La Matematica nella Società e nella Cultura

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Gabriella Zecca

Sulla L^p-risolubilità del problema di Dirichlet e sue generalizzazioni in spazi di Orlicz

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **4** (2011), n.1 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 91–94.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2011_1_4_1_91_0>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2011.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. IV, Aprile 2011, 91-94

Sulla L^p-risolubilità del problema di Dirichlet e sue generalizzazioni in spazi di Orlicz

GABRIELLA ZECCA

Sia $\mathbb{B}$ la palla unitaria di $\mathbb{R}^n$. Per $K \geqslant 1$ denoteremo con $\mathcal{E}(K)$ la classe dei campi matriciali simmetrici $A(x) \in L^\infty(\mathbb{B}, R^{n\times n})$ che soddisfano la condizione di uniforme ellitticità,

$$\frac{|\xi|^2}{K} \leqslant \langle A(x)\xi, \xi\rangle \leqslant K|\xi|^2 \tag{1}$$

per q.o. $x \in \mathbb{B}$ e per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$. In questa tesi si studia problema di valori al contorno di Dirichlet:

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = 0 & \text{in } \mathbb{B} \\ u_{|_{\partial D}} = f \end{cases} \tag{2}$$

dove $\mathcal{L} = \operatorname{div}(A(x)\nabla)$ è un operatore lineare la cui matrice dei coefficienti $A(x)$ appartiene ad $\mathcal{E}(K)$. Per $1 < p < \infty$, il problema (2) si dice L^p*-risolubile*, e l'operatore $\mathcal{L}$ si dice L^p*-risolutivo*, se esiste una costante $C_p > 0$ per la quale valga la seguente proprietà: Per ogni $f \in C(\partial\mathbb{B})$ esiste un'unica *soluzione generalizzata* $u \in W^{1,2}_{loc}(\mathbb{B}) \cap C(\bar{\mathbb{B}})$ di (2) che soddisfa la stima uniforme:

$$\|Nu\|_{L^p(\partial\mathbb{B})} \leq C_p \|f\|_{L^p(\partial\mathbb{B})} \tag{3}$$

dove Nu denota la *funzione massimale non tangenziale* $Nu(Q) = \sup_{X\in\Gamma(Q)} |u(X)|$ e $\Gamma(Q)$ è la cosiddetta *regione di avvicinamento non tangenziale* con vertice in $Q \in \partial\mathbb{B}$.

La nozione di L^p-risolubilità fu introdotta da B. E. J. Dahlberg alla fine degli anni '70 con lo studio della L^2-risolubilità per funzioni armoniche in domini Lipschitziani (cfr. [Dahlberg, B. E. J., Arch. Rational Mech. Anal., 1977], [Dahlberg, B. E. J., Studia Math., 1979]) e in tale ambito vi sono stati poi numerosi risultati dovuti a L. Caffarelli, E. Fabes, R. Fefferman, C. Kenig, J.Pipher, C. Rios, Z. Shen, e altri.

La proprietà di risolubilità per un'operatore del nostro tipo è profondamente legata alla natura di uno strumento chiave della teoria ossia di quella che chiameremo "misura quasiarmonica" associata a $\mathcal{L}$, calcolata nel centro della palla $\mathbb{B}$. La misura quasiarmonica è quell'unica (cfr. [2]) misura di probabilità regolare positiva di Borel $\omega_{\mathcal{L}}$ su $\partial\mathbb{B}$ tale che per u ed f come in (2), $f \in C(\partial\mathbb{B})$, vale la rappresentazione

$$u(0) = \int_{\partial\mathbb{B}} f(\sigma)\, d\omega_{\mathcal{L}}(\sigma).$$

Ebbene, è nota la seguente caratterizzazione

TEOREMA 1 [2]. – *Le seguenti condizioni sono equivalenti* ($\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$)*:*

i) *Il problema* (2) *è* L^p*-risolubile con la constante* C_p *di* (3);

ii) *La misura quasiarmonica* $\omega_{\mathcal{L}}$ *appartiene alla classe di Gehring* $B_q(d\sigma)$*, i.e.* $\omega_{\mathcal{L}}$ *è assolutamente continua rispetto alla misura di superfice* σ *su* $\partial\mathbb{B}$*, e la derivata di Radon-Nikodym* $k=\frac{d\omega_{\mathcal{L}}}{d\sigma}$ *verifica*

$$B_q(\omega_{\mathcal{L}}) \sup_{\varDelta\subset\partial\mathbb{B}} \left[\frac{\left(\frac{1}{\sigma(\varDelta)}\int\limits_{\varDelta} k^q d\sigma\right)^{\frac{1}{q}}}{\frac{1}{\sigma(\varDelta)}\int\limits_{\varDelta} k d\sigma}\right]^p < \infty, \tag{4}$$

dove l'estremo superiore è fatto al variare delle 'calotte sferiche' $\varDelta\subset\partial\mathbb{B}$*.*

