La Matematica nella Società e nella Cultura

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Giovanni Prodi

I miei problemi

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **4** (2011), n.3, p. 395–410.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2011_1_4_3_395_0>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2011.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. IV, Dicembre 2011, 395-410

I miei problemi

GIOVANNI PRODI

Premessa. Questa che sto per fare è una chiacchierata confidenziale, con cui voglio ricambiare l'affetto degli amici che hanno preparato questa festa. Ho pensato di parlare dei miei problemi. Tutti abbiamo dei problemi; qualche anno fa, Rosetta Zan ha condotto un'inchiesta fra i bambini della scuola elementare per sapere che concezione spontanea essi hanno del "problema". Fra le numerose risposte graziose ed interessanti, voglio citare questa:

> *«Per me un problema di matematica è un problema di una persona, però da risolvere in numeri .....*
> *... e invece in italiano un problema è così: "La mamma le casca il passeggino e il bimbo si fa male". Questo per me è un problema in italiano.»*

Ora, io non parlerò dei miei problemi in italiano, ma in matematica; parlerò di alcuni problemi di matematica, che mi hanno fatto compagnia per molto tempo, una compagnia discreta e quasi affettuosa. Potrei dire che voglio confidarvi come ho buttato via una buona parte del mio tempo. Dopo aver deciso di parlare di questi miei problemi, sono andato ad aprire vecchie cartelle piene di carte ingiallite, da cui non è mai uscita alcuna pubblicazione. Naturalmente, non è andata sempre così, non è il caso di essere masochisti: per fortuna, tante volte una meta è stata raggiunta: negarlo sarebbe far torto a tanti amici e colleghi con cui si è lavorato assieme, con entusiasmo. Semplicemente, voglio dedicare questa occasione unica a parlare di progetti che non hanno avuto esito, o che hanno avuto esito molto parziale, di cui rimangono solo le carte di cui parlavo, destinate al cassonetto.

Devo aggiungere però che non ho recriminazioni per questi miei problemi, anzi li considero ancora amici. Dopo tutto, il piacere che mi hanno dato ha superato la frustrazione; e anche ora mi consentono di passare qualche tempo in loro compagnia, specialmente quando ho un viaggio lungo da compiere e, a volte, anche nelle pause del sonno, la notte, quando altri pensieri meno sereni – con problemi in italiano – potrebbero affacciarsi.

Dico subito che chi pensasse di sentire risultati nuovi rimarrebbe deluso; il mio scopo è solo quello di presentare questi amici strani mettendone in evidenza l'indole e il carattere (quasi sempre dispettoso). Vi assicuro che non gioco a fare l'Hilbert che assegna problemi (ci mancherebbe altro!). Tuttavia, se qualcuno volesse chiacchierare con me su questi problemi, lo farò sempre volentieri.

Vediamone dunque alcuni.

1. – Navier-Stokes

Ci sono buone ragioni per ritenere che il moto di un fluido viscoso incomprimibile sia descritto bene, in forma euleriana, dal sistema

$$\begin{aligned} &\frac{\partial U}{\partial t} + (U \cdot \nabla)U + \nabla p = \nu \Delta U + F \\ &\nabla U = 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

assegnato in un aperto Ω di R^n; qui U rappresenta la velocità, ed è un campo di vettori; p rappresenta la pressione, ν è una costante. La seconda equazione esprime il fatto che il campo ha divergenza nulla. Il sistema è $n+1$ dimensionale. Nel caso $n = 2$ le cose sono abbastanza chiare: nel caso tridimensionale, che è quello fisicamente interessante, non si sa ancora se il problema di Cauchy in uno spazio funzionale opportuno abbia una soluzione unica "in grande", cioè nell'intervallo $[0, +\infty)$.

Io ebbi la fortuna di ascoltare le prime indicazioni generali su questo sistema dallo stesso J. Leray, il pioniere di questo studio, mentre lo accompagnavo chiacchierando per le vie di Milano: ricordo ancora che sottolineava la presenza del termine non lineare, non dissipativo al primo membro e del termine lineare e dissipativo (operatore di Laplace) nel secondo membro. Leray, con i suoi notissimi risultati del 1933-34, aveva dato inizio allo studio di questo sistema con i metodi dell'analisi funzionale. In particolare, aveva introdotto un metodo per eliminare la pressione p basandosi su un teorema di H. Weyl secondo cui lo spazio $L^2(\Omega)$ (spazio delle funzioni vettoriali a quadrato integrabile definite in un aperto Ω) può essere decomposto in due sottospazi fra loro ortogonali: quello dei gradienti (di un potenziale) e quello delle funzioni a divergenza nulla e con flusso nullo sulla frontiera, in senso generalizzato. Cito questi risultati di Leray anche perché sono i primi in quell'ordine di idee che porterà agli spazi di Sobolev e alle distribuzioni.

