La Matematica nella Società e nella Cultura

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Tommaso Benincasa

Analisi e controllo ottimo per un sistema di transizione di fase con condizioni al bordo non omogenee di tipo Cauchy-Neumann

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **4** (2011), n.1 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 7–10.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2011_1_4_1_7_0>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2011.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. IV, Aprile 2011, 7-10

Analisi e controllo ottimo per un sistema di transizione di fase con condizioni al bordo non omogenee di tipo Cauchy-Neumann

TOMMASO BENINCASA

Su un dominio limitato $\Omega \subset \mathcal{R}^n$, $(n = 1, 2, 3)$, con un bordo $\partial\Omega$ sufficientemente regolare e per un tempo $T > 0$, consideriamo il seguente problema parabolico non lineare:

$$(1) \qquad \begin{cases} \rho c \dfrac{\partial}{\partial t} u + \dfrac{\ell}{2} \dfrac{\partial}{\partial t} \varphi = k \Delta u + f(t, x) & \text{su } Q := [0, T] \times \Omega \\ \tau \dfrac{\partial}{\partial t} \varphi = \xi^2 \Delta \varphi + \dfrac{1}{2a}(\varphi - \varphi^3) + 2u + g(t, x) & \text{su } Q \\ \dfrac{\partial}{\partial v} u + hu = w(t, x) & \text{su } \Sigma := [0, T] \times \partial\Omega \\ \dfrac{\partial}{\partial v} \varphi = 0 & \text{su } \Sigma \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{su } \Omega \\ \varphi(0, x) = \varphi_0(x) & \text{su } \Omega p \end{cases}$$

i numeri positivi $\rho, c, \tau, \xi, \ell, k, h, a$ sono dei parametri fisici e

- u rappresenta la *temperatura ridotta* su Q
- φ è la *funzione di fase* usata per distinguere tra gli stati di un materiale che occupa la regione Ω ad ogni istante $t \in [0, T]$
- $f \in L^p(Q), g \in L^q(Q)$, $q \geq p \geq 2$, sono funzioni date
- $w \in W_p^{2-\frac{1}{p}, 1-\frac{1}{2p}}(\Sigma)$ rappresenta *il controllo al bordo*
- $u_0 \in W_p^{2-\frac{2}{p}}(\Omega), \varphi_0 \in W_q^{2-\frac{2}{q}}(\Omega)$ e $\partial/\partial v u_0 + hu_0 = w(0, x)$, $\partial/\partial v \varphi_0 = 0$ su $\partial\Omega$

Il problema (1), introdotto da Caginalp in [2], rappresenta il *phase-field model*, esso descrive la transizione di fase tra solido e liquido (e viceversa) di una sostanza che occupa la regione Ω. Il *phase-field model* è una evoluzoine del problema di Stefan classico in due fasi, aggiungendo una nuova equazione parabolica con un termine non lineare in φ, ottenuta dalle equazioni di Eulero-Lagrange per l'energia libera della teoria di campo di Landau-Ginzburg. In questo modo è possibile ottenere un'analisi più profonda del fenomeno fisico e cogliere alcuni aspetti quali: *supercooling*, *superheating*, effetto della tensione di superficie dell'intefaccia, zone di separazione.

Nel nostro studio consideriamo condizioni al bordo non omogenee di tipo Cauchy-Neumann. La condizione al bordo $w(t,x)$, dipendente dal tempo e dallo spazio contemporaneamente, può essere coinvolta come *boundary control* in alcune applicazioni industriali, ad esempio il processo di solidificazione di un metallo. Il primo passo è stato lo studio dell'esistenza e regolarità della soluzione per il problema (1). A questo riguardo il nostro principale risultato è il seguente:

TEOREMA 1. – *Il problema* (1) *ha un'unica soluzione* (u,φ) *dove* $u \in W_p^{2,1}(Q)$, $\varphi \in W_\nu^{2,1}(Q)$ *e* $\nu = min\{q,\mu\}$. *In aggiunta* (u,φ) *soddisfa*

$$\|u\|_{W_p^{2,1}(Q)} + \|\varphi\|_{W_q^{2,1}(Q)} \leq C\Big\{1 + \|u_0\|_{W_p^{2-\frac{2}{p}}(\Omega)} + \|\varphi_0\|_{W_q^{2-\frac{2}{q}}(\Omega)}$$
$$+\|w\|_{W_p^{2-\frac{1}{p},1-\frac{1}{2p}}(\Sigma)} + \|f\|_{L^p(Q)} + \|g\|_{L^q(Q)}\Big\}$$

