
La Matematica nella Società e nella Cultura

RIVISTA DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

SERENA BOCCIA

Il problema di Dirichlet per equazioni ellittiche in spazi di Sobolev con peso

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. 5 (2012), n.1 (Fascicolo tesi di Dottorato), p. 63–66.

Unione Matematica Italiana

[<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2012_1_5_1_63_0>](http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2012_1_5_1_63_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Il problema di Dirichlet per equazioni ellittiche in spazi di Sobolev con peso

SERENA BOCCIA

Oggetto della tesi è lo studio di alcune classi di spazi di Sobolev con peso con particolare riguardo al ruolo da essi svolto nello studio della risolubilità di equazioni differenziali alle derivate parziali, del secondo ordine, lineari, di tipo ellittico.

Siano k un intero non negativo, p un numero reale, $1 \leq p < +\infty$, Ω un dominio in $\mathbb{R}^n$, σ un vettore di funzioni misurabili, non negative (positive quasi ovunque), definite su Ω , che sarà chiamato *peso*, cioè

$$\sigma = \{\sigma_\alpha = \sigma_\alpha(x), x \in \Omega, |\alpha| \leq k\},$$

α un multiindice, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ o equivalentemente

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \alpha_i \in \mathbb{N}_0,$$

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n.$$

Allora lo spazio di Sobolev con peso $W^{k,p}(\Omega; \sigma)$ è definito come l'insieme di tutte le funzioni $u = u(x)$ che sono definite *q.o.* su Ω e le cui derivate generalizzate (nel senso delle distribuzioni) $\partial^\alpha u$ di ordine $|\alpha| \leq k$ soddisfano la seguente condizione

$$\int_{\Omega} |\partial^\alpha u(x)|^p \sigma_\alpha(x) dx < +\infty.$$

Dopo aver richiamato alcune proprietà fondamentali degli spazi di Sobolev con peso, nella prima parte della tesi vengono mostrati diversi esempi dai quali si evince l'utilità e, talvolta, la necessità di operare nell'ambito degli spazi con peso: soluzioni di problemi con fissati valori al bordo per equazioni alle derivate parziali con operatori differenziali non-standard (cioè con coefficienti o termine noto tali da non consentire di utilizzare i metodi classici) o domini non-standard (domini con una struttura geometrica più complicata).

Successivamente ci si pone il problema di determinare delle stime per le norme L^q ($q > 1$) delle derivate $\partial^k u$, $k < r$ ($k, r \in \mathbb{N}$), di funzioni u appartenenti ad un opportuno spazio di Sobolev con peso definito su un sottoinsieme non limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, in termini delle norme L^p ($p \geq 1$) di u e delle sue derivate $\partial^r u$. Risultati di interpolazione di questo tipo sono ben noti nel caso in cui, per esempio, l'aperto Ω è limitato e dotato della proprietà di cono.

Nel caso in esame le funzioni peso sono delle potenze di una funzione misurabile $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ tale che

$$(1) \quad \sup_{\substack{x, y \in \Omega \\ |x-y| < \rho(y)}} \left| \log \frac{\rho(x)}{\rho(y)} \right| < +\infty.$$

Esempi di funzioni del tipo appena introdotto sono:

- $x \in \mathbb{R}^n \rightarrow 1 + a|x|$, $a \in]0, 1[$;
- $x \in \Omega \rightarrow a \operatorname{dist}(x, S)$, $a \in]0, 1[$, con $\Omega \neq \mathbb{R}^n$ e S sottoinsieme non vuoto della frontiera di Ω ;
- funzioni Lipschitziane con costante di Lipschitz minore di 1.

Inoltre l'aperto Ω risulta soddisfare la seguente ipotesi di regolarità:

h_o) esiste $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$ tale che

$$\forall x \in \Omega \quad \exists C_\theta(x) \quad : \quad \overline{C_\theta(x, \rho(x))} \subset \Omega,$$

dove $C_\theta(x)$ è un cono infinito con vertice in x e apertura θ , e $C_\theta(x, \rho(x)) = C_\theta(x) \cap B(x, \rho(x))$.