Non starò a riportare gli sviluppi tecnici (l'omissione ha la giustificazione usuale: gli specialisti li sanno già, agli altri non interessano). Basterà dire che il problema è stato ripetutamente studiato in due impostazioni

a) l'impostazione debole (in forma integrale): per questa è stata dimostrata l'esistenza di una soluzione globale, cioè definita in $[0, +\infty)$, ma non si è dimostrata l'unicità
b) l'impostazione forte (o anche classica): l'esistenza è stata dimostrata solo per un intervallo temporale abbastanza piccolo.

È interessante vedere le cose dal punto di vista della relazione dell'energia, che si può scrivere

$$\frac{1}{2}\,|U(t)|^2 + \nu \int_0^t \|U(\tau)\|^2 \, d\tau = \frac{1}{2}\,|U(0)|^2 + \int_0^t (U(\tau)|F(\tau))\, d\tau \tag{1.2}$$

dove $|\ |$ rappresenta la norma in $L^2(\Omega)$ e $(\ |\ )$ il relativo prodotto scalare, mentre si pone:

$$\|U\|^2 = \int_\Omega \sum_{j,k} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\right)^2 dx \tag{1.3}$$

La validità della relazione (1.2) garantirebbe perlomeno la continuità della soluzione debole in $L^2(\Omega)$, ma non si sa ancora se essa valga. L'unica cosa che si sa è che per 1a soluzione debole che si può ottenere con certi procedimenti di convergenza è garantita solo la disuguaglianza dell'energia, cioè il segno $=$ deve essere sostituito dal $\leq$. Questo fa pensare che la soluzione debole possa diventare irregolare in certi istanti, in cui si ha un'improvvisa perdita di energia (come sarebbe appunto per una rapida conversione di energia cinetica in calore).

Il problema di Cauchy per il sistema di Navier-Stokes è un tema ideale per chi voglia mettersi a studiare la sociologia della ricerca matematica. Tra gli “anni 50” e gli “anni 60” un numero notevole di ricercatori, in tutto il mondo, è andato all'attacco di questo problema. Credo che abbiamo fatto tutti gli stessi calcoli (basati sulla sommabilità di Sobolev, sulla valutazione della sommabilità dei nuclei ...) e credo che siamo arrivati tutti ad uno stesso “metateorema” empirico: che con quel tipo di strumenti non sia possibile risolvere il problema.

La convinzione generale era ed è che non si possa andare avanti senza un'idea nuova. In questi anni le idee nuove proposte al fine di ottenere una classe di funzioni abbastanza generale perché si possa avere l'esistenza e abbastanza ristretta (cioè regolare) perché si possa avere l'unicità sono state diverse: dalle “suitable solutions” di Caffarelli – Kohn – Nirenberg (Comm. P. A. Math. 35 (1982)), alle classi per cui $\frac{1}{2}\|U\|^2 + p$ è limitato (qui interviene dunque la pressione, che in tutte le altre metodologie viene fatta sparire). Inoltre gli studi paralleli sui fluidi comprimibili (di cui sono scarsamente esperto) hanno messo in campo nuove tecniche assai raffinate. Ma finora il problema (si parla sempre del caso tridimensionale) resiste.

