La Matematica nella Società e nella Cultura

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Tiziano Casavecchia

Rigidità di generatori olomorfi di semigruppi ad un parametro e un Teorema Denoy-Wolff non autonomo

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **5** (2012), n.1 (Fascicolo tesi di Dottorato), p. 67–70.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2012_1_5_1_67_0>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2012.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. V, Aprile 2012, 67-70

Rigidità di generatori olomorfi di semigruppi ad un parametro e un Teorema Denoy-Wolff non autonomo

TIZIANO CASAVECCHIA

1. – Premessa

Lo studio delle soluzioni di equazioni differenziali in vari contesti è uno dei temi principali nella matematica almeno dal diciottesimo secolo. Tra la fine del diciannovesimo secolo e l'inizio del ventesimo questo studio si è esteso anche alle equazioni differenziali nel dominio complesso. Nella nostra tesi di dottorato, abbiamo trattato alcune questioni relative a particolari equazioni differenziali nel dominio complesso.

2. – Semigruppi ad un parametro e loro rigidità

Sia $F : D \to \mathbb{C}^n$ una funzione olomorfa; consideriamo il flusso $\Phi : [0, +\infty) \times D \to D$ generato dalle soluzioni del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi_t(z)}{\partial t} = F(\Phi_t(z)) \\ \Phi_0(z) = z \text{ per ogni } z \in D, \end{cases}$$

Quando tutte le curve integrali del campo di vettori olomorfo F sono definite in $[0, +\infty)$, il flusso Φ_t viene chiamato *semigruppo ad un parametro di funzioni olomorfe* in D generato da F. La funzione F viene indicata come il *generatore infinitesimale* del semigruppo ad un parametro Φ_t. Dalla definizione di Φ_t notiamo che $\Phi_{t+s} = \Phi_t \circ \Phi_s$ e che $\Phi_0 = \mathrm{id}_D$. Noi ci siamo interessati a condizioni di rigidità per generatori infinitesimali. Per *condizione di rigidità* per generatori infinitesimali di semigruppi ad un parametro si intende una condizione sufficiente a garantire che il generatore infinitesimale di un semigruppo ad un parametro sia identicamente nullo e quindi che il semigruppo generato sia *banale*, cioè si riduca alla sola mappa identica (tutti i punti del sistema dinamico in esame sono 'fermi'). Nello studio delle funzioni olomorfe incontriamo varie proprietà che vengono genericamente indicate nella letteratura come proprietà di rigidità, come ad esempio il Lemma di Schwarz. In generale non ogni funzione $F : D \to \mathbb{C}^n$, ove D è un dominio di $\mathbb{C}^n$, è il generatore infinitesimale di un semigruppo ad un parametro di funzioni olomorfe di D in sé. È ragionevole aspettarsi che i generatori infinitesimali di semigruppi ad un parametro di funzioni olomorfe in particolari domini di $\mathbb{C}^n$ godano di proprietà di rigidità specifiche. Ed infatti in [1] è stato dimostrato, tra altri, il seguente teorema

TEOREMA 1. – *Sia $f : \Delta \to \mathbb{C}$ il generatore infinitesimale di un semigruppo ad un parametro di funzioni olomorfe da Δ in sé. Se esiste un punto $\tau \in \partial\Delta$ tale che*

$$\angle \lim_{\zeta \to \tau} \frac{f(\zeta)}{|\zeta - \tau|^3} = 0, \tag{1}$$

allora $f \equiv 0$ in Δ.

Il limite che compare nel precedente teorema è un particolare limite ristretto, cioè un limite in cui gli intorni d'approccio al punto $\tau \in \partial\Delta$ non sono intorni circolari del punto τ, ma degli angoli con vertice τ. Più precisamente sia D un dominio (cioè un aperto connesso) di $\mathbb{C}^n$, strettamente convesso (ad esempio il disco unitario Δ o la palla unitaria $\mathbb{B}^n$) e $\tau \in \partial D$; la *regione angolare* $A_D(\tau, M)$, di vertice τ e ampiezza $M > 1$ è il sottoinsieme di D così definito:

$$A_D(\tau, M) := \left\{ z \in D \middle| \frac{\|z - \tau\|}{\mathrm{Re}\,\langle \tau - z, \nu_\tau \rangle} < M \right\},$$

dove $\mathrm{Re}(\,\cdot\,)$ indica la parte reale e ν_τ è il versore normale a al bordo di D in τ. Possiamo così definire il *limite angolare* nel modo seguente. Sia $F : D \to \mathbb{C}^n$ una funzione e τ un punto del bordo di D; diciamo che

$$\angle \lim_{z \to \tau} F(z) = L,$$

se esiste un $L \in \mathbb{C}^n$ tale che

$$\lim_{z \to \tau} F_{|A_D(\tau, M)}(z) = L,$$

per tutti gli $M > 1$. Osserviamo che l'esistenza del limite angolare non implica quella del limite nella topologia euclidea.