In questo contesto riusciamo a provare una disuguaglianza di interpolazione del tipo

$$\|u\|_{U_{x-(r-k)}^{k,q}(\Omega)} \leq c \left(\|\partial^r u\|_{L_s^p(\Omega)}^a \cdot \|u\|_{L_{x_0-r}^{p_0}(\Omega)}^{1-a} + \|u\|_{L_{x_0-r}^{p_0}(\Omega)} \right),$$

per funzioni u in un appropriato spazio di Sobolev con peso. La disuguaglianza provata contiene, come caso particolare, la classica disuguaglianza di interpolazione di Gagliardo e Nirenberg riferita a domini non limitati, a patto di scegliere la funzione peso costante.

È rilevante notare che le disuguaglianze di interpolazione giocano un importante ruolo nello studio di equazioni ellittiche con coefficienti discontinui (o anche singolari) in spazi di Sobolev con peso.

Oltre allo studio della classe di pesi precedentemente introdotta, nel lavoro di tesi ci siamo anche occupati dello studio di un'altra classe di funzioni peso, la classe $\mathcal{S}(\Omega)$. Più precisamente, se $d \in \mathbb{R}_+$, denotiamo con $\mathcal{S}_d(\Omega)$ la classe delle funzioni misurabili $m : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ tali che

$$(2) \quad \sup_{\substack{x, y \in \Omega \\ |x-y| < d}} \frac{m(x)}{m(y)} < +\infty,$$

e, poi, con $\mathcal{S}(\Omega)$ l'unione di tutti gli insiemi $\mathcal{S}_d(\Omega)$ con $d \in \mathbb{R}_+$,

$$\mathcal{S}(\Omega) = \bigcup_{d \in \mathbb{R}_+} \mathcal{S}_d(\Omega).$$

Esempi di funzioni peso di classe $\mathcal{S}(\Omega)$ sono:

- $m(x) = e^{t|x|}$, $t \in \mathbb{R}$, $x \in \Omega$;
- $m(x) = (1 + |x|^2)^t$, $t \in \mathbb{R}$, $x \in \Omega$;
- tutte le funzioni m positive su Ω il cui logaritmo è una funzione Lipschitziana.

Tra le proprietà delle funzioni m in $\mathcal{S}(\Omega)$ mettiamo in risalto le seguenti:

- per ogni funzione m in $\mathcal{S}(\Omega)$ si ha

$$m, m^{-1} \in L_{loc}^\infty(\overline{\Omega}),$$

che vuol dire che sia m che la sua reciproca sono limitate su ogni compatto ben contenuto nel dominio Ω ;

- per ogni funzione m in $\mathcal{S}(\Omega)$ è possibile costruire una funzione regolarizzata $\sigma \in \mathcal{S}(\Omega) \cap C^\infty(\overline{\Omega})$, equivalente a m , tale che:

$$\sup_{x \in \Omega} \frac{|\partial^\alpha \sigma(x)|}{\sigma(x)} < +\infty \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n.$$

La seconda parte della tesi riguarda alcune applicazioni degli spazi con peso, presi in esame nella prima parte, allo studio delle soluzioni del problema di Dirichlet per un operatore differenziale lineare ellittico. Sintetizziamo, di seguito, i principali passi di tale studio.

Sia ancora Ω un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 3$. Assegniamo in Ω l'operatore differenziale del secondo ordine uniformemente ellittico

$$L = - \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i} + a,$$

con coefficienti $a_{ij} = a_{ji} \in L^\infty(\Omega)$, $i, j = 1, \dots, n$, e consideriamo il problema di Dirichlet ad esso associato

$$(3) \quad \begin{cases} u \in W^{2,p}(\Omega) \cap \mathring{W}^{1,p}(\Omega), \\ Lu = f, \quad f \in L^p(\Omega), \end{cases}$$

dove $p \in]1, +\infty[$.