Da parte mia, racconterò brevemente il mio tentativo di “idea nuova” . Ho pensato che il comparire di una singolarità in una soluzione “buona” debba essere ritenuto un fatto eccezionale e che, d'altra parte, una teoria statistica della turbolenza – da fondarsi sul sistema di Navier-Stokes – potrebbe essere valida anche in presenza di un semigruppo di trasformazioni definito a meno di insiemi di misura nulla. Mi domandavo anche se aveva senso, nel caso di un fluido, porre il problema di Cauchy con valori iniziali del tutto arbitrari. Il problema era allora di trovare una misura di probabilità definita nella famiglia dei boreliani di $L^2(\Omega)$ tale che per quasi tutti i valori iniziali si avesse una [unica *n.d.r.*] soluzione globale. Qui però sorgeva una difficoltà: la misura doveva ragionevolmente essere invariante rispetto al semigruppo di trasformazioni, ma che senso poteva avere questa condizione se il semigruppo non esisteva ancora, dovendo, anzi, essere definito a partire da questa misura? Risolsi questa difficoltà attenuando la condizione di invarianza, cioè introducendo la condizione di *semi-invarianza* (su cui non mi trattengo).

Il risultato era allora questo:

Se in $L^2(\Omega)$ esiste una misura semi-invariante μ, tale che

$$\int \|U\|^4 d\mu < +\infty \tag{1.4}$$

allora il problema di Cauchy ha una soluzione unica per quasi tutti i valori iniziali e la misura μ risulta invariante.

La difficoltà del problema era però solo spostata perché, mentre era facile trovare, con una successione di semigruppi approssimanti una misura-limite semi-invariante, non riuscii a trovare una misura soddisfacente alla condizione (1.4).

Tuttavia questo ordine di idee stimolò a cercare gli *attrattori,* cosa che poté essere avviata da C. Fojas e da me. Lo stesso Fojas intraprese un ampio studio per cercare le *soluzioni statistiche,* cioè le soluzioni costituite da misure di probabilità in moto; ma per l'unicità di queste soluzioni si trovavano le stesse difficoltà che erano state trovate per le soluzioni individuali e io ne fui un po' deluso perché la mia speranza era che a livello di massa il problema dovesse essere più semplice di quello che era a livello individuale.

Riflettendo a queste vicende, dopo tanto tempo, mi pare un po' strano che tanti ricercatori scommettano ancora sull'esistenza e unicità, come dimostrano i lavori che continuamente vengono stampati. Pochi sono quelli che investono le loro fatiche nei cercare un controesempio: tra questi pochi c'è stato J. Leray, nella sua memoria dei 1934 (Acta Math., **63**). In essa egli costruisce un esempio ipotetico, che richiede la soluzione preventiva di un'equazione non lineare. Può darsi che convenga riprovarci, con i progressi che si sono avuti nel frattempo.

In questa rassegna ho parlato solo delle questioni interessanti per me. Non ho parlato, ad esempio di problemi di frontiera libera (un problema di questo tipo, di notevole difficoltà, è stato risolto dall'amico Hisao).

Prima di lasciare l'argomento, vorrei accennare al corrispondente problema stazionario. L'esistenza di una soluzione per i dati di Dirichlet non nulli (e flusso globale nullo, ovviamente) è stata dimostrata con notevole abilità da O. Ladyzhenskaya ed è esposta nel suo ottimo libro (Edizione inglese: *The mathematical theory of viscous incompressible flow* – Gordon and Breach 1963).

Un'ipotesi fondamentale è che i valori di U assegnati sulla frontiera siano tali da avere flusso nullo su *ciascuna delle componenti connesse.* Penso che valga la pena di vedere se questa ipotesi può essere tolta (lasciando ovviamente la condizione necessaria che il flusso sia nullo globalmente sulla frontiera).

[Per un aggiornamento su N.-S., si veda: J.G. Heywood *Remarks on the possible Global Regularity of Solutions of the Three-dimensional Navier-Stokes Equations* (preprint)]

2. – l teoremi di esistenza di Nash-Moser

Il prof. L. Nirenberg è da tempo amico degli analisti italiani. Io avevo preso l'abitudine di intervistarlo, in occasione delle sue visite in Italia, approfittando anche del fatto che capisce l'italiano (mentre io sono totalmente negato alle lingue straniere). La domanda rituale era: "Professore, a Suo parere, qual è stata la più rilevante novità nell'analisi, in questi ultimi tempi?". Ricordo che, in un anno che non riesco ad individuare – ma all'inizio degli "anni 60" – la sua risposta fu: "I teoremi di Nash-Moser" e si mise a descrivermi il nucleo principale di questa teoria, cosa che ora anche io cercherò di fare.