Uno dei risultati principali della prima parte della nostra tesi di dottorato è il seguente Teorema che generalizza il Teorema 1:

TEOREMA 2. – *Sia D un dominio limitato, strettamente convesso, con bordo di regolarità C^3 e $\tau \in \partial D$; sia inoltre $F : D \to \mathbb{C}^n$ il generatore infinitesimale di un semigruppo ad un parametro di funzioni olomorfe in D. Se*

$$\angle \lim_{z \to \tau} \frac{F(z)}{\|z - \tau\|^3} = 0,$$

allora $F \equiv 0$.

La dimostrazione di questo teorema ha richiesto l'utilizzo dei risultati e delle tecniche della teoria della distanza di Kobayashi. Non entriamo, per questioni di brevità, nei dettagli della prova, per cui rimandiamo a [3].

3. – Famiglie di evoluzione e Teorema di Denjoy-Wolff

Nella seconda parte della nostra tesi ci siamo occupati di un altro sistema dinamico continuo di funzioni olomorfe studiato dall'inizio del secolo scorso e poi ampliato nella sua generalità: le famiglie di evoluzione di Loewner. Nella sua formulazione più recente [2] una *famiglia di evoluzione* $\varphi_{s,t} : \Delta \to \Delta$ è una soluzione del seguente problema di Cauchy non autonomo

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{d\varphi}{dt} = (\varphi - \tau(t))(\overline{\tau(t)}\varphi - 1)p(\varphi, t) & \text{per quasi ogni } t \in [s, \infty), \\ \varphi(s) = \zeta, \end{cases}$$

dove $s \geq 0$, $\tau : [0, +\infty) \to \overline{\Delta}$ è misurabile e $p : \Delta \times [0, +\infty) \to \mathbb{C}$ è misurabile in t, olomorfa in ζ, e $\operatorname{Re} p(\cdot, t) \geq 0$ per ogni $t \geq 0$. Si può provare che le corrisondenti soluzioni $\varphi_{s,t}(\zeta)$, dove $\zeta \in \Delta$, sono definite per ogni $t \geq s \geq 0$.

Il nostro obbiettivo era descrivere il comportamento per $t \to +\infty$ delle $\varphi_{s,t}$. Questo si intreccia con un fenomeno peculiare delle funzioni olomorfe da Δ in sé descritto dal seguente

TEOREMA 3 (Denjoy-Wolff). – *Sia $f : \Delta \to \Delta$ una funzione olomorfa, non un automorfismo del disco. Allora esiste un punto τ tale che $\lim_{n \to +\infty} f^n = \tau$ uniformemente sui compatti di Δ, dove $f^n := f \circ f \circ \cdots \circ f$, n-volte. Inoltre se $\tau \in \Delta$, esso è un punto fisso per f.*

Questo risultato vale, mutatis mutandis, anche per i semigruppi ad un parametro di funzioni olomorfe. È stato naturale quindi investigare se il Teorema di Denjoy-Wolff si estende anche alle famiglie di evoluzione. Per alcuni risultati provati in [2], è sufficiente considerare il caso $\tau(t) \equiv \tau$ costante. L'esito della nostra indagine è stato che nel caso delle famiglie di evoluzione il comportamento asintotico è più intricato che nel caso discreto o autonomo, sebbene non completamente irregolare.

Allo scopo di enunciare i nostri risultati, definiamo l'ω-limite di $\varphi_{s,t}(\zeta)$ come l'insieme $\Omega(s, \zeta) := \{\xi \in \overline{\Delta} \,|\, \exists \text{ una sequenza } t_k \to +\infty, \text{ tale che } \varphi_{s,t_k}(\zeta) \to \xi\}$.

