La Matematica nella Società e nella Cultura

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Caterina Stoppato

Funzioni regolari di una variabile quaternionica

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **4** (2011), n.1 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 87–90.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2011_1_4_1_87_0>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2011.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. IV, Aprile 2011, 87-90

Funzioni regolari di una variabile quaternionica

CATERINA STOPPATO

1. – Introduzione alla teoria delle funzioni regolari

Sia $\mathbb{H}$ l'algebra reale dei quaternioni, ovvero lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ su cui si costruisce una moltiplicazione denotando la base standard con $1, i, j, k$, definendo

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1,$$
$$ij = -ji = k, jk = -kj = i, ki = -ik = j,$$

imponendo che 1 sia l'elemento neutro ed estendendo la definizione a tutti i quaternioni $q = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k \in \mathbb{H}$ per linearità e distributività.

Dal principio dello scorso secolo si sono susseguiti vari tentativi di sviluppare una teoria delle funzioni di variabile quaternionica ispirata alla teoria delle funzioni olomorfe di una variabile complessa. Infatti le varie definizioni equivalenti di olomorfia presentano analoghi nel caso quaternionico tra loro non equivalenti. Ad esempio chiedere che una funzione $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ sia *differenziabile a sinistra*, ossia chiedere che per $h \in \mathbb{H}$,

$$\lim_{h \to 0} h^{-1}[f(q+h) - f(q)]$$

esista per ciascun $q \in \mathbb{H}$, equivale a chiedere che $f(q) = qa + b$ per qualche $a, b \in \mathbb{H}$. D'altra parte, l'*analiticità*, ossia l'esistenza in ogni q_0 di sviluppi in serie

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} P_n(q - q_0)$$

dove $P_n(q)$ è somma finita di monomi di grado n del tipo $a_0 q a_1 \dots a_{n-1} q a_n$, è una nozione troppo debole per costituire un valido analogo dell'olomorfia complessa. Infatti x_0, x_1, x_2, x_3 ammettono espressioni polinomiali in q (ad esempio $x_0 = \frac{1}{4}(q - iqi - jqj - kqk)$), dunque questa nozione di analiticità risulta equivalente all'analiticità nelle quattro variabili reali x_0, x_1, x_2, x_3. A questo punto è naturale studiare gli analoghi delle equazioni di Cauchy-Riemann. Il più celebre approccio si deve a Fueter che studiò, a partire dal 1935, le funzioni di variabile quaternionica (a valori quaternioni) che risolvono l'operatore

$$\frac{\partial}{\partial \bar{q}} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x_0} + i\frac{\partial}{\partial x_1} + j\frac{\partial}{\partial x_2} + k\frac{\partial}{\partial x_3}\right).$$

Le principali proprietà di queste funzioni, come gli analoghi del teorema e della formula integrale di Cauchy, sono ben descritte in un lavoro di Sudbery del 1979. Negli anni la teoria si è sviluppata ed è stata generalizzata in varie direzioni: si vedano in tal senso il volume di Colombo, Sabadini, Sommen e Struppa del 2004, nonché i riferimenti bibliografici là contenuti. Alcune caratteristiche della classe di funzioni studiate da Fueter hanno tuttavia mantenuto vivo l'interesse verso possibili definizioni alternative: si noti, ad esempio, che tale classe non include la funzione identità su $\mathbb{H}$ né le più naturali funzioni polinomiali. Queste ultime sono incluse nell'insieme delle *funzioni olomorfe quaternioniche*, definite dallo stesso Fueter nel 1934 come le soluzioni di $\frac{\partial}{\partial \bar{q}} \Delta f(q) = 0$ (dove Δ denota il laplaciano in x_0, x_1, x_2, x_3) e riprese più di recente da Laville e Ramadanoff. Si noti tutta via che tale insieme è piuttosto ampio: include tutte le funzioni armoniche nelle quattro variabili reali x_0, x_1, x_2, x_3.