Inoltre, vi è una corrispondenza fra le costanti C_p *e* $B_q(\omega_{\mathcal{L}})$*.*

Uno degli obiettivi della tesi è quello di indagare sulla proprietà di *self improvement* per la risolubilità del problema (2). È noto infatti che la L^p-risolubilità di (2) garantisce la $L^{p-\varepsilon}$-risolubilità di (2) per ε positivo *abbastanza piccolo*. Grazie al Teorema 1, ottenendo risultati ottimali per la proprietà di *self improvement* delle classi di Gehring B_q ($\omega\in B_q \Rightarrow \omega\in B_{q+\varepsilon}$) siamo in grado di rispondere (cfr. [3]) alla analoga questione sulla L^p-risolubilità determinando l'*upper bound* ottimale per ε in termini della costante B_q di $\omega_{\mathcal{L}}$. Per brevità riportiamo qui solo un caso particolare del risultato ottenuto (cfr. Teorema 5.4.1 della tesi).

COROLLARIO 1 [3]. – *Supponiamo che l'operatore* $\mathcal{L}=\operatorname{div}(A\nabla)$ *sia* L^2*-risolutivo, e sia* $BB_2(\omega_{\mathcal{L}})$*. Allora* $\mathcal{L}$ *è anche* L^r*-risolutivo, non appena*

$$r > 1+\sqrt{\frac{B-1}{B}}.$$

Tale limitazione dal basso per r in termini di B è la migliore possibile.

È opportuno osservare che nel caso in cui sia $\mathcal{L}=\varDelta$, l'operatore di Laplace, si ha $\omega_{\mathcal{L}}=\frac{1}{2\pi}d\sigma$ e perciò $B=1$. Dunque il precedente risultato ri-ottiene la nota proprietà (cfr. ad esempio [R. Fefferman, J. Funct. Anal., 1993]) che il Laplaciano "tende" ad avere il suo problema di Dirichlet L^p-risolubile nell'intero range $1\leqslant p<\infty$.

Denotiamo con $\mathcal{E}_1(K)$ la sottoclasse di $\mathcal{E}(K)$ delle funzioni matriciali con determinante unitario q.o. in $\mathbb{B}$ e notiamo che la restrizione $\mathcal{A}\in\mathcal{E}_1(K)$ non lede la generalità in quanto se $u\in W^{1,2}_{loc}$ risolve l'equazione $\operatorname{div}(A(x)\nabla u)=0$ in $\mathbb{B}$ per una qualche $A\in\mathcal{E}(K)$ allora è possibile determinare (cfr. [T. Iwaniec, C. Sbordone, Ann. Inst. Poincaré Anal. Non Linéaire, 2001]) una *correzione* $\mathcal{A}\in\mathcal{E}_1(K)$ per la quale risulti $\operatorname{div}(\mathcal{A}\nabla u)=0$ in $\mathbb{B}$.

Detti $\mathcal{L}_0=\operatorname{div}(A_0\nabla)$ ed $\mathcal{L}_1=\operatorname{div}(A_1\nabla)$ due operatori (ellittici) con $A_i\in\mathcal{E}(K)$, supponiamo di sapere che il problema di Dirichlet sia risolubile per il primo operatore $\mathcal{L}_0$. È naturale chiedersi se vi siano delle condizioni sufficienti affinchè anche il secondo operatore abbia il suo problema di Dirichlet risolubile. Ad esempio, consideriamo i due operatori $\mathcal{L}_0 = \Delta$ ed $\mathcal{L}_1 = \text{div}\,(\mathcal{A}_1\nabla\,)$ con $\mathcal{A}_1 \in \mathcal{E}_\infty(\mathcal{K})$. È ben noto che $\mathcal{L}_0$ è L^2- risolutivo (cfr. [2]) e vi sono numerosi risultati interessanti atti a garantire che $\mathcal{L}_1$ sia L^q- risolutivo, molti dei quali richiedono che i coefficienti di $\mathcal{L}_1$ siano *uniformemente vicini* a quelli di Δ (i.e. δ_{ij}) quando ci si avvicina alla frontiera di $\mathbb{B}$ (cfr. ad esempio [R. Fefferman, C. Kenig, J. Pipher, Annals of Math., 1991]).