Consideriamo il caso $\tau \in \partial\Delta$. La descrizione geometrica della situazione poggia sulla geometria iperbolica del disco unitario. Ricordiamo che se $\tau \in \partial\Delta$ e $R > 0$, un *orociclo* di centro τ e raggio R è l'insieme $E(\tau, R) := \{\zeta \in \Delta \big| |\tau - \zeta|^2/1 - |\zeta|^2 < R\}$. Il bordo di questo insieme è una circonferenza tangente internamente in τ al bordo di Δ. Poniamo $R_\Delta(\tau, \zeta) := (|\tau - \zeta|^2)/(1 - |\zeta|^2)$. $R_\Delta(\tau, \zeta)$ è il raggio dell'orociclo con centro τ il cui bordo passa per ζ. L'*estensione angolare iperbolica* di un arco chiuso assolutamente continuo α del bordo dell'orociclo $E(\tau, R)$ è invece il numero $\ell_\Delta(\alpha)/R$, dove $\ell_\Delta(\alpha)$ denota la lunghezza iperbolica di α.

Possiamo così enunciare il nostro primo risultato su questo argomento.

TEOREMA 4. – *Sia* $(\varphi_{s,t})$ *una famiglia di evoluzione non banale in* Δ *con* $\tau(s) \equiv \tau \in \partial\Delta$. *Allora uno e uno soltanto dei tre casi seguenti può presentarsi:*

1. *per ogni* $s \geq 0$,
$$\lim_{t\to+\infty} \varphi_{s,t} = \tau$$
uniformemente sui compatti di Δ;
2. *per ogni* $s \geq 0$, *esiste una funzione iniettiva* $h_s : \Delta \to \Delta$ *tale che*
$$\lim_{t\to+\infty} \varphi_{s,t} = h_s$$
uniformemente sui compatti di Δ;
3. *per ogni* $s \geq 0$ *e per ogni* $\zeta \in \Delta$, *l'* ω *-limite* $\Omega(s,\zeta)$ *della traiettoria*
$$t \in [s,+\infty)\mapsto\varphi_{s,t}(\zeta) \in \Delta$$
è un arco chiuso della circonferenza definita dal bordo di un certo orociclo $E(\tau, R(s,\zeta))$ *dove* $0 < R(s,\zeta) \leq R_\Delta(\tau,\zeta)$.
Inoltre quest'ultimo caso si verifica se e solo se si verifica uno dei seguenti mutuamente esclusivi sottocasi:
   (*a*) *per ogni* $s \geq 0$ *e per ogni* $\zeta \in \Delta$, *si ha che* $\Omega(s,\zeta)$ *è esattamente l'intera circonferenza* $\partial E(\tau, R(s,\zeta))$;
   (*b*) *per ogni* $s \geq 0$ *e per ogni* $\zeta \in \Delta$, $\Omega(s,\zeta)$ *è un arco proprio chiuso di* $\partial E(\tau, R(s,\zeta))$ *e uno dei suoi estremi è* τ,
   (*c*) *per ogni* $s \geq 0$ *e per ogni* $\zeta \in \Delta$, $\Omega(s,\zeta)$ *è un arco proprio chiuso di* $\partial E(\tau, R(s,\zeta))$, *è contenuto in* Δ, *e tutti questi archi hanno la stessa estensione angolare.*

Abbiamo inoltre dimostrato un risultato simile per il caso in cui il punto τ si trova in Δ. Per le dimostrazioni rimandiamo a [4].

BIBLIOGRAFIA

[1] ELIN M., LEVENSTHEIN M., REICH S. e SHOIKHET D., *A rigidity theorem for holomorphic generators on the Hilbert ball*, Proc. Amer. Math. Soc., **136** (2008), 4313-4320.
[2] BRACCI F., CONTRERAS M. e DIAZ-MADRIGAL S., *Evolution Families and the Loewner Equation I: the unit disc*, J. Reine Angew. Math., in stampa.
[3] CASAVECCHIA T., *A rigidity condition for generators in strongly convex domains*, Complex Variables and Elliptic Equations, **55** (2010), 1131-1142.
[4] CASAVECCHIA T., *A non-autonomous version of the Denjoy-Wolff Theorem*, Complex Analysis and Operator Theory, arXiv:0910.2875, sottomesso.

Dipartimento di Matematica, Università di Pisa
e-mail: t.casavecchia@gmail.com
Dottorato in Matematica, con sede presso l'Università di Pisa – Ciclo XXI
Direttore di ricerca: Prof. Marco Abate, Università di Pisa