Ci sono a volte in matematica enunciati che si impongono subito per la loro intuibilità e la loro eleganza, ma non è questo il caso dei teoremi di Nash-Moser in cui l'enunciato ha tutto l'aspetto di una lunga e articolata ricetta. Per intenderci, consideriamo il problema dell'inversione locale di un'applicazione differenziabile con continuità fra due spazi di Banach:

$$F(u) = v \tag{2.1}$$

dove possiamo supporre che sia $F(0) = 0$, È noto che se l'applicazione lineare $F'(0)$ è invertibile, allora F è localmente invertibile. Abbiamo parlato di due spazi di Banach, ma la stessa invertibilità di $F'(0)$ ci dice che questi spazi sono isomorfi, e pertanto possiamo identificarli. Molti problemi classici possono essere ricondotti a questo schema; ci sono però problemi assai interessanti in cui si è costretti ad introdurre una scala di spazi di Banach X, con un parametro n che misura la regolarità (in generale, sono spazi di funzioni derivabili, in senso classico o in senso di Sobolev fino all'ordine n). Indichiamo con $|\ |_n$ la norma di X_n.

Può accadere allora che, mentre F trasforma in modo regolare X_n in X_n, la derivata prima F' sia invertibile solamente fra X_n e X_{n-r}: si ha dunque una *perdita di regolarità* di r.

Evidentemente, nessun procedimento di approssimazioni successive può reggersi con una perdita di regolarità ad ogni passo. Supponiamo ora di voler adottare il metodo di Newton, che ha la giusta fama del primato di velocità. Definiamo dunque, per risolvere la (2.l), una successione di punti u_k in questo modo:

$$\begin{aligned} & u_{k+1} = u_k + \left(F'(u_k)\right)^{-1}(v - F(u_k)) \\ & u_0 = 0, \end{aligned}$$

Con i soliti calcoli si ottiene ora:

$$|u_{k+1} - u_k|_{n-r} \leq C|u_k - u_{k-1}|_n^2$$

(con C costante).

Si ha dunque un'approssimazione molto forte, ma in una norma di ordine inferiore. L'idea di Nash è dunque quella di utilizzare una parte di questa velocità di approssimazione per regolarizzare il termine $u_{k+1} - u_k$ (o mediante una convoluzione, o troncando una serie di Fourier, o in altro modo, ...); ogni approssimazione comprende dunque un'inversione dell'applicazione lineare (calcolata però in un punto variabile u_k) e un procedimento di regolarizzazione.

Sotto ipotesi precise (che sanciscono appunto il delicato equilibrio fra velocità di convergenza e perdita di regolarità, e che non è il caso di riferire) il procedimento converge.

Nash (che è noto in Italia soprattutto per avere dimostrato il teorema di regolarizzazione delle equazioni ellittiche e paraboliche del secondo ordine simultaneamente a De Giorgi, ma con metodo diversissimo) riuscì con questo procedimento a dimostrare l'immersione isometrica di una varietà Riemanniana compatta in uno spazio R^n, con n abbastanza grande Moser impiegò il metodo, opportunamente perfezionato, per dare una nuova dimostrazione del teorema di Kolmogorov-Arnold sulla conservazione dei tori nelle perturbazioni dei sistemi Hamiltoniani integrabili e dedicò a questo argomento un importante corso tenuto a Varenna nel 1964 e pubblicato poi sugli *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa.* Ho anche il piacere di notare che questi metodi furono applicati anche da P. Rabinowitz nella sua tesi relativa alle soluzioni periodiche di equazioni di tipo iperbolico. Attraverso questa tesi, che fu pubblicata sui "*Communications*", entrammo in contatto scientifico e cominciò la nostra amicizia.

Questa vicenda dei teoremi di Nash-Moser mi pare si presti bene per scoprire come possono andare le cose nella ricerca matematica. Anche in matematica si parte spesso da un fatto che non ha una vera spiegazione: qualcosa funziona e non si sa perché: da parte mia, ho sempre visto qualcosa di magico nei teoremi di Nash-Moser. Ma che cosa vuol dire trovare un "perché" in matematica? Può voler dire trovare una teoria abbastanza generale e semplice che inglobi molti casi particolari, così che il lavoro più tecnico si trasferisce nelle proposizioni collaterali che, caso per caso, consentono di verificare che le ipotesi generali sono soddisfatte.