dove la costante C *dipende da* $|\Omega|$ *(la misura di* Ω*),* T,n,p,q *e dai parametri fisici. Inoltre, dato un numero* $M > 0$*, se* (u_1,φ_1) *e* (u_2,φ_2) *soluzioni, relative alle medesime condizioni iniziali e corrispondenti, rispettivamente, ai dati* (f_1,g_1,w_1), $(f_2,g_2,w_2) \in L^p(Q) \times L^q(Q) \times W_p^{2-\frac{1}{p},1-\frac{1}{2p}}(\Sigma)$*, tali che* $\|\varphi_1\|_{L^\nu(Q)}$, $\|\varphi_2\|_{L^\nu(Q)} \leq M$*, allora vale la seguente stima*

$$\|u_1 - u_2\|_{W_p^{2,1}(Q)} + \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{W_q^{2,1}(Q)} \leq C\Big\{\|f_1 - f_2\|_{L^p(Q)} + \|g_1 - g_2\|_{L^q(Q)} +$$
$$+\|w_1 - w_2\|_{W_p^{2-\frac{1}{p},1-\frac{1}{2p}}(\Sigma)}\Big\}$$

dove la costante C *dipende da* $|\Omega|$, T,n,p,q *e dai parametri fisici.*

Strumenti fondamentali nel nostro approccio sono la teoria del grado di Leray-Schauder, le proprietà degli operatori di Nemytskij, la teoria L_p per equazioni paraboliche lineari e quasilineari [3]. Useremo il teorema di Lions-Peetre per assicurarci l'immersione continua $W_p^{2,1}(Q) \subset L^\mu(Q)$, dove:

$$\mu \begin{cases} \infty & \text{se } n+2 < 2p \\ \textit{any numbers} \geq 3p & \text{se } n+2 = 2p \\ \dfrac{p(n+2)}{n+2-2p} & \text{se } n+2 > 2p \end{cases}$$

Posto $f = g \equiv 0$, abbiamo associato al problema (1), per ogni $\varepsilon > 0$, il seguente schema iterativo di approssimazione di tipo *fractional steps* [1]:

$$
(2) \qquad \begin{cases}
\rho c u_t^\varepsilon + \dfrac{\ell}{2}\varphi_t^\varepsilon = k\Delta u^\varepsilon & \text{in } Q_i^\varepsilon = (i\varepsilon,(i+1)\varepsilon)\times\Omega \\
\tau\varphi_t^\varepsilon = \xi^2\Delta\varphi^\varepsilon + \frac{1}{2a}\varphi^\varepsilon + 2u^\varepsilon & \text{in } Q_i^\varepsilon \\
\dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial v} + hu^\varepsilon = w(t,x) & \text{su } \Sigma_i^\varepsilon = (i\varepsilon,(i+1)\varepsilon)\times\partial\Omega \\
\dfrac{\partial\varphi^\varepsilon}{\partial v} = 0 & \text{su } \Sigma_i^\varepsilon \\
u_+^\varepsilon(i\varepsilon,x) = u_-^\varepsilon(i\varepsilon,x) \qquad u_-^\varepsilon(0,x) = u_0(x) & \text{su } \Omega \\
\varphi_+^\varepsilon(i\varepsilon,x) = z((i+1)\varepsilon,\varphi_-^\varepsilon(i\varepsilon,x)) & \text{su } \Omega
\end{cases}
$$

dove $z(\cdot,\varphi_-^\varepsilon(i\varepsilon,x))$ *è la soluzione del problema di Cauchy*

$$
\begin{cases}
z'(s) + \dfrac{1}{2a}z^3(s) = 0 & s\in(i\varepsilon,(i+1)\varepsilon) \\
z(i\varepsilon) = \varphi_-^\varepsilon(i\varepsilon,x) & \varphi_-^\varepsilon(0,x) = \varphi_0(x)
\end{cases}
$$

per $i = 0,1,\cdots,M_\varepsilon - 1$, con $M_\varepsilon = \left[\dfrac{T}{\varepsilon}\right]$, $Q_{M_\varepsilon-1}^\varepsilon = [(M_\varepsilon-1)\varepsilon,T]\times\Omega$, $\varphi_+^\varepsilon(i\varepsilon,x) = \lim\limits_{t\downarrow i\varepsilon}\varphi^\varepsilon(t,x)$ e $\varphi_-^\varepsilon(i\varepsilon,x) = \lim\limits_{t\uparrow i\varepsilon}\varphi^\varepsilon(t,x)$. Il vantaggio di tale schema consiste nel ridurre l'onere computazionale richiesto per approssimare la soluzione del sistema non lineare. La convergenza è dimostrata nel seguente

TEOREMA 2. – *Assumiamo che* $u_0,\varphi_0\in W_\infty^1(\Omega)$ *soddisfano* $\partial u_0/\partial v + hu_0 = w(0,x)$, $\partial\varphi_0/\partial v = 0$ *e* $w\in W^1([0,T];L^2(\partial\Omega))$. *Prendiamo* $(u^\varepsilon,\varphi^\varepsilon)$ *soluzione dello schema approssimante* (2). *Allora, per* $\varepsilon\to 0$, *abbiamo*

$$
(u^\varepsilon(t),\varphi^\varepsilon(t)) \to (u^*(t),\varphi^*(t)) \qquad \textit{fortemente in } L^2(\Omega), \forall t\in(0,T]
$$

dove $u^*,\varphi^*\in W^{2,1}([0,T];L^2(\Omega))\cap L^2([0,T];H^2(\Omega))$ *è la soluzione del sistema non lineare.*

Consideriamo ora il seguente problema di controllo ottimo governato dal sistema non lineare (1).

