
La Matematica nella Società e nella Cultura

RIVISTA DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

STEFANO RUGGERINI

Fronti d'onda e interfacce in equazioni di reazione-diffusione con effetti convettivi o aggregativi

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. 4 (2011), n.1 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 79–82.

Unione Matematica Italiana

[<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2011_1_4_1_79_0>](http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2011_1_4_1_79_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Fronti d'onda e interfacce in equazioni di reazione-diffusione con effetti convettivi o aggregativi

STEFANO RUGGERINI

Le equazioni degeneri di *reazione-diffusione* della forma

$$(1) \quad u_t = [D(u)u_x]_x + f(u), \quad x \in \mathbf{R}, \quad t > 0,$$

descrivono l'evoluzione temporale della densità $u(x, t)$ di una popolazione (di animali, cellule, molecole . . .) che diffonde in un ambiente unidimensionale con coefficiente di diffusione $D(u)$ ed è soggetta, al contempo, a un tasso netto di crescita $f(u)$, entrambi variabili in funzione della densità. Ciò che le rende particolarmente adatte allo scopo è il fatto che – diversamente da quanto accade ad esempio con l'equazione del calore – esse propagano le perturbazioni dallo stato stazionario instabile a *velocità finita*. Questa proprietà di propagazione finita (*finite speed of propagation*) è legata al carattere *degenere* dell'equazione, ossia alla possibilità che il coefficiente di diffusione si annulli in corrispondenza di qualche valore della densità (tipicamente $D(0) = 0$), facendo sì che l'equazione degeneri dal tipo parabolico. L'esempio forse più semplice di equazione di diffusione non lineare degenera è l'equazione dei *mezzi porosi* $u_t = [u^m]_{xx}$, con $m > 1$, introdotta come modello per la diffusione di un gas attraverso un materiale che presenta porosità. La sua soluzione fondamentale, che assume come dato iniziale una massa di Dirac, è caratterizzata dalla presenza di un'*interfaccia*, cioè una curva continua nel piano (x, t) che separa la zona dove la soluzione è nulla da quella in cui è positiva. Lo studio di queste interfacce (*free boundaries*) costituisce un capitolo importante e difficile della teoria delle equazioni non lineari di diffusione, anche a causa della possibile perdita di regolarità delle soluzioni sull'interfaccia stessa.

Come mostrato in [2], le soluzioni del problema di Cauchy associato all'equazione

$$(2) \quad u_t = [u^m]_{xx} + f(u),$$

con f di tipo *Fisher* (cioè $f \in C^1, f(0) = f(1) = 0, f(u) > 0$ in $(0, 1), f'(0)f'(1) \neq 0$) e con dato iniziale $u_0(x) = u(x, 0) \not\equiv 0$ continuo, a supporto compatto e tale che $0 \leq u_0 \leq 1$, evolvono, al tendere di t all'infinito, verso la soluzione $u \equiv 1$, con un'interfaccia che tende a propagarsi a velocità costante, pari a quella del *fronte d'onda* più lento ammesso dall'equazione stessa. Ricordiamo che le soluzioni del tipo fronte d'onda (*travelling waves*) sono soluzioni speciali della forma $u(x, t) = \varphi(x - ct)$, dove la funzione $\varphi(\xi)$ rappresenta il profilo costante dell'onda, che si propaga a velocità costante c (per una teoria dei fronti d'onda in equazioni di reazione-diffusione-convezione si veda [1]).

Il modello (2) può essere generalizzato in modo da rappresentare eventuali effetti convettivi, cioè di trascinamento o deriva, ottenendo l'equazione

$$(3) \quad u_t + h(u)u_x = [mu^{m-1}u_x]_x + f(u).$$

Sotto opportune ipotesi sulla velocità di convezione h e sulla reazione f , un primo risultato conseguito nella tesi consiste nell'estensione alle soluzioni del problema di Cauchy associato a (3), della medesima proprietà di convergenza provata in [2] (vedere Teorema 1, oppure [6]). La dimostrazione di questo risultato ha richiesto l'estensione della teoria dei fronti d'onda per l'equazione (3), utilizzando l'approccio sviluppato in [5], per coprire il caso aperto $1 < m < 2$ e consentire l'applicazione delle tecniche del confronto introdotte in [2].