In questa tesi, almeno nel caso $n = 2$, si presenta un diverso punto di vista: un operatore ellittico è pensato come una perturbazione del Laplaciano mediante un opportuno cambiamanto di variabili. In effetti, *tutte* le matrici della classe $\mathcal{E}_1(K)$, per $n = 2$, sono generate da un *pull-back* del Laplaciano attraverso applicazioni K-quasiconformi. Più precisamente, sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F = (\alpha, \beta)$ un'applicazione K-*quasiconforme*. Supponiamo $F(\mathbb{B}) = \mathbb{B}$ e $F(\partial\mathbb{B}) = \partial\mathbb{B}$. Se u soddisfa $\Delta u = 0$, allora $v = u \circ F$ è una soluzione di $\mathcal{L}v = \text{div}\,(\mathcal{A}\nabla v) = 0$ dove $\mathcal{A} = \mathcal{A}(x_1, x_2)$ è data da

$$\mathcal{A} = \frac{1}{J_F}\begin{pmatrix} \beta_{x_1}^2 + \beta_{x_2}^2 & -\alpha_{x_1}\beta_{x_1} - \alpha_{x_2}\beta_{x_2} \\ -\alpha_{x_1}\beta_{x_1} - \alpha_{x_2}\beta_{x_2} & \alpha_{x_1}^2 + \alpha_{x_2}^2 \end{pmatrix} \tag{5}$$

dove $J_F(x)$ denota il determinante Jacobiano di F e $\mathcal{A}$ verifica (1), (cfr. [T. Iwaniec, C. Sbordone, Ann. Inst. Poincaré Anal. Non Linéaire, 2001]. Dunque, $\mathcal{L} = \Delta_F$ è il *pull-back* mediante F del Laplaciano ed $\mathcal{A}$ appartiene alla classe $\mathcal{E}_1(K)$.

Si ottiene il seguente risultato:

TEOREMA 2 [3]. – *Sia $F : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ un' applicazione K- quasiconforme. Allora, $\mathcal{L}_0 = \Delta_F$ è risolutivo se e solo se $\mathcal{L}_1 = \Delta_{F^{-1}}$ è risolutivo.*

Inoltre, se $\mathcal{L}_0$ è L^p- risolutivo e $B = B_q(\omega_{\mathcal{L}_0})$, detta $x \in (0,1)$ l'unica soluzione dell'equazione $(1 - x/p)^p = B(1 - x)$ si ha che $\mathcal{L}_1$ è L^r- risolutivo, per ogni $r > \frac{p-x}{p(1-x)}$. Il risultato è ottimale.

Notiamo che per gli operatori considerati parlare di "distanza" fra i coefficienti perde completamente di significato in quanto evidentemente i domini di definizione di $\mathcal{L}_0 = \Delta_F$ ed $\mathcal{L}_1 = \Delta_{F^{-1}}$ sono $\mathbb{B}$ ed $F(\mathbb{B})$ rispettivamente. D'altra parte, anche mediante composizione con la piu' naturale applicazione F, la matrice dei coefficienti $\mathcal{A}_1 \circ F$ non risulta necessariamente vicina a $\mathcal{A}_0$ secondo alcuna distanza naturale fra i coefficienti (cfr Esempio 5.2.1 della tesi).

Come corollario del Teorema 2 precedente si ottiene il seguente

COROLLARIO 2. – *Sia $F : \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ un'applicazione K-quasiconforme e siano $\mathcal{L}_0 = \Delta_F$ e $\mathcal{L}_1 = \Delta_{F^{-1}}$. Inoltre supponiamo che $\mathcal{L}_0$ sia L^2-risolutivo. Se risulta $B = B_2(\omega_{\mathcal{L}_0}) < \frac{4}{3}$, allora $\mathcal{L}_1$ è L^2-risolutivo.*

Il vantaggio di utilizzare la teoria delle applicazioni quasiconformi nel piano risiede principalmente nel fatto che per un operatore $\mathcal{L}$ della classe considerata siamo in grado di determinare esattamente la forma della misura quasiarmonica $\omega_{\mathcal{L}}$, come non è possibile fare in generale. Infatti, per i nostri operatori essa è "equivalente" alla misura derivata distribuzionale dh, dove $h : \partial\mathbb{B} \to \partial\mathbb{B}$ è l'omeomorfismo che conserva l'orientamento su $\partial\mathbb{B}$ indotto da F, i.e. $h(z) = F|_{\partial B}(z)$.

