La Matematica nella Società e nella Cultura

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Jasmin Rassy

Metodi geometrici nella normalizzazione di germi di biolomorfismi

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **4** (2011), n.1 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 71–74.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2011_1_4_1_71_0>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2011.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. IV, Aprile 2011, 71-74

Metodi geometrici nella normalizzazione di germi di biolomorfismi

JASMIN RASSY

Dato un germe di biolomorfismo f di $\mathbb{C}^n$ in un punto fisso p, si vuole studiare la dinamica di f vicino al punto fisso, ossia, per ogni punto q in un intorno (sufficientemente) piccolo di p, si è interessati a descrivere il comportamento asintotico della successione $\{f^k(q)\}_{k\geq 0}$ delle iterate di f valutate nel punto q, dove f^k è la composizione di f con se stessa per k volte. Poiché tale problema è invariante a meno di traslazioni, è sempre possibile ridursi allo studio di germi di biolomorfismi di $(\mathbb{C}^n, O)$ che fissano l'origine.

Sebbene il caso unidimensionale sia ampiamente sviluppato ed essenzialmente risolto da Brjuno [1] e Yoccoz [5], in dimensione $n \geq 2$ tale studio è lontano dall'essere completo. Localmente, f può essere scritta come una n-upla di serie di potenze convergenti, cioè, usando la notazione multi-indiciale standard, si ha

$$f(z) = \Lambda z + \sum_{\substack{Q\in\mathbb{N}^n\\ |Q|\geq 2}} f_Q z^Q,$$

dove Λ è una matrice $n \times n$ a coefficienti complessi, $f_Q \in \mathbb{C}^n$, e, posto $Q = (q_1, \ldots, q_n)$, allora $|Q| := \sum_{j=1}^{n} q_j$ e $z^Q := z_1^{q_1} \cdots z_n^{q_n}$. A meno di cambiamenti lineari delle coordinate, è anche possibile supporre che Λ sia in forma normale di Jordan, ossia

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ \varepsilon_2 & \lambda_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \varepsilon_n & \lambda_n \end{pmatrix},$$

dove gli autovalori $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}^*$ non sono necessariamente distinti, e $\varepsilon_j \in \{0, \varepsilon\}$ può essere non nullo solo se $\lambda_{j-1} = \lambda_j$.

La dinamica non cambia se cambiamo coordinate, perciò un'idea naturale è cercare una soluzione ad un cosiddetto problema di normalizzazione: *dato un germe di biolomorfismo f di $\mathbb{C}^n$ che fissa l'origine e con parte lineare in forma normale di Jordan, è possibile trovare un cambio di coordinate locale φ di $\mathbb{C}^n$, che fissi l'origine, tale che*

$$\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi = \text{“\textit{forma semplice}”?}$$

Una risposta positiva a tale problema, ridurrebbe lo studio della dinamica di f allo studio ben più semplice della dinamica della "forma semplice". Inoltre, si è soliti supporre $\mathrm{d}\varphi_O = \mathrm{Id}$ in quanto la parte lineare di f è già in forma normale (di Jordan).

Naturalmente, dobbiamo specificare cosa intendiamo per "forma semplice". Una scelta naturale per una "forma semplice" è il termine lineare del germe; in questo caso studiamo il:

Problema della linearizzazione. *Sia f un germe di biolomorfismo di $\mathbb{C}^n$ che fissa l'origine e con parte lineare Λ in forma normale di Jordan. Esiste un cambio locale di coordinate olomorfo φ di $\mathbb{C}^n$, che fissi l'origine, con $\mathrm{d}\varphi_O = \mathrm{Id}$, tale che $\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi = \Lambda$?*

Un modo per risolvere tale problema è prima cercare una trasformazione formale φ che risolva

$$f \circ \varphi = \varphi \circ \Lambda,$$

e poi studiarne la convergenza o meno.

La risposta a tale problema dipende dall'insieme degli autovalori di Λ, solitamente chiamato lo *spettro* di Λ. Infatti è possibile che esista un multi-indice $Q = (q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{N}^n$, con $|Q| \geq 2$, tale che

$$\lambda^Q - \lambda_j := \lambda_1^{q_1} \cdots \lambda_n^{q_n} - \lambda_j = 0$$

per qualche $1 \leq j \leq n$; una relazione di questo tipo è detta *risonanza moltiplicativa* di f, e Q è detto un *multi-indice risonante*. Un *monomio risonante* è un monomio z^Q nella j-esima coordinata tale che $\lambda^Q = \lambda_j$.