Permettendo al coefficiente di diffusione D nell'equazione (1) di assumere valori negativi in qualche sottointervallo di $[0, 1]$, è possibile rappresentare movimenti di natura *aggregativa*. Il problema della ricerca dei fronti d'onda in equazioni di reazione-diffusione-aggregazione è stato affrontato solo di recente sotto l'ipotesi che D cambi segno una sola volta nell'intervallo $(0, 1)$, da positiva a negativa (si veda [4]), oppure due volte, con D nuovamente positiva in un intorno sinistro di 1. Nel caso di popolazioni biologiche, questa seconda ipotesi appare più naturale in quanto è ragionevole aspettarsi un comportamento repulsivo tra gli individui alle densità prossime alla saturazione. Un secondo risultato raggiunto nella tesi (vedere Teorema 2 oppure [3]) è perciò quello di fornire una caratterizzazione dell'esistenza dei fronti nel caso, ancora aperto, in cui D cambia segno due volte e il termine di reazione f è di tipo *Nagumo* (cioè $f(0) = f(\alpha) = f(1) = 0$ per qualche $\alpha \in (0, 1)$, $f(u) < 0$ in $(0, \alpha)$ e $f(u) > 0$ in $(\alpha, 1)$). Ne consegue l'ammissibilità di un unico fronte, corrispondente ad un solo valore del parametro c che, per la prima volta in questi modelli, può essere negativo, illustrando la possibilità che in determinate condizioni la popolazione possa estinguersi e abbandonare completamente l'ambiente. L'esistenza di un fronte a velocità positiva conferma invece la possibilità che una popolazione, minacciata alle basse densità da un tasso di mortalità superiore a quello di natalità (*effetto Allee*), sopravviva ugualmente grazie alla sua capacità di aggregarsi (*population recovery*).

Come ultima applicazione, le tecniche del confronto sviluppate nella tesi hanno permesso di costruire una sottosoluzione originale dell'equazione $u_t = [u^m]_{xx} + au(1 - u)$, $a > 0$, con interfaccia asintoticamente lineare, migliorando una precedente costruzione caratterizzata da un'interfaccia sublineare.

1. – Reazione-diffusione-convezione

L'equazione (3) è stata studiata assumendo che f e h fossero “vicine” a polinomi. Per la precisione, si è supposto che $f, h \in C([0, \infty))$,

$$(4) \quad f(0) = f(1) = 0, \quad f(s) > 0 \quad \text{se } 0 < s < 1, \quad f(s) < 0 \quad \text{se } s > 1$$

e che esistano $\lambda > 0$ e $p, q \in \mathbb{R}$, con $1 \leq p < \min\{m, q\}$, tali che

$$(5) \quad f(s) \geq s^p - s^q \quad \text{per ogni } s \geq 0,$$

$$(6) \quad f(s) = O(s^{2-m}) \quad \text{per } s \rightarrow 0,$$

$$(7) \quad |h(s)| \leq \lambda s^{m+p-2} \quad \text{per ogni } s \geq 0.$$

Sotto un'ipotesi più debole della (6), l'equazione (3) ammette fronti d'onda per ogni valore di c maggiore o uguale a una certa soglia c^* che si può stimare in funzione di f e h (vedere [1, 5]). Inoltre, per ogni $m > 1$ (il caso $1 < m < 2$ era aperto e ha richiesto l'ipotesi (6)), il fronte di velocità minima ha un profilo con supporto limitato a destra, cioè possiede un'interfaccia (lineare), cosa che, in equazioni di reazione-diffusione-convezione, è equivalente alla proprietà di propagazione finita.

Le tecniche del confronto impiegate per stimare l'interfaccia delle soluzioni del problema di Cauchy associato a (3) si basano sul principio fondamentale che se u e v sono, rispettivamente, sottosoluzione e soprasoluzione deboli di questo problema e se $u(x, 0) \leq v(x, 0)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, allora $u(x, t) \leq v(x, t)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e per ogni $t > 0$. Grazie a questo principio, a partire da una sottosoluzione dell'equazione (3) (ottenuta adattando una costruzione già nota) è stato possibile dimostrare che $u \equiv 1$ è un attrattore per le soluzioni del problema di Cauchy associato a (3). Ciò ha permesso l'estensione delle tecniche introdotte in [2] e la dimostrazione del seguente risultato, nel quale si fa riferimento alla usuale definizione di soluzione debole del problema di Cauchy (vedere [6]).

TEOREMA 1. — *Siano $f, h \in C([0, \infty))$ soddisfacenti (4), (5), (6), (7) e*

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \inf_{0 < s < \frac{1}{1+\varepsilon}} \frac{f(s)}{f[(1+\varepsilon)s]} \right\} = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \sup_{0 < s < 1} \frac{f(s)}{f[(1-\varepsilon)s]} \right\} = 1.$$

Se u è soluzione debole del problema di Cauchy associato a (3) con dato iniziale $u_0 \not\equiv 0$ continuo, a supporto compatto e tale che $0 \leq u_0 \leq 1$, allora per ogni $c < c^$ $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = 1$ uniformemente in $0 \leq x \leq ct$, mentre per ogni $c > c^*$ esiste $T > 0$ tale che $u(x, t) \equiv 0$ per ogni $x \geq ct$, con $t > T$.*

Dal Teorema 1 segue immediatamente che la velocità di propagazione dell'interfaccia di $u(x, t)$ tende alla costante c^* al tendere di t all'infinito.