Chiunque si accosti ai teoremi del tipo di Nash-Moser, vedendo come giocano vari tipi di norme, ha subito il sospetto che debbano entrarci gli spazi di Fréchet. Questi spazi, direi, non hanno mai goduto troppa simpatia da parte degli analisti pratici (per così dire), per certe carenze ben note riguardanti gli aspetti non lineari: ad esempio, il calcolo differenziale per gli spazi di Fréchet non riesce bene per la differenziabilità di ordine superiore al primo. Inoltre, come risulta da vari esempi, non vale il teorema di inversione locale: la derivata prima può essere invertibile senza che l'applicazione (non lineare, ma regolare) sia localmente invertibile. In conclusione: i teoremi di Nash-Moser hanno messo in evidenza una struttura di *scala di spazi di Banach,* che è meno generale di quella di generico spazio di Fréchet, ma che ha la generalità giusta per fare tornare le cose: ad esempio, il teorema di inversione locale sussiste, con un leggero carico di ipotesi: si chiede che l'applicazione lineare tangente (cioè quella che abbiamo chiamato prima $F(u)$) sia invertibile non solo nel "centro" dell'intorno, ma in tutti i punti di questo.

Io pensai abbastanza a lungo ad un possibile inquadramento teorico dei teoremi di Nash-Moser, ma senza concludere molto: poi trovai una presentazione ben organizzata ed elegante di tutta questa teoria in un'ampia memoria di Richard Hamilton (Bulletin of the A.M.S., 7, 65-222 (1982)). Non so se da allora siano uscite altre esposizioni sistematiche: certamente la teoria di Hamilton non copre tutti i casi concreti di teoremi del tipo di Nash-Moser che sono stati scoperti; infatti in un notevole lavoro di Lojasiewicz e Zehnder (Journal of Functional Analysis **33**, 165-174 (1979)) viene considerato il caso in cui (con le notazioni adottate sopra) sia:

$$\left|(F'(u))^{-1} v\right|_n \le |v|_{\lambda n - r}$$

dove λ è una costante minore di 2. Dunque, in questo caso (e con ulteriori ipotesi che sarebbe troppo complicato riferire) si ammette una perdita di regolarità crescente linearmente con n.

A questo punto, devo confessare che non ho più seguito l'andamento di questi problemi: in particolare, non so se sia stata costruita una teoria più ampia, tale da inglobare il risultato citato di L.-Z.

3. – Un problema di geofisica

Ritorniamo alla fluidodinamica, ma con un diverso spirito. Consideriamo una massa fluida di densità variabile, non omogenea, incomprimibile, che occupa una cavità.

In condizioni di elevata viscosità il moto sarà molto lento, così che non vi saranno problemi di unicità e di regolarità del tipo di quelli visti prima per il sistema di Navier-Stokes: per fissare le idee, pensiamo al caso di due fluidi non miscibili: questo è anche il caso che interessa in concreto in geologia: il caso di una massa salina ricoperta da materiali sedimentari più pesanti, che tende a risalire al di sopra di questi. Mi sono proposto – già da più di una decina di anni – di dimostrare ciò che a ciascuno appare naturale, cioè che, in generale, al tendere del tempo a $+\infty$ la configurazione tende a quella per cui il fluido più pesante occupa la parte inferiore, e quello più leggero la parte superiore, a strati orizzontali di uguale densità.

Come modello matematico prendiamo, in un aperto Ω abbastanza regolare, il sistema:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla p = \nu \Delta U - K\rho \qquad (K = (0,0,1)) \\
&\nabla \cdot U = 0 \\
&\frac{\partial \rho}{\partial t} + U \cdot \nabla p = 0
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

Qui U indica una campo vettoriale (la velocità del fluido) nullo sulla frontiera, ρ indica la densità. Le condizioni iniziali sono: $U(0) = U_0$; $\rho(0) = \rho_0$, essendo ρ_0 una funzione misurabile con i valori compresi fra due costanti positive. Trattandosi di un moto lentissimo, il famigerato termine quadratico, responsabile di tutte le malefatte del sistema di Navier-Stokes, non compare; inoltre si tiene conto della diversa densità del fluido dal punto di vista del peso, ma non dal punto di vista inerziale. Nella fluidodinamica questo è noto come modello di Boussinesq.