Le risonanze costituiscono l'ostruzione formale alla linearizzazione. Infatti, si ha il seguente risultato classico:

TEOREMA 1 (Poincaré, 1893; Dulac, 1904). – *Sia f un germe di biolomorfismo di $\mathbb{C}^n$ che fissa l'origine O con parte lineare Λ in forma normale di Jordan. Allora esiste una trasformazione formale φ di $\mathbb{C}^n$, priva di termine costante e con parte lineare uguale all'identità, che coniuga f ad una trasformazione formale $g \in \mathbb{C}[\![z_1, \ldots, z_n]\!]^n$ priva di termine costante, con parte lineare Λ e contenente solo monomi risonanti.*

Una serie formale g priva di termine costante, con parte lineare in forma normale di Jordan e contenente solo monomi risonanti rispetto agli autovalori della sua parte lineare, è detta in *forma normale di Poincaré-Dulac*. Una serie formale g in forma normale di Poincaré-Dulac che sia formalmente coniugata ad un germe di biolomorfismo f di $\mathbb{C}^n$ che fissi l'origine è detta una *forma normale (formale) di Poincaré-Dulac associata a f*. Quindi la seconda scelta naturale per una "forma semplice" è una forma normale di Poincaré-Dulac, per cui abbiamo il:

Problema della normalizzazione. *Sia f un germe di biolomorfismo di $\mathbb{C}^n$ che fissa l'origine e con parte lineare Λ in forma normale di Jordan. Esiste un cambio locale di coordinate olomorfo φ di $\mathbb{C}^n$, che fissi l'origine, con $\mathrm{d}\varphi_O = \mathrm{Id}$, tale che $\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi$ sia una forma normale di Poincaré-Dulac di f?*

Anche in assenza di risonanze, la linearizzazione olomorfa non è garantita. È infatti necessario studiare il modo in cui i numeri $\lambda^Q - \lambda_j$ si avvicinano a zero per $|Q| \to +\infty$; in questo contesto, questo problema è noto come *problema dei piccoli divisori*. Inoltre in generale le forme normali di Poincaré-Dulac non sono uniche, e ciò rende particolarmente difficile lo studio della convergenza.

In questa tesi ho studiato il problema della linearizzazione olomorfa in presenza di risonanze (vedi [2]–[3]), ed ho introdotto dei nuovi metodi geometrici nello studio del problema della normalizzazione olomorfa (vedi [4]).

Riguardo il problema della linearizzazione in presenza di risonanze, in [2] ho dimostrato che, dato un germe di biolomorfismo f di $\mathbb{C}^n$ che fissi l'origine e che abbia parte lineare diagonalizzabile, sotto opportune condizioni aritmetiche sugli autovalori di $\mathrm{d}f_O$ ed alcune restrizioni sul tipo di risonanze (che però possono essere presenti), una condizione necessaria e sufficiente per la linearizzazione olomorfa in presenza di risonanze è l'esistenza di una particolare varietà complessa f-invariante (vedi [2] per definizioni e dimostrazioni):

Teorema 2 (Raissy, 2010 [2]). – *Sia f un germe di biolomorfismo di $\mathbb{C}^n$ che abbia l'origine come punto fisso quasi-Brjuno di ordine s, con $1 \le s \le n$. Allora f è olomorficamente linearizzabile se e solo se ammette una varietà M di codimensione s tale che $f|_M$ sia olomorficamente linearizzabile.*

Tale risultato ha inoltre come corollari molti dei risultati classici di linearizzazione e anche alcuni risultati più recenti.

Ho poi esplorato in questo setting le conseguenze del principio euristico generale secondo cui se un'applicazione f commuta con un'applicazione g, allora alcune delle proprietà di g possono essere ereditate da f, ed ho dimostrato come il commutare con un germe linearizzabile possa dare informazioni sui germi che possono essere coniugati ad un dato germe.

Ad esempio, una possibile generalizzazione del problema della linearizzazione è chiedersi quando un dato insieme di $m \ge 2$ germi di biolomorfismi $f_1, \dots, f_m$ di $\mathbb{C}^n$ aventi uno stesso punto fisso, che a meno di traslazioni possiamo supporre essere l'origine, sia *simultaneamente olomorficamente linearizzabile*, ossia esista un cambio locale di coordinate olomorfo, che coniughi f_h alla sua parte lineare per ogni $h = 1, \dots, m$.