In tale contesto si considerano poi successioni di operatori $\mathcal{L}_j = \mathrm{div}\,(\mathcal{A}_j\nabla)$ con $\mathcal{A}_j \in \mathcal{E}_1(K)$. Si formula una condizione necessaria e sufficiente affinchè la successione delle misure quasiarmoniche $\omega_{\mathcal{L}_j}$ converga debolmente a $\omega_{\mathcal{L}}$ per qualche $\mathcal{L} = \mathrm{div}\,(\mathcal{A}\nabla)$, $\mathcal{A} \in \mathcal{E}_1(K)$. Tale condizione è espressa in termini di G- convergenza, se le $\mathcal{A}_j$ sono in una certa sottoclasse di $\mathcal{E}_1(K)$. Qui la G- convergenza è intesa nel senso di De Giorgi e Spagnolo (cfr. [E. De Giorgi, S. Spagnolo, Boll. U.M.I., 1973]).

In dimensione n qualsiasi ci si è poi occupati di approfondire la teoria della risolubilità del Problema (2) nell'ambito degli spazi funzionali di *Orlicz* L^{Φ}. La nozione di L^{Φ} risolubilità estende in maniera naturale quella di L^p risolubilità. Un primo risultato in tal senso riguarda il caso dello spazio di Zygmund $L(\lg L)^{\alpha}$ (cfr. [4]). Si è mostrato, mediante un controesempio, come, per il Laplaciano e almeno nel caso in cui $0 \leqslant \alpha < 1$, non sia possibile la $L(\lg L)^{\alpha}$- risolubilità del problema (2), nel senso che non è possibile in tal caso maggiorare uniformemente la norma L^1 della soluzione mediante la sola norma $L(\lg L)^{\alpha}$ del dato al bordo f. Successivamente nel lavoro [5] si è ottenuto una condizione necessaria e sufficiente connessa alla misura quasiarmonica $\omega_{\mathcal{L}}$ affinchè il Problema (2) sia L^{Φ}-risolubile, dove Φ è una funzione di Young che soddisfa, con la sua funzione di Young complementare, la condizione Δ_2. La suddetta condizione di L^{Φ}-risolubilità, quando sia $\Phi(t) = t^p$ restituisce la già nota condizione (Teorema 1) per la L^p- risolubilità di (2).

Infine, a partire dai risultati contenuti in [Kenig, C. E., Pipher, J., Invent. Math., 1993] si studia il problema di Neumann in tale contesto. Si dimostra (cfr. [1]) che per particolari operatori nel piano la L^{Φ}-risolubilità del problema di Neumann garantisce la L^{Θ}-risolubilità del problema di Dirichlet, dove Φ e Θ sono funzioni di Young opportunamente collegate attraverso i rispettivi *indici di Boyd*.

BIBLIOGRAFIA

[1] Corporente R. e Zecca G., *Neumann and Dirichlet problems with Orlicz data in the plane*, Preprint n. 25 del Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R. Caccioppoli"dell' Università degli Studi di Napoli "Federico II" (2009).

[2] Kenig C. E., *Harmonic Analysis Techniques for Second Order Elliptic Boundary Value Problems*, C.B.M.S. Amer. Math. Soc., **83** (1991).

[3] Sbordone C., Zecca G., *The L^p-solvability of the Dirichlet problem for planar elliptic equations, sharp results*, Journal of Fourier Analysis and Applications, **15** (2009), 871-903.

[4] Zecca G., *The unsolvability of the Dirichlet problem with $L(\lg L)^{\alpha}$ boundary data*, Rend. Acc. Sc. Fis. Mat. Napoli, **72** (2005), 71-80.

[5] Zecca G., *On the Dirichlet problem with Orlicz boundary data*, Boll. Unione Mat. Ital. Sez. B Artic. Ric. Mat., **10** (2007), 661-679.

Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R. Caccioppoli"
Università di Napoli "Federico II"
e-mail: g.zecca@unina.it
Dottorato in Scienze Matematiche
con sede presso l'Università di Napoli "Federico II" – Ciclo XX
Direttore di Ricerca: Prof. C. Sbordone Università di Napoli "Federico II"