Questo stesso modello viene applicato di solito anche per il ben noto problema di Bénard, che riguarda i moti convettivi che si verificano in un fluido, quando viene scaldata la parte inferiore, così che essa, per dilatazione termica, diventa più leggera di quella superiore. C'è analogia fra i due problemi, ma ci sono anche forti diversità: nel caso del fluido di Bénard la seconda grandezza è la temperatura, che subisce un processo di diffusione, mentre nel nostro caso la densità ρ si mantiene costante lungo le linee di corrente, come vuole esprimere la terza equazione del sistema (3.1); infatti, come abbiamo detto, nel caso più comune, si suppone che i fluidi diversi non siano miscibili. Questa terza equazione deve essere intesa in senso generalizzato perché nel nostro caso ρ può essere discontinua e pertanto $\nabla\rho$ non potrebbe avere senso. Una formulazione valida nelle nostre ipotesi è ottenibile scrivendo dapprima le equazioni differenziali delle linee di corrente:

$$\frac{dX}{dt} = U(X,t) \tag{3.2}$$

Indicando allora con

$$t \to \Psi(\tau, t, X) \tag{3.3}$$

la soluzione della (3.2) tale che $\Psi(\tau, \tau, X) = X$, si ha la terza equazione nella forma:

$$\rho(X,t) = \rho_0(\Psi(0,t,X)) \tag{3.4}$$

Tralasciamo di mostrare come nel nostro caso la U ha proprietà tali che, per ogni coppia di numeri reali t, τ, l'applicazione

$$X \to \Psi(\tau, t, X) \tag{3.5}$$

è un omeomorfismo di Ω in sé che conserva l'ordinaria misura.

Il sistema (3.1), in opportuni spazi funzionali ha una ed una sola soluzione in $[0, +\infty)$ e vale la relazione dell'energia

$$\frac{1}{2}|U(t)|^2 + \nu \int_0^t \|U(\tau)\|^2 \, d\tau + \int_\Omega \rho(X,t)x_3 \, dX = \frac{1}{2}|U(0)|^2 + \int_\Omega \rho_0(X)x_3 \, dX \tag{3.6}$$

Evidentemente, il primo termine a primo membro esprime l'energia cinetica al tempo t, il terzo l'energia potenziale, mentre il secondo esprime l'energia che è complessivamente andata perduta nell'intervallo temporale $[0,t]$ per la dissipazione dovuta alla viscosità.

Da questa relazione si ricava facilmente che

$$\int_0^\infty \|U(\tau)\|^2 \, d\tau < +\infty; \qquad \lim_{t \to +\infty} |U(t)| = 0 \tag{3.7}$$

Di conseguenza anche l'energia potenziale $\int_\Omega \rho(X,t)x_3 \, dX$ tende ad un limite finito per $t \to +\infty$.

Si tratta ora di provare che per $t \to +\infty$ l'omeomorfismo $X \to \Psi(0,t,X)$ tende ad un quasi-omeomorfismo limite (chiamiamolo così!): ma, anzitutto, si vede facilmente che, proprio per i risultati che ci possiamo attendere, sarebbe troppo restrittiva una convergenza nella metrica uniforme. Una metrica adeguata può essere quella di L^1: si trova infatti, con calcoli abbastanza complessi, la maggiorazione:

$$\int_\Omega |\Psi(0,t'',X) - \Psi(0,t',X)|\, dX \leq \int_{t'}^{t''}\int_\Omega |U(X,t)|\, dXdt \tag{3.8}$$

Per dimostrare la convergenza dell'omeomorfismo in L^1 sembra naturale perciò passare attraverso una maggiorazione del tipo

$$\int_0^\infty |U(\tau)|_{L^1}\, d\tau < +\infty \tag{3.9}$$

Ma noi, in virtù della (3.6), disponiamo solo di limitazioni per i quadrati della norma $\|U(\tau)\|$ e perciò anche della norma $|U(\tau)|_{L^1}$. Questa è la grossa difficoltà che si incontra. Ci si può chiedere come ci si comporta nel caso del sistema di Navier- Stokes, quando si affronta il problema del decadimento delle soluzioni: effettivamente, questo punto è lasciato generalmente in ombra: ci si accontenta di solito di dimostrare che $U(t)$ tende a zero in una certa norma, senza tenere presente che questa condizione può essere compatibile con il fatto che non esiste il limite di $X(t)$. In termini intuitivi: il moto di una particella del fluido, anche se rallentato, potrebbe continuare indefinitamente. La condizione naturale per ottenere un omeomorfismo-limite (cioè perché tutte le particelle del fluido tendano a una configurazione-limite) è la (3.10): essa vale certamente nei casi in cui si può provare che il fluido decade esponenzialmente. Nel nostro caso, tuttavia, questo è certamente falso. Vediamo perché.