È ben noto che se Ω è limitato e sufficientemente regolare o anche non limitato, il problema (3) è stato ampiamente studiato da molti autori sotto varie ipotesi di discontinuità sui coefficienti principali.

Nel lavoro di tesi, abbiamo ritenuto di particolare utilità estendere alcuni risultati già noti ad un caso pesato. Più precisamente, denotiamo con ρ una funzione peso del tipo (1) e tale che

$$\inf_{\Omega} \rho > 0, \quad \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \rho(x) = +\infty,$$

e consideriamo il problema di Dirichlet:

$$(4) \quad \begin{cases} u \in W_s^{2,p}(\Omega) \cap \mathring{W}_s^{1,p}(\Omega), \\ Lu = f, f \in L_s^p(\Omega), \end{cases}$$

dove $s \in \mathbb{R}$, $W_s^{2,p}(\Omega)$, $\mathring{W}_s^{1,p}(\Omega)$ e $L_s^p(\Omega)$ sono spazi di Sobolev con peso e le funzioni peso sono una potenza opportuna di ρ .

Richiedendo che l'aperto Ω sia sufficientemente regolare, che i coefficienti principali siano localmente di classe $VMO(\Omega)$ e all'infinito "vicini" a certi e_{ij} appartenenti ad un opportuno sottospazio di $VMO(\Omega)$, e che i coefficienti di ordine inferiore stiano in opportuni spazi di tipo Morrey, otteniamo una stima a priori per le soluzioni del problema (4). Tale stima ci permette di concludere che l'operatore L è semi-fredholmiano, che è equivalente a dire che ha rango chiuso e nucleo di dimensione finita. Mediante ulteriori risultati di regolarizzazione e utilizzando il metodo di prolungamento per continuità, si riesce a dedurre un risultato di esistenza e unicità della soluzione.

Come seconda applicazione, studiamo ancora il problema di Dirichlet (4) sotto ipotesi simili a quelle richieste nel caso precedente, ma con una differente scelta per quanto concerne le funzioni peso. Più precisamente, nel caso in esame, la funzione peso è una potenza opportuna della funzione peso m di tipo (2). Supponendo che tale funzione m verifichi appropriate ipotesi, otteniamo alcune stime a priori per le soluzioni del problema (4) dalle quali si deduce un risultato di esistenza ed unicità della soluzione.

BIBLIOGRAFIA

- [1] S. BOCCIA e L. CASO, *Interpolation inequalities in weighted Sobolev spaces*, J. Math. Inequal., **2** (2008), 309-322.
- [2] S. BOCCIA, S. MONSURRÒ e M. TRANSIRICO, *Elliptic equations in weighted Sobolev spaces on unbounded domains*, Int. J. Math. Sci., **2008** (2008), 12 pp.
- [3] S. BOCCIA, S. MONSURRÒ e M. TRANSIRICO, *Solvability of the Dirichlet problem for elliptic equations in weighted Sobolev spaces on unbounded domains*, Bound. Value Probl., **2008** (2008), 13 pp.
- [4] S. BOCCIA, M. SALVATO e M. TRANSIRICO, *A priori bounds for elliptic operators in weighted Sobolev spaces*, J. Math. Inequal., in corso di stampa.
- [5] S. BOCCIA, M. SALVATO e M. TRANSIRICO, *Existence and uniqueness results for Dirichlet problem in weighted Sobolev spaces on unbounded domains*, Methods Appl. Anal., **18** (2) (2011), 203-214.

Dipartimento di Matematica - Università degli Studi di Salerno
e-mail: seboccia@unisa.it

Dottorato in Matematica con sede presso l'Università di Salerno – Ciclo XXII
Direttori di ricerca: prof.ssa Maria Transirico (Università degli Studi di Salerno)
prof.ssa Loredana Caso (Università degli Studi di Salerno).