Per simili motivazioni Cullen propose nel 1965 un'altra definizione, ripresa da Gentili e Struppa in [5] nei termini seguenti. Detta $\mathbb{S} = \{q \in \mathbb{H} : q^2 = -1\}$ la 2-sfera delle *unità immaginarie*, si ha che

$$\mathbb{H} = \bigcup_{I \in \mathbb{S}} (\mathbb{R} + I\mathbb{R})$$

dove ciascuna sottoalgebra $\mathbb{R} + I\mathbb{R} \subset \mathbb{H}$ è isomorfa al campo complesso $\mathbb{C}$ e l'intersezione $\bigcap_{I \in \mathbb{S}} (\mathbb{R} + I\mathbb{R})$ è l'asse reale $\mathbb{R}$.

DEFINIZIONE 1. – *Sia Ω un dominio di $\mathbb{H}$ e sia $f : \Omega \to \mathbb{H}$ una funzione. Per ogni $I \in \mathbb{S}$, denotiamo con f_I la restrizione di f a $\Omega_I = \Omega \cap (\mathbb{R} + I\mathbb{R})$. La funzione f si dice* regolare *se ciascuna restrizione f_I è olomorfa in Ω_I, ossia se per ogni $I \in \mathbb{S}$ si ha*

$$\bar{\partial}_I f(x + Iy) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + I \frac{\partial}{\partial y}\right) f_I(x + Iy) = 0$$

per $x, y \in \mathbb{R}$ tali che $x + Iy \in \Omega_I$.

La classe delle funzioni regolari include l'identità $id(q) = q$, nonché i polinomi e le serie di potenze del tipo

$$f(q) = \sum_{n \in \mathbb{N}} q^n a_n$$

con $a_n \in \mathbb{H}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Viceversa, una funzione regolare su una palla euclidea centrata in 0

$$B(0, R) = \{q \in \mathbb{H} : |q| < R\}$$

si sviluppa in una serie di potenze del tipo visto sopra. Grazie a tali proprietà, in [5] si sono ottenuti per le funzioni regolari su $B(0, R)$ gli analoghi dei risultati di base nella teoria delle funzioni olomorfe di variabile complessa. Sullo stesso caso della palla $B(0, R)$ si sono concentrati i primi lavori successivi, per i quali si rimanda a [4] ed alla bibliografia là indicata.

Il recente [1] ha poi rappresentato una svolta nella teoria, individuando una classe di domini più ampia su cui lo studio delle funzioni regolari è interessante e non si limita alle serie di potenze. Tali domini, detti *s-domini*, sono quelli che intersecano l'asse reale $\mathbb{R}$ e che hanno intersezione connessa con ciascuna retta complessa $\mathbb{R} + I\mathbb{R}$. Sugli s-domini vale un principio di identità, ed ogni funzione regolare su un s-dominio Ω si estende in modo unico ad una funzione regolare su

$$\widetilde{\Omega} = \bigcup_{x+Iy \in \Omega} (x + y\mathbb{S}),$$

ossia sul più piccolo s-dominio che contiene Ω ed è *simmetrico* rispetto all'asse reale. In questo senso, gli s-domini simmetrici sono gli analoghi quaternionici dei domini d'olomorfia complessi. Allo stesso tempo, [1] ha dimostrato una utile formula di rappresentazione per le funzioni regolari su s-domini simmetrici, formula che ha permesso di estendere a tali funzioni molti dei risultati già noti nel caso della palla $B(0, R)$. Alcune proprietà delle funzioni regolari mostravano pienamente il proprio significato già nel caso della palla, e l'estensione è stata immediata. Altre hanno invece richiesto l'introduzione di nuove tecniche dimostrative ed hanno messo in luce le peculiarità del contesto quaternionico.

2. – Contenuti della tesi

La tesi presenta le basi della teoria, tra cui i contributi originali dell'autrice [2, 3, 6], assieme a risultati inediti.

Proprietà di base. Si espongono risultati fondamentali per le funzioni regolari quali l'analogo Teorema di Abel, l'esistenza dello sviluppo in serie in 0 e il Principio di Identità. Questi sono gli strumenti essenziali della teoria, assieme alla Formula di Rappresentazione ed alla costruzione di un'operazione moltiplicativa $*$ sulle funzioni regolari.

