
La Matematica nella Società e nella Cultura

RIVISTA DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

MARISTELLA PETRALLA

Analisi asintotica per un problema di Dirichlet singolarmente perturbato

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. 4 (2011), n.1 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 63–66.

Unione Matematica Italiana

[<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2011_1_4_1_63_0>](http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2011_1_4_1_63_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Analisi asintotica per un problema di Dirichlet singolarmente perturbato

MARISTELLA PETRALLA

Nel lavoro di tesi di Dottorato in matematica, abbiamo studiato soluzioni positive del seguente problema di Dirichlet

$$(P)_\lambda \quad \begin{cases} -\Delta u + \lambda V(x)u = u^p & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

dove $\lambda > 0$ è un parametro grande, $p > 1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ è un dominio limitato, $N \geq 2$ e V è un potenziale positivo. Con la trasformazione $u(x) \rightarrow \lambda^{-\frac{1}{p-1}}u(x)$, $\lambda \rightarrow \varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$, il problema $(P)_\lambda$ si legge equivalentemente come un problema di Dirichlet singolarmente perturbato: $-\varepsilon^2 \Delta u + Vu = u^p$.

Questo problema ed altri ad esso collegati sono stati largamente considerati in letteratura, in connessione con vari modelli biologici e fisici (dinamica delle popolazioni, teorie di formazione di “pattern” e reattori chimici).

L'analisi asintotica per $(P)_\varepsilon$ nel caso sottocritico ($p > 1$ se $N = 2$ e $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$ se $N \geq 3$) e $V = 1$ è stata considerata per soluzioni di energia minima sia con condizione al bordo Dirichlet che Neumann. Con una espansione asintotica del corrispondente valore critico, nel caso Dirichlet è stato provato che la successione esibisce un unico “spike-layer” con il suo unico picco situato vicino alla parte più centrale di Ω , dove la funzione distanza $d(\cdot, \partial\Omega)$ è massima. Più in generale nel caso Dirichlet, quando la corrispondente energia è di ordine ε^N , ci si aspetta che la densità di energia $\varepsilon^{-N}u^{p+1}$ si concentri su una somma finita di masse di Dirac quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$, nel senso delle misure. I centri delle masse di Dirac (i punti di “blow-up”) sono in $\bar{\Omega}$ e la loro posizione dipende dalle distanze dalla frontiera oltre che dalle mutue distanze. Per domini con topologia, si ha una molteplicità di soluzioni per λ grande. Più recentemente sono state ottenute soluzioni con un unico picco per ogni punto critico “non degenerare” di $d(\cdot, \partial\Omega)$ e l'esistenza di soluzioni k -picchi.

1. – Risultati di classificazione e fenomeni di “blow up”: equivalenza tra indice di Morse ed energia

Soluzioni di $(P)_\varepsilon$ necessariamente esibiscono “blow-up” per $\lambda \rightarrow +\infty$. Abbiamo pertanto ottenuto una accurata descrizione del comportamento asintotico per $\lambda \rightarrow +\infty$ attraverso informazioni sull'energia o sull'indice di Morse delle soluzioni. Sia u_n una successione di soluzioni di $(P)_{\lambda_n}$ dove $\lambda_n \rightarrow +\infty$ per $n \rightarrow +\infty$. È facile mostrare che $\|u_n\|_\infty \rightarrow \infty$ per $n \rightarrow +\infty$. Usiamo la procedura standard di “blow up” per

descrivere il comportamento asintotico, sia P_n il punto di massimo di u_n : $u_n(P_n) = \|u_n\|_\infty$ e poniamo $\varepsilon_n = \lambda_n^{-\frac{1}{2}} V(P_n)^{-\frac{1}{2}}$ e $\tilde{\varepsilon}_n = \|u_n\|_\infty^{-\frac{p-1}{2}}$. Definiamo $U_n(y) = \varepsilon_n^{\frac{p-1}{2}} u_n(\varepsilon_n y + P_n)$, $y \in \Omega_n := \varepsilon_n^{-1}(\Omega - P_n)$. A meno di sottosuccessioni, dalla limitatezza di $(\lambda_n \tilde{\varepsilon}_n^2)^{-1}$, il profilo limite $U = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ è una soluzione limitata, $0 < U \leq U(0)$ in H , di

$$(P)_\infty \quad \begin{cases} -\Delta U + U = U^p & \text{in } H \\ U = 0 & \text{su } \partial H \end{cases}$$

con $H = \lim_{n \rightarrow +\infty} \Omega_n$ un iperspazio o $\mathbb{R}^N$.

Sia G un sottogruppo di $O(N)$ e Ω un dominio G -invariante. $U \in H_0^1(\Omega)$ soluzione positiva G -invariante di $-\Delta U + U = U^p$ in Ω è di indice di Morse G -invariante $m_G(U) = k$, $k \geq 1$ se k è la dimensione massima del sottospazio W_k di funzioni G -invarianti in $C_0^1(\Omega)$ tale che $Q_u(\varphi) \int_\Omega |\nabla \varphi|^2 + \varphi^2 - p U^{p-1} \varphi^2 < 0$ per ogni $\varphi \in W_k \setminus \{0\}$.