(P) *Minimizzare*
$$
j(w) = \frac{1}{2}\int\limits_Q (\varphi - 1 - \delta_1)^2\cdot\chi_{Q_0}\,dtdx + \frac{1}{2}\int\limits_Q \left((u-\delta_2)^+\right)^2\cdot\chi_{Q_0}\,dtdx + \frac{1}{2}\int\limits_0^T w^2(t,x)\,dtd\gamma
$$

δ_1,δ_2, nel problema (P) sono numeri positivi usati per distinguere tra gli stati del materiale, precisamente:

- la *pure liquid region* $\{u(t,x)\geq\delta_2$ e $\varphi(t,x)\geq 1+\delta_1\}$
- la *pure solid region* $\{u(t,x)\leq -\delta_2$ e $\varphi(t,x)\leq -1-\delta_1\}$
- la *separating region* $\Omega_t = \{x\in\Omega;\ \|u(t,x)\|\leq\delta_2, \|\varphi(t,x)\|\leq 1+\delta_1,\ \delta_1,\delta_2\geq 0\}$

A livello applicativo, questo genere di funzionale può essere usato nelle indagini numeriche riguardanti il processo di solidificazione. Ad esempio calcolare la temperatura minima che induce, in un dato tempo T, il cambiamento di fase. Abbiamo associato al problema (P) un problema approssimante (P^{ε}) ottenuto usando nel funzionale di costo la soluzione del sistema lineare (2). Entrambi i problemi hanno soluzione. Attraverso la variazione prima abbiamo calcolato il sistema duale (p^{ε} e q^{ε} sono le funzioni di costato) e quindi, ricavato, le condizioni di ottimizzalità necessarie

$$-r(t,x) \in \partial I_{\mathcal{U}}(w_{\varepsilon}^{*}) \qquad \text{a.p.t. } (t,x) \in \Sigma$$

dove $r(t,x) = \dfrac{k}{\rho c} p^{\varepsilon}(t,x) + w(t,x)$ e $I_{\mathcal{U}}$ la funzione indicatrice di $\mathcal{U}$. Possiamo così concludere che

$$w_{\varepsilon}^{*}(t,x) = \begin{cases} R, & \text{se } r(t,x) > 0 \\ 0, & \text{se } r(t,x) < 0. \end{cases}$$

Resta quindi dimostrato il seguente principio di massimo per il problema (P^{ε}).

TEOREMA 3. – *Sia* $(u^{*,\varepsilon}, \varphi^{*,\varepsilon}, w_{\varepsilon}^{*})$ *una soluzione ottima di (*P^{ε}*). Allora il controllo ottimo è dato dalla* (4)*, dove* $(p^{\varepsilon}, q^{\varepsilon})$ *soddisfano il sistema duale attraverso* $u^{*,\varepsilon}, \varphi^{*,\varepsilon}$.

Infine abbiamo usato i risultati ottenuti sviluppando uno specifico software per studiare il problema inverso, nel caso unidimensionale, come problema di controllo ottimo. Ricordiamo che questo tipo di problema inverso nasce da un'applicazione industriale (*casting wire*).

BIBLIOGRAFIA

[1] T. BENINCASA e C. MOROŞANU, *Fractional steps scheme to approximate the phase-field transition system with nonhomogeneous Cauchy-Neumann boundary conditions*, Numer. Funct. Anal. and Optimiz., Vol. **30** (3-4) (2009), 199-213.

[2] G. CAGINALP, *An analysis of a phase field model of a free boundary,* in Arch. Rat. Mech. Anal., **92** (1986), 205-245.

[3] O.A. LADYZHENSKAYA, B.A. SOLONNIKOV e N.N. URALTZAVA, *Linear and quasi linear equations of parabolic type*, Prov. Amer. Math. Soc. 1968.

[4] C. MOROŞANU e D. MOTREANU, *The phase field system with a general nonlinearity*, International Journal of Differential Equations and Applications, Vol. **1**, No. 2 (2000), 187-204.

Dipartimento di Matematica, Università di Bologna
e-mail: benincasa@dm.unibo.it
Dottorato in Matematica
con sede presso l'Università di Bologna – Ciclo XXII
Direttore di ricerca: Prof. Angelo Favini, Università di Bologna