^t g \in L^\infty(\Omega)$). Si precisa che tali spazi sono stati utilizzati in letteratura nello studio di vari problemi di Dirichlet per equazioni differenziali alle derivate parziali, lineari, del secondo ordine, di tipo ellittico, in domini Ω non regolari di $\mathbb{R}^n$ (i.e. domini con frontiera singolare) e con soluzioni in alcuni spazi di Sobolev pesati, denotati con $W_s^{k,p}(\Omega)$ ($k \in \mathbb{N}_0$, $s \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq +\infty$), il cui peso è un'opportuna potenza di una funzione di classe $\mathcal{A}(\Omega)$.

Utilizzando alcune caratterizzazioni degli spazi $\tilde{K}_t^r(\Omega)$ e $\mathring{K}_t^r(\Omega)$ contenute in [3], si costruiscono, nel modo descritto sopra, decomposizioni per funzioni appartenenti a tali sottospazi. Come applicazione, si studia l'operatore di moltiplicazione (1) definito sullo spazio di Sobolev pesato $W_s^{k,p}(\Omega)$, a valori in uno spazio di Lebesgue $L^q(\Omega)$ con un opportuno $q \in [p, +\infty[$ e con $g \in K_t^r(\Omega)$.

Nella seguente ipotesi sull'aperto Ω :

h_o) esiste $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$ tale che

$$\forall x \in \Omega \quad \exists C_\theta(x) : \overline{C_\theta(x, \rho(x))} \subset \Omega,$$

dove $C_\theta(x)$ è un cono infinito con vertice in x e apertura θ , e $C_\theta(x, \rho(x)) = C_\theta(x) \cap B(x, \rho(x))$,

e sotto opportune condizioni sugli esponenti k, p, q, r e sul fattore moltiplicativo $g \in K_t^r(\Omega)$, si prova una stima del seguente tipo sull'operatore considerato

$$(4) \quad \|g u\|_{L^q(\Omega)} \leq c \cdot \|g\|_{K_t^r(\Omega)} \cdot \|u\|_{W_s^{k,p}(\Omega)},$$

dove la costante c dipende dagli esponenti di sommabilità, dalla funzione peso ρ e dall'apertura θ del cono. Si osserva che la stima ottenuta migliora una stima pesata del tipo (2), provata in [3], su un operatore di moltiplicazione definito sullo spazio $W_s^{k,p}(\Omega)$ e a valori in $L^p(\Omega)$, dove la funzione g appartiene a un opportuno spazio $K_t^r(\Omega)$.

Utilizzando la stima (4) e le decomposizioni per funzioni $g \in \tilde{K}_t^r(\Omega)$ o $g \in \mathring{K}_t^r(\Omega)$ si provano ulteriori risultati di limitatezza sull'operatore nel caso in cui il fattore moltiplicativo $g \in \tilde{K}_t^r(\Omega)$ o $g \in \mathring{K}_t^r(\Omega)$. In tali risultati, l'uso delle decomposizioni consente di esplicitare la dipendenza delle costanti che vi figurano dal modulo di continuità e dalla norma della funzione g .

Infine, nel caso in cui $g \in \mathring{K}_t^r(\Omega)$, dalle stime ottenute e dal teorema di Rellich-Kondrachov si deduce un risultato di compattezza sull'operatore.

Nella parte conclusiva della tesi si approfondisce lo studio di alcuni spazi di tipo Morrey, denotati con $M^{p,\lambda}(\Omega)$, definiti su un aperto non limitato Ω di $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$.

Per $p \in [1, +\infty[$ e $\lambda \in [0, n[$, lo spazio $M^{p,\lambda}(\Omega)$ è costituito dalle funzioni $g \in L_{loc}^p(\overline{\Omega})$ tali che

$$(5) \quad \|g\|_{M^{p,\lambda}(\Omega)}^p = \sup_{\substack{\tau \in]0,1[\\ x \in \Omega}} \tau^{-\lambda} \int_{\Omega \cap B(x,\tau)} |g(y)|^p dy < +\infty.$$

Tali spazi funzionali sono stati definiti da M. Transirico, M. Troisi e A. Vitolo, e la loro introduzione è legata alla risolubilità di alcuni problemi di Dirichlet per equazioni ellittiche con coefficienti discontinui su domini non limitati di $\mathbb{R}^n$.

Inizialmente, si è rivolta l'attenzione allo studio delle proprietà di densità degli spazi di tipo Morrey. Si sono provati, infatti, lemmi di caratterizzazione per funzioni appartenenti alla chiusura di $L^\infty(\Omega)$ e $C_0^\infty(\Omega)$ in $M^{p,\lambda}(\Omega)$ (denotate, rispettivamente, con $\tilde{M}^{p,\lambda}(\Omega)$ e $M_0^{p,\lambda}(\Omega)$). Utilizzando tali caratterizzazioni, si sono costruite opportune decomposizioni per funzioni appartenenti a $\tilde{M}^{p,\lambda}(\Omega)$ e $M_0^{p,\lambda}(\Omega)$. Tali decomposizioni sono state poi utilizzate per provare risultati di limitatezza e compattezza sull'operatore (1), definito su un classico spazio di Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ ($k \in \mathbb{N}$ e $p \in [1, +\infty[$) e a valori in uno spazio di Lebesgue $L^q(\Omega)$, con un opportuno $q \in [p, +\infty[$, dove il fattore moltiplicativo g appartiene ad un sottospazio di $M^{p,\lambda}(\Omega)$. In particolare, nell'ipotesi in cui l'aperto Ω abbia la proprietà di cono e in opportune ipotesi sugli esponenti di sommabilità, si prova una stima del seguente tipo sull'operatore considerato, nel caso