Risulta $m_{\{Id\}}(u) = m(u)$. Osserviamo che se U è soluzione del problema limite, il corrispondente operatore linearizzato è $L = -\Delta + -p U^{p-1}$ e l'indice di Morse di U è il numero di direzioni di negatività della forma quadratica associata al linearizzato. Per una classificazione di U richiediamo su u_n una delle seguenti ipotesi:

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n^{\frac{N}{2} \frac{p+1}{p-1}} \int_\Omega u_n^{p+1} < +\infty \quad \text{oppure} \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} m(u_n) < +\infty.$$

Finitezza dell'energia o dell'indice di Morse di U sono state usate recentemente in letteratura in [4]. Ispirati da [4] abbiamo ottenuto in [3] il risultato di classificazione:

TEOREMA 1. — *Sia U soluzione non negativa di $-\Delta U + U = U^p$ dove H è un semispazio o $\mathbb{R}^N$.*

- *Se H è un semispazio e $U \in L^\infty(H)$ con $U = 0$ su ∂H , allora $U = 0$.*
- *Se $H = \mathbb{R}^N$, assumiamo p sottocritico e una tra $\int_{\mathbb{R}^N} U^{p+1} < +\infty$ oppure*

$m(U) < +\infty$. Se $U \not\equiv 0$, allora U coincide con l'unica soluzione radiale di "ground-state" U_0 del problema. In particolare, U ha indice di Morse uno in $H^1(\mathbb{R}^N)$: il primo autovalore negativo $\mu_1 < 0$ è semplice con autofunzione φ_1 e il secondo $\mu_2 = 0$ ha molteplicità N con autospazio dato da $\text{span}\{\partial_{x_1} U, \dots, \partial_{x_N} U\}$.

Il Teorema di classificazione afferma che ogni successione di punti di blow-up P_n porta localmente almeno un'energia pari a $\int_{\mathbb{R}^N} U_0^{p+1}$ e una direzione di negatività per l'operatore linearizzato. Possiamo quindi controllare il numero delle successioni di blow-up grazie ad un'ipotesi di uniforme limitatezza dell'energia o dell'indice di Morse. Il decadimento esponenziale di U_0 produce stime puntuali su u_n : a meno di sottosuccessioni, posto

$$\bar{k} = \lim_{n \rightarrow +\infty} m(u_n) \quad \text{or} \quad \bar{k} = \left(\inf_{\Omega} V \right)^{\frac{N}{2} \frac{p+1}{p-1}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} U_0^{p+1} \right)^{-1} \lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n^{\frac{N}{2} \frac{p+1}{p-1}} \int_\Omega u_n^{p+1},$$

esistono $P_n^1, \dots, P_n^k$, $k \leq \bar{k}$, tali che per ogni $i, j = 1, \dots, k$, $i \neq j$:

$$\lambda_n |P_n^i - P_n^j|^2 \rightarrow +\infty, \quad \lambda_n d(P_n^i, \partial\Omega)^2 \rightarrow +\infty, \quad u_n(P_n^i) = \max_{\substack{\Omega \cap B_{R_n \lambda_n^{-\frac{1}{2}}}(P_n^i)}} u_n$$

per qualche $R_n \rightarrow +\infty$, per $n \rightarrow +\infty$. Inoltre, per qualche $C, \gamma > 0$ vale:
 $u_n(x) \leq C \lambda_n^{\frac{1}{p-1}} \sum_{i=1}^k e^{-\gamma \lambda_n^{\frac{1}{2}} |x - P_n^i|}$. Una fine analisi asintotica ci ha permesso di stabilire un legame tra indice di Morse ed energia nel caso di blow-up puntuale (si veda [3]):

TEOREMA 2. — *Sia u_n soluzione di $(P)_{\lambda_n}$ e assumiamo p sottocritico. L'uniforme limitatezza dell'energia e dell'indice di Morse sono equivalenti e vale*

$$\frac{1}{N+1} (\inf_{\Omega} V)^{\alpha} \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{\lambda_n^{-\alpha} \int_{\Omega} u_n^{p+1}}{\bar{m}(u_n) \int_{\mathbb{R}^N} U_0^{p+1}} \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\lambda_n^{-\alpha} \int_{\Omega} u_n^{p+1}}{m(u_n) \int_{\mathbb{R}^N} U_0^{p+1}} \leq (\sup_{\Omega} V)^{\alpha}$$

dove $\bar{m}(u_n)$ rappresenta l'indice di Morse "largo" (cioè il numero di autovalori non-positivi di $-\nabla + \lambda_n V - p u_n^{p-1}$) e $\alpha = \frac{p+1}{p-1} - \frac{N}{2}$.

Le costanti sono ottimali poiché U_0 ha energia $\int_{\mathbb{R}^N} U_0^{p+1}$ e esattamente $N+1$ autovalori non negativi per l'operatore linearizzato (contati con molteplicità).

La stima bilatera del precedente Teorema rappresenta una sorta di miglioramento della stima di Rozenbljum-Lieb-Cwikel (stima unilatera degli autovalori negativi di un operatore di Schrödinger $-\Delta + V$ in termini di un'opportuna norma di Lebesgue della parte negativa V_- di V , dove le costanti non sono esplicite).