Ho trovato che se $f_1, \dots, f_m$ hanno parti lineari diagonalizzabili e sono tali che f_1 commuta con f_h per ogni $h = 2, \dots, m$, sotto certe condizioni aritmetiche sugli autovalori di $(\mathrm{d}f_1)_O$ ed alcune restrizioni sul tipo di risonanze (che però possono essere presenti), l'esistenza di una linearizzazione simultanea equivale all'esistenza di una particolare varietà complessa f_h-invariante per $h = 1, \dots, m$ (vedi [3] per definizioni e dimostrazioni):

Teorema 3 (Raissy, 2009 [3]). – *Siano $f_1, \dots, f_m$, $m \ge 2$ germi of biolomorfismi di $\mathbb{C}^n$, che fissano l'origine. Supponiamo che f_1 abbia l'origine come punto fisso quasi-Brjuno di ordine s, con $1 \le s \le n$, che commuti con f_h per ogni $h = 2, \dots, m$. Allora $f_1, \dots, f_m$ sono simultaneamente olomorficamente linearizzabili se e solo se esiste un germe di varietà complessa M di codimensione s, invariante per ciascun*

f_h, per $h = 1, \dots, m$, che sia una varietà osculante simultanea per $f_1, \dots, f_m$ e tale che $f_1|_M, \dots, f_m|_M$ siano simultaneamente olomorficamente linearizzabili.

Ho poi studiato (in [4]) la commutazione con un particolare tipo di oggetto linearizzabile: le azioni di toro. Ho trovato, in un modo completo e algoritmicamente calcolabile, quale tipo di azioni di toro è necessario cercare per risolvere il problema della normalizzazione di Poincaré-Dulac olomorfa, studiando i possibili fenomeni di torsione. In particolare, ho trovato una corrispondenza fra l'insieme degli autovalori di $\mathrm{d}f_O$ e la matrice dei pesi di un'azione di toro. Il collegamento e la struttura trovati sono più complicati di quanto si credeva ed è stato necessario uno studio dettagliato per capire le relazioni fra azioni di toro, normalizzazione olomorfa e fenomeni di torsione. Inoltre, in [4] sono riuscita a evidenziare fino a quale punto sia possibile spingere l'analogia fra germi di campi vettoriali olomorfi e germi di biolomorfismo nel problema della normalizzazione olomorfa, individuando più tipi di torsione, assenti nel caso dei campi vettoriali. Un esempio dei risultati che ho ottenuto è il seguente (vedi [4] per definizioni, dimostrazioni e altri risultati):

TEOREMA 4 (Raissy, 2010 [4]). – *Sia f un germe di biolomorfismo di $\mathbb{C}^n$ che fissi l'origine. Supponiamo che, denotato con $\lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ lo spettro di $\mathrm{d}f_O$, l'unico vettore $[\varphi] \in (\mathbb{C}/\mathbb{Z})^n$ tale che $\lambda = e^{2\pi i[\varphi]}$ abbia grado torico $1 \leq r \leq n$ e sia nel caso di torsione impura. Allora f ammette una normalizzazione olomorfa di Poincaré-Dulac se e solo se esiste un'azione olomorfa su $(\mathbb{C}^n, O)$ di un toro di dimensione $r - 1$ che commuti con f e tale che le colonne della matrice dei pesi dell'azione siano vettori torici ridotti privi di torsione associati a $[\varphi]$.*

Ho inoltre trovato un esempio di tecniche che possono essere utilizzate per costruire azioni di toro.

BIBLIOGRAFIA

[1] BRJUNO A. D., *Analytic form of differential equations*, Trans. Moscow Math. Soc., **25–26**, (1971-1972), 131-288 e 199-239.

[2] RAISSY J., *Linearization of holomorphic germs with quasi-Brjuno fixed points*, Mathematische Zeitschrift, **264 (4)** (2010), 881-900.

[3] RAISSY J., *Simultaneous linearization of holomorphic germs in presence of resonances*, Conform. Geom. Dyn., **13** (2009), 217-224.

[4] RAISSY J., *Torus actions in the normalization problem*, Journal of Geometric Analysis, **20** (2) (2010), 472-524.

[5] YOCCOZ J.-C., *Théorème de Siegel, nombres de Bruno et polynômes quadratiques*, Astérisque, **231** (1995), 3-88.

Dipartimento di Matematica e Applicazioni
Università degli Studi di Milano Bicocca
e-mail: jasmin.raissy@unimib.it
Dottorato in Matematica con sede presso l'Università di Pisa – Ciclo XXII
Direttore di ricerca: Prof. Marco Abate, Università di Pisa