in cui il fattore moltiplicativo $g \in M_o^{p,\lambda}(\Omega)$

$$(6) \quad \|g u\|_{L^q(\Omega)} \leq c_1 \cdot \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} + c_2 \cdot \|u\|_{L^q(\Omega_o)},$$

dove Ω_o è un aperto limitato di Ω avente la proprietà di cono. Si precisa che l'utilizzo delle decomposizioni in questa stima, ha consentito di esplicitare, di nuovo, la dipendenza delle costanti c_1 e c_2 dal modulo di continuità e dalla norma della funzione g , migliorando alcune stime di [4] ottenute sullo stesso tipo di operatore in cui non era stata espressa la dipendenza delle costanti dai moduli di continuità. In ultimo, dalla stima (6) si deduce un risultato di compattezza per l'operatore, nel caso in cui il fattore moltiplicativo $g \in M_o^{p,\lambda}(\Omega)$.

Il lavoro di tesi termina con l'introduzione di uno nuovo spazio pesato di tipo Morrey, denotato con $M_\rho^{p,\lambda}(\Omega)$, dove la funzione peso appartiene alla classe $\mathcal{G}(\Omega)$. Più precisamente, se $d \in \mathbb{R}_+$, una funzione misurabile $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ appartiene alla classe $\mathcal{G}(\Omega, d)$ se e solo se esiste una costante $\gamma \in \mathbb{R}_+$, indipendente da x e da y , tale che

$$(7) \quad \gamma^{-1} \rho(y) \leq \rho(x) \leq \gamma \rho(y), \quad \forall y \in \Omega, \quad \forall x \in \Omega(y, d),$$

dove $\Omega(y, d) := \Omega \cap B(y, d)$. Si denota poi con $\mathcal{G}(\Omega)$ l'unione di tutti gli insiemi $\mathcal{G}(\Omega, d)$ con $d \in \mathbb{R}_+$. La classe $\mathcal{G}(\Omega)$ contiene, ad esempio, tutte le funzioni ρ positive su Ω , il cui logaritmo è una funzione lipschitziana.

Infine, sia $\rho \in \mathcal{G}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ e sia d un numero reale positivo tale che $\rho \in \mathcal{G}(\Omega, d)$. Si denota con $M_\rho^{p,\lambda}(\Omega)$ la chiusura di $L^\infty(\Omega) \cap M_\rho^{p,\lambda}(\Omega)$ in $M^{p,\lambda}(\Omega)$ (lo spazio $L^\infty(\Omega)$ è costituito dalle funzioni g tali che $\rho^{\frac{1}{p}} g \in L^\infty(\Omega)$ con $\rho \in \mathcal{G}(\Omega)$).

Un'attenta analisi delle relazioni che intercorrono tra $M_\rho^{p,\lambda}(\Omega)$, $\tilde{M}^{p,\lambda}(\Omega)$ e $M_o^{p,\lambda}(\Omega)$, ha consentito di provare le seguenti inclusioni

$$M_o^{p,\lambda}(\Omega) \subset M_\rho^{p,\lambda}(\Omega) \subset \tilde{M}^{p,\lambda}(\Omega).$$

In particolare si sono individuate opportune condizioni sulla funzione peso ρ affinché si abbia $M_o^{p,\lambda}(\Omega) = M_\rho^{p,\lambda}(\Omega)$.

BIBLIOGRAFIA

- [1] L. CASO e R. D'AMBROSIO, *Weighted spaces and weighted norm inequalities on irregular domains*, sottomesso per la pubblicazione.
- [2] L. CASO, R. D'AMBROSIO e S. MONSURRÒ, *Some remarks on spaces of Morrey type*, Abstr. Appl. Anal. **2010** (2010), 22 pp.
- [3] L. CASO e M. TRANSIRICO, *Some remarks on a class of weight functions*, Comment. Math. Univ. Carolin. (37) 3 (1996), 469-477.
- [4] P. CAVALIERE, M. LONGOBARDI e A. VITOLO, *Imbedding estimates and elliptic equations with discontinuous coefficients in unbounded domains*, Matematiche (Catania) (51) 1 (1996), 87-104.

Dipartimento di Matematica - Università degli Studi di Salerno

e-mail: rodambrosio@unisa.it

Dottorato in Matematica con sede presso l'Università di Salerno – Ciclo XXIII

Direttori di ricerca: prof.ssa Maria Transirico (Università degli Studi di Salerno)

prof.ssa Loredana Caso (Università degli Studi di Salerno)