Cominciamo col chiederci qual è la struttura dell'insieme S delle soluzioni stazionarie (in ogni sistema dinamico è importante studiare l'insieme dei punti singolari). Nel nostro caso, si tratta dei punti (U,ρ), con $U=0$, $\rho(X) = h(x_3)$: in altre parole, il fluido è fermo ed è disposto secondo strati orizzontali di densità costante. (Qui, per evitare complicazioni, possiamo assumere come ipotesi ulteriore che il dominio Ω sia convesso). Intuitivamente, la configurazione stabile è quella per cui la densità decresce verso l'alto, cioè h è una funzione non crescente. Indichiamo con h^* questa funzione non crescente, che risulta univocamente determinata. Consideriamo due diverse configurazioni del fluido stazionario S, caratterizzate dalle funzioni di densità $h_1(x_3)$, $h_2(x_3)$ rispettivamente. Indicando con $a(x_3)$ l'area di una sezione "orizzontale" di Ω a quota x_3, la conservazione del fluido e la sua nonmiscibilità pongono il seguente vincolo fra le funzioni h_1, h_2:

per ogni coppia di numeri reali positivi α, β (con $\alpha \leq \beta$) *sia*:

$$\int_{h_1^{-1}(\alpha)}^{h_1^{-1}(\beta)} a(x_3)\, dx_3 = \int_{h_2^{-1}(\alpha)}^{h_2^{-1}(\beta)} a(x_3)\, dx_3 \tag{3.10}$$

Allora è facile vedere che in un qualsiasi intorno di una configurazione stazionaria vi è un'altra configurazione stazionaria. Dunque le soluzioni stazionarie non sono isolate e pertanto non possono, individualmente, funzionare da attrattori.

A questo punto, entriamo nel campo delle congetture, più o meno plausibili, che elenchiamo.

Problema 3.a) L'insieme S delle configurazioni stazionarie funziona da attrattore nello spazio delle configurazioni dotato della norma L^1 ?

Problema 3b) Supponiamo che per una soluzione $t \to (U(t), \rho(t))$ per $t \to +\infty$ l'energia potenziale $\int_\Omega \rho(X,t) x_3\, dX$ converga verso l'energia potenziale minima

$$\int_\Omega \rho^*(X) x_3\, dX = \int_c^d h^*(x_3) a(x_3)\, dx_3$$

(avendo indicato con c, d la quota minima e massima (rispettivamente) di $\overline{\Omega}$.)

Sembra naturale, in questo caso, affermare che la configurazione del fluido converga, sempre nella metrica di L^1, verso la configurazione di energia potenziale minima.

Problema. 3.c) La nostra attesa è che, in pratica, il fluido converga *sempre* verso la configurazione di energia potenziale minima. Tuttavia questo è certamente falso, dal momento che esiste un intera varietà S di soluzioni stazionarie. Allora una congettura ragionevole è che, tutte le soluzioni, con eccezione di quelle i cui valori iniziali (U_0, ρ_0) appartengono ad un insieme di prima categoria, al tendere di t a $+\infty$, tendono verso $(0, \rho^*)$ in $\mathbf{L}^2(\Omega) \times \mathbf{L}^1(\Omega)$.

4. – Fra informatica e probabilità

Ho esitato un poco ad inserire fra i miei problemi le questioni di cui ora dirò, che stanno a mezza strada fra l'informatica e la probabilità, campi entrambi in cui ho una preparazione da principiante. Ma, anche su questo tema, ho accumulato con gli anni una corposa cartella di fogli ingialliti e di fotocopie, che attesta un certo impiego (o un certo sciupio) di tempo; e soprattutto confesserò che, negli ultimi venti anni, i risultati matematici più entusiasmanti che ho appreso provengono tutti da quel settore misto. Ne citerò due.