Sia $S := \{P \in \bar{\Omega} : \limsup_{n \rightarrow +\infty} |u_n|_{\infty, B_r(P)} = +\infty \forall r > 0\}$ l'insieme dei punti di blow-up. Abbiamo la seguente localizzazione di S in termini di V :

$$\nabla V(P) = 0 \quad \forall P \in S \cap \Omega, \quad \partial_{\nu} V(P) \leq 0 \quad \forall P \in S \cap \partial\Omega,$$

dove $\nu(Q)$ denota la normale esterna unitaria di $\partial\Omega$ in Q .

Il caso $V = 1$ è più difficile e si basa su un'espansione ad ordini superiori. Il caso di non linearità critica $p = \frac{N+2}{N-2}$, $N \geq 3$, è abbastanza differente: soluzioni u_{λ} di $(P)_{\lambda}$ hanno energia illimitata ma anche l'indice di Morse illimitato per $\lambda \rightarrow +\infty$ come mostrato in

• M. Petralla, *Non existence of bounded-Morse index solutions for a Dirichlet problem with a large parameter*, in preparazione.

Se $\frac{N+2}{N-2} \leq p < p_{JL}(N)$, allora $m(u_n) \rightarrow +\infty$ per $n \rightarrow +\infty$, ove $p_{JL}(N)$ è l'esponente di Joseph e Lundgren.

2. – Simmetrie e fenomeni di "blow up"

Per condizioni di Neumann ci sono molti esempi di soluzioni che esibiscono blow-up su insiemi di dimesione positiva, come congetturato da W.M. Ni. Per condizioni di

Dirichlet risultati costruttivi di esistenza sono in [1]. La soluzione di “ground state” radiale in un anello ha energia e indice di Morse molto grande e le usuali tecniche di analisi asintotica basate sull’energia non funzionano. In [2] gli autori sviluppano un approccio asintotico alternativo. Nel lavoro di tesi abbiamo considerato soluzioni in un anello, invarianti rispetto all’azione di un gruppo a k -parametri $G \subset O(N)$. La principale difficoltà è data dall’insieme G_0 dei punti fissi sotto l’azione di G (questi esistono sempre in dimensione dispari). Per esempio, quando $V = 1$ la soluzione di ground state ha un punto di massimo esattamente in G_0 . Abbiamo utilizzato la presenza di V nel caso $G_0 \neq \emptyset$. Nel caso più semplice, sia G il gruppo delle rotazioni nel piano $\{x_1, x_2\}$. Per un potenziale G -invariante V , l’intento è stato di studiare il comportamento asintotico delle soluzioni G -invarianti (u_n, λ_n) con $\sup_n m_G(u_n) < \infty$. La difficoltà viene fuori da due possibili differenti situazioni:

- se la successione di blow-up P_n di u_n è lontana da G_0 o converge “lentamente” a G_0 , quando il profilo limite U risolve $(P)_\infty$ in $\mathbb{R}^{N-1}$ con indice di Morse finito;
- se P_n tende a G_0 non “lentamente”, allora U è una soluzione G -invariante di $(P)_\infty$ con $m_G(U) < +\infty$.

Nell’ultimo caso, è necessario un risultato di classificazione come il Teorema 1 per avere $U = U_0$. Il Teorema 1 si può estendere poiché le stime integrali cruciali seguono dalla disuguaglianza di stabilità su ηU^q , η una funzione radiale regolare, che è anche G -invariante. Un’attenta analisi asintotica combinata con identità di Pohozaev ci ha portati a formulare un teorema di classificazione del blow-up.

A partire da questi si sono dimostrati risultati più generali in un lavoro in preparazione

- P. Esposito, M. Petralla, *Symmetries and blow-up phenomena for a Dirichlet problem with a large exponent*.

BIBLIOGRAFIA

- [1] A. AMBROSETTI, A. MALCHIODI e W. M. NI, *Singularly perturbed elliptic equations with symmetry: existence of solutions concentrating on spheres. II*. Indiana Univ. Math. J., **53** (2) (2004), 297-329.
- [2] P. ESPOSITO, G. MANCINI, SANJIBAN SANTRA e P. N. SRIKANTH, *Asymptotic behavior of radial solutions for a semilinear elliptic problem on an annulus through Morse index*. J. Differential Equations **239**, 1 (2007), 1-15.
- [3] P. ESPOSITO e M. PETRALLA, *Pointwise blow-up phenomena for a Dirichlet problem*, Comm. in PDE, in pubblicazione.
- [4] A. FARINA, *On the classification of solutions of the Lane-Emden equation on unbounded domains of $\mathbb{R}^N$* . J. Math. Pures Appl., **87** (2007), 537-561.

Dipartimento di Matematica, Università di “Roma Tre”

e-mail: petralla@mat.uniroma3.it

Dottorato in Matematica

con sede presso l’Università di “Roma Tre” – Ciclo XXI

Direttore di tesi: prof. Pierpaolo Esposito, Università di “Roma Tre”