Sviluppi in serie. Si esplora la possibilità di sviluppare una funzione regolare in serie di potenze in punti diversi dall'origine. Risulta che uno sviluppo di questo tipo esiste in ogni punto del dominio di definizione, e che il suo insieme di convergenza è una palla per una distanza (non Euclidea) σ opportunamente definita. Ciò conduce alla definizione del concetto di *σ-analiticità*, che si dimostra equivalente alla regolarità. Si introduce inoltre una nozione più forte di analiticità e se ne studia la relazione con la regolarità.

Teoria geometrica delle funzioni.

Zeri: si descrivono le proprietà algebriche e topologiche degli zeri delle funzioni regolari; ad esempio, risulta che l'insieme degli zeri consiste di punti isolati e di 2-sfere isolate del tipo $x + y\mathbb{S}$ (dove $x, y \in \mathbb{R}, y \neq 0$ e $\mathbb{S}$ è la 2-sfera delle unità immaginarie). Presentiamo la fattorizzazione dei polinomi regolari descrivendone la relazione (non banale) con gli zeri dei polinomi stessi.

Principio del Massimo modulo e conseguenze. Principio del Minimo Modulo, che è conseguenza non ovvia di quello del Massimo a causa delle peculiarità algebriche delle funzioni regolari; Teorema dell'Applicazione Aperta; principi del tipo Phragmén-Lindelöf.

Studio delle singolarità. Si introducono sviluppi di tipo Laurent che permettono di classificare le singolarità delle funzioni regolari come *eliminabili*, *essenziali* oppure come *poli*. I poli sono studiati mediante la costruzione dell'anello dei quozienti di funzioni regolari. Le proprietà topologiche e algebriche dell'insieme dei poli sono (come ci si aspetta) duali a quelle dell'insieme degli zeri. Curiosamente, non tutti i poli di ordine 0 sono eliminabili. Per ciò che concerne le singolarità essenziali, si dimostra un risultato di tipo Casorati-Weierstrass.

Rappresentazioni integrali. Si presentano gli analoghi quaternionici dei Teoremi di Cauchy e di Morera, della Formula Integrale di Cauchy, delle stime di Cauchy e del Teorema di Liouville. Si individua inoltre una formula integrale per il calcolo dei coefficienti dello sviluppo di Laurent.

Trasformazioni dello spazio e della palla unitaria. Si descrivono varianti regolari delle trasformazioni lineari fratte quaternioniche e si caratterizzano tutte le funzioni biregolari da $\mathbb{H}$ in sé e dalla sfera di Riemann quaternionica in sé come trasformazioni affini e fratte (rispettivamente). Anche le trasformazioni regolari della palla unitaria di $\mathbb{H}$ sono studiate e caratterizzate, per mezzo dell'analogo del Lemma di Schwarz.

BIBLIOGRAFIA

[1] COLOMBO F., GENTILI G., SABADINI I. e STRUPPA D.C., *Extension results for slice regular functions of a quaternionic variable*, Adv. Math., **222** (2009), 1793-1808.

[2] GENTILI G. e STOPPATO C., *The open mapping theorem for regular quaternionic functions*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5), **VIII** (2009), 805-815.

[3] GENTILI G. e STOPPATO C., *Zeros of regular functions and polynomials of a quaternionic variable*, Michigan Math. J., **56** (2008), 655-667.

[4] GENTILI G., STOPPATO C., STRUPPA D.C. e VLACCI F., *Recent developments for regular functions of a hypercomplex variable*, In I. Sabadini, M. Shapiro, and F. Sommen, editors, *Hypercomplex analysis*, Trends in Mathematics. Birkhauser Verlag, Basel (2009), 165-186.

[5] GENTILI G. e STRUPPA D.C., *A new theory of regular functions of a quaternionic variable*, Adv. Math., **216** (2007), 279-301.

[6] STOPPATO C., *Poles of regular quaternionic functions*, Complex Var. Elliptic Equ., **54** (2009), 1001-1018.

Dipartimento di Matematica "U. Dini"
Università di Firenze
e-mail: stoppato@math.unifi.it
Dottorato in Matematica
con sede presso l'Università di Firenze – Ciclo XXII
Direttore di ricerca: Prof. Graziano Gentili, Università di Firenze