2. – Reazione-diffusione-aggregazione

Il modello di reazione-diffusione-aggregazione (1) è stato studiato sotto le seguenti ipotesi: $f \in C([0, 1])$; $f(0) = f(\alpha) = f(1) = 0$, $f(v) < 0$ in $(0, \alpha)$, $f(v) > 0$ in $(\alpha, 1)$ per qualche $0 < \alpha < 1$; $D \in C^1([0, 1])$; $D(v) > 0$ in $(0, \beta) \cup (\gamma, 1)$, $D(v) < 0$ in (β, γ) per qualche $0 < \beta < \gamma < 1$; fD differenziabile in un intorno destro di 0 e $(fD)'(v) \rightarrow 0$ per $v \rightarrow 0$.

Sono state stabilite innanzitutto alcune condizioni necessarie per l'esistenza dei fronti, dimostrando che, sotto le ipotesi enunciate, se un fronte esiste, allora

$$(8) \quad \alpha < \beta, \quad c > 0 \quad \text{e} \quad \int_0^{\beta} f(s)D(s) ds > 0,$$

oppure, in alternativa, $\alpha > \gamma$, $c < 0$ e $\int_{\gamma}^1 f(s)D(s) ds < 0$.

In secondo luogo (e ci limiteremo qui al caso $\alpha < \beta$, essendo il caso alternativo simmetrico), si è considerata l'equazione nei sottointervalli $(0, \beta)$, (β, γ) e $(\gamma, 1)$, nei quali il prodotto fD è assimilabile, previa eventualmente qualche simmetria, ai tipi Nagumo o Fisher. Considerando i risultati di esistenza dei fronti per l'equazione associata $\varphi'' + c\varphi' + f(\varphi)D(\varphi) = 0$, si sono ottenute le condizioni espresse nel seguente teorema, dove i parametri c_1^* , c_2^* e c_3^* corrispondono alle velocità soglia dei fronti della precedente equazione nei tre casi.

TEOREMA 2. — *Se vale la condizione (8), allora l'equazione (1) ammette un fronte d'onda di velocità c se e solo se $c = c_1^* > \max\{c_2^*, c_3^*\}$. Il fronte, che è unico a meno di traslazioni, è inoltre sharp se e solo se $D(0) = 0$.*

Essendo i valori c_1^* , c_2^* e c_3^* in generale incogniti, per ovviare al carattere implicito della condizione contenuta nell'enunciato del Teorema 2, si è stabilita una condizione sufficiente per la sua validità, espressa soltanto in termini di f e D . Il risultato di caratterizzazione dell'esistenza dei fronti è stato infine generalizzato al caso in cui la diffusività D presenta un numero pari qualunque di cambiamenti di segno.

BIBLIOGRAFIA

- [1] GILDING B.H. e KERSNER R., *Travelling Waves in Nonlinear Diffusion-Convection-Reaction*, Birkhäuser Verlag (2004).
- [2] KAMIN S. e ROSENAU P., *Emergence of waves in a non linear convection-reaction-diffusion equation*, Adv. Nonlinear Stud., 4 (2004), 251-272.
- [3] KUZMIN M. e RUGGERINI S., *Front propagation in diffusion-aggregation models with bi-stable reaction*, Preprint.
- [4] MAINI P.K., MALAGUTI L., MARCELLI C. e MATUCCI S., *Aggregative movement and front propagation for bi-stable population models*, Math. Models and Methods in Appl. Sciences, 17 (2007), 1351-1368.
- [5] MALAGUTI L. e MARCELLI C., *Finite speed of propagation in monostable degenerate reaction-diffusion-convection equations*, Adv. Nonlinear Stud., 5 (2005), 223-252.
- [6] MALAGUTI L. e RUGGERINI S., *Asymptotic speed of propagation for Fisher-type degenerate reaction-diffusion-convection equations*, Adv. Nonlinear Stud., 10 (2010), 611-629.

Dipartimento di Matematica, Università di Modena e Reggio Emilia

e-mail: stefano.ruggerini@unimore.it

Dottorato in Matematica

con sede presso l'Università di Modena e Reggio Emilia – Ciclo XXI

Direttore di ricerca: Prof. Luisa Malaguti, Università di Modena e Reggio Emilia