Il primo è il "test di primalità" di Rabin. Come si sa, decidere se un intero abbastanza grande è primo è una questione che esige un calcolo molto complesso. Ma la complessità diminuisce fortemente se ci si accontenta di arrivare a concludere che il numero è molto probabilmente primo. Il procedimento di Rabin è basato su un'ingegnosa applicazione del piccolo teorema di Fermat e su una successione di estrazioni casuali (che fanno molto riflettere sul significato della probabilità).

Ed ecco il problema – in forma necessariamente un po' vaga – che mi sono posto in questo campo, e che giro rapidamente agli esperti della complessità (a Pisa ne abbiamo di eccellenti):

Problema a): *Quali sono gli algoritmi che ammettono un "algoritmo semplificato" (cioè un algoritmo di complessità assai minore) che sia in grado di dare la risposta esatta con elevata probabilità.*

Il problema può avere risposte diverse secondo il tipo di complessità a cui ci si riferisce: può anche darsi che esista un tipo di complessità che, da questo punto di vista, è irriducibile. Se il test di Rabin non è un caso isolato, la Natura deve avere approfittato fortemente degli algoritmi semplificati, dato il grande vantaggio selettivo che essi offrono.

Il secondo risultato che mi ha impressionato è la definizione di sequenza aleatoria data da Kolmogorov e Chaitin. Devo a Francesco Romani la segnalazione di questa definizione fattami tanti anni fa, in occasione di un ciclo di seminari che egli svolse per il nostro nucleo di ricerca didattica. Questa definizione è così semplice e profonda che vale la pena di esporla sia pure in modo un po' informale. Partiamo dall'idea intuitiva di sequenza di tipo opposto a quella che consideriamo aleatoria, cioè di una sequenza costruita con una legge abbastanza evidente. Può trattarsi di una legge di periodicità, come per la successione

123123123123 ....

oppure di un legge un po' più riposta (Molti test costruiti per misurare il quoziente di intelligenza richiedono che si indovini la legge, più o meno riposta, che genera una sequenza assegnata). Una volta scoperta la legge, basta un programma di poche istruzioni per riprodurre la sequenza con un calcolatore. *Ebbene, si dirà aleatoria (o casuale) secondo Kolmogorv-Chaitin una successione che non può essere costruita dal calcolatore con un programma che sia più breve della successione stessa.*

È interessante vedere come da questa definizione si possano ricavare proprietà importanti quali, ad esempio, la validità delle "legge dei grandi numeri".

Ciò detto, veniamo ai programmi "random" dei calcolatori, che hanno lo scopo di fornirci sequenze aleatorie: ma si tratta di sequenze tutt'altro che aleatorie nel senso di Kolmogorov-Chaitin, anzi il fatto più scandaloso è, che esse, per ovvie ragioni di velocità, sono costruite con programmi molto brevi. È chiaro che queste successioni in casi maligni si comportano male, ma nella grande maggioranza dei casi vanno molto bene. Ecco allora il secondo problema, anch'esso esposto in forma necessariamente vaga:

Problema b): *Come spiegare il generale successo delle sequenze pseudo-aleatorie?*

Su questo problema ho chiesto informazioni a tutti gli esperti che ho incontrato, ma senza risultato. Francamente. mi pare impossibile che, con l'attuale diffusione dei metodi di simulazione, su questo punto si sia rimasti fermi al celebre trattato del Knuth, in cui le successioni pseudo-aleatorie sono studiate solo da un punto di vista empirico-statistico.

Conclusioni. Queste riflessioni sui miei problemi sono state fatte, come dicevo, per un desiderio di apertura di animo verso voi che mi siete così amici. Nello stesso tempo, mi sono state utili per fare un bilancio della mia attività passata, anche se è un po' tardi per cambiare rotta. Ho preso atto che, nel mio lavoro matematico, sono stato piuttosto velleitario: in molti casi ho finito per concludere abbastanza poco L'altra faccia di questo mio difetto è stata però la persistenza del mio entusiasmo per la matematica e il vivo senso di amicizia che ho per tutti quelli che condividono con me questo entusiasmo, in qualsiasi posizione scolastica o accademica essi si trovino. Ringrazio Dio di avermi dato questa gioia del fare matematica e Gli chiedo di poterne fare ancora un po'. L'astuzia raffinata potrebbe essere di chiederGli il tempo per risolvere i problemi che ho elencato. Ma allora credo davvero che camperei troppo.

Pisa, 12 dicembre 1995