
La Matematica nella Società e nella Cultura

RIVISTA DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

ADAMARIA PERROTTA

Disuguaglianze di Hardy-Sobolev con resto

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. 4 (2011), n.1 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 59–62.

Unione Matematica Italiana

[<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2011_1_4_1_59_0>](http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2011_1_4_1_59_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Disuguaglianze di Hardy-Sobolev con resto

ADAMARIA PERROTTA

Nella tesi si affronta il problema della determinazione delle migliori costanti in disuguaglianze di tipo Sobolev o Hardy-Sobolev in cui compare un termine aggiuntivo comunemente detto *resto*.

È noto che la disuguaglianza di Sobolev classica è data da

$$(1) \quad \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \geq S(N, p) \|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)},$$

dove u è una funzione dotata di derivate nel senso delle distribuzioni, con gradiente in $L^p(\mathbb{R}^N)$, $1 < p < N$ e $p^* = \frac{Np}{N-p}$. Per la (1) sono noti il valore della migliore costante e l'espressione delle funzioni in corrispondenza delle quali tale costante viene raggiunta (cfr. [G.A. Bliss, 1930], [T. Aubin, 1976], [G. Talenti, 1976]). La (1) resta valida per ogni aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ e $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. La migliore costante è ancora $S(N, p)$ ma essa *non viene raggiunta*. Ciò suggerisce la possibilità di inserire un'opportuna norma della funzione u a secondo membro della (1), generando così una nuova famiglia di disuguaglianze dette *disuguaglianze di Sobolev con resto*.

Il primo risultato (cfr. [H. Brezis, L. Nirenberg, 1983]) migliora la (1) per $p = 2$ con l'aggiunta di una norma L^s di u

$$(2) \quad \|\nabla u\|_{L^2}^2 - S(N, 2)^2 \|u\|_{L^{2^*}}^2 \geq C_s(\Omega) \|u\|_{L^s}^2,$$

con $s < \frac{N}{N-2}$. Tale risultato, generalizzabile al caso $1 < p < N$ ed $s < \frac{N(p-1)}{N-p}$, non vale in corrispondenza dell'esponente $s = \frac{N(p-1)}{N-p}$. Questa difficoltà si supera sostituendo alla norma $\|u\|_{\frac{N(p-1)}{N-p}}$ la norma di u nello spazio delle funzioni debolmente $L^{\frac{N(p-1)}{N-p}}$ (cfr. [H. Brezis, E.H. Lieb, 1985])

$$(3) \quad \|\nabla u\|_{L^2}^2 - S(N, 2)^2 \|u\|_{L^{2^*}}^2 \geq C(\Omega) \|u\|_{L^{\frac{N}{N-2}, w}}^2,$$

dove $\|u\|_{\frac{N}{N-2}, w}$ denota la norma di u nello spazio $L^{\frac{N(p-1)}{N-p}} -$ debole con $p = 2$.

Problematiche analoghe si possono porre anche per la disuguaglianza di Sobolev generalizzata al caso di funzioni che si annullano solo su una parte di $\partial\Omega$. In [V.G. Maz'ja, 1986] e [P.L. Lions, F. Pacella, M. Tricarico, 1988] si dimostra l'esistenza di una costante $K(p, \Omega) > 0$ tale che

$$(4) \quad \|\nabla u\|_{L^p} \geq K(p, \Omega) \|u\|_{L^{p^*}}, \quad \forall u \in V^p(\Omega),$$

dove

$$V^p(\Omega) = \{u \in W^{1,p}(\Omega) \mid u \equiv 0 \text{ su } \Gamma_0\}, \quad \text{se } p > 1,$$

con $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$. Diversamente dalla (1), la costante $K(p, \Omega)$ (4) dipende dal dominio; per questo motivo si introduce la classe $\mathcal{E}_{\alpha_N}$ costituita da aperti Ω aventi la stessa costante isoperimetrica relativa, e si determina il valore ottimale di $K(p, \Omega)$ per $\Omega \in \mathcal{E}_{\alpha_N}$. In particolare risulta

$$K(p, \Omega) \geq K(p, \alpha_N),$$

con α_N misura del settore unitario di $\mathbb{R}^N$ di ampiezza α . Inoltre, poiché $K(p, \alpha_N)$ può essere raggiunta anche in aperti $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, sono state stabilite delle condizioni sufficienti affinché ciò non accada (cfr. [P.L. Lions, F. Pacella, M. Tricarico, 1988], [H. Egnell, F. Pacella, M. Tricarico, 1989], [Adimurthi, G. Mancini, 2002]). Sotto tali condizioni in [H. Egnell, F. Pacella, M. Tricarico, 1989] si dimostra che

$$(5) \quad \|\nabla u\|_{L^p}^p \geq [K(p, \alpha_N)]^p \|u\|_{L^{p^*}}^p + C_s(\Omega) \|u\|_{L^s}^p,$$

per ogni $0 < s < \frac{(p-1)N}{(N-p)}$, $1 < p < N$ ed $u \in V^p(\Omega)$. $C_s(\Omega)$ è una costante positiva che dipende solo da s ed Ω e l'esponente $s = \frac{(p-1)N}{(N-p)}$ non può essere raggiunto.

Analoghe questioni sono state affrontate partendo dalla classica disuguaglianza di Hardy

$$(6) \quad \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx \geq \left(\frac{N-p}{p}\right)^p \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^p}{|x|^p} dx,$$

dove u è una funzione dotata di derivate nel senso delle distribuzioni, con gradiente in $L^p(\mathbb{R}^N)$, $1 < p < N$ e $p^* = \frac{Np}{N-p}$ (cfr. [G. H. Hardy, 1919], [G.H. Hardy, J.E. Littlewood, G. Polya, 1964], [J.P. García Azorero, I. Peral Alonso, 1998]). La costante che compare nella (6) è la migliore possibile ma non è raggiunta in alcun caso.

In [H. Brezis, J.L. Vazquez, 1997] si dimostra che

$$(7) \quad \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{(N-2)^2}{4} \int_{\Omega} \frac{u^2}{|x|^2} dx \geq \Lambda_2 \left(\frac{\omega_N}{|\Omega|}\right)^{\frac{2}{N}} \|u\|_{L^2}^2, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega),$$

dove Λ_2 è il primo autovalore dell'operatore di Laplace nel cerchio unitario. La costante $\Lambda_2 \left(\frac{\omega_N}{|\Omega|}\right)^{\frac{2}{N}}$ è ottimale pur non essendo mai raggiunta in $H_0^1(\Omega)$. La (7) può essere poi generalizzata sia sostituendo la norma di u in L^2 con la norma in uno spazio L^s (cfr. [H. Brezis, J.L. Vazquez, 1997])

$$(8) \quad \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{(N-2)^2}{4} \int_{\Omega} \frac{u^2}{|x|^2} dx \geq C_s(\Omega) \|u\|_{L^s}^2,$$

con $s < \frac{2N}{N-2}$, sia utilizzando una norma di u in opportuni spazi di Lorentz (cfr. [N.

Chaudhuri, M. Ramaswamy, 2001])

$$(9) \quad \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{(N-2)^2}{4} \int_{\Omega} \frac{u^2}{|x|^2} dx \geq C(q, \alpha, \Omega) \left(\int_{\Omega} \frac{|u|^q}{|x|^{\alpha}} dx \right)^{\frac{2}{q}},$$

con $0 \leq \alpha < 2$ e $1 < q < \frac{2(N-\alpha)}{N-2} = 2_{\alpha}^*$. Il valore ottimale di $C(q, \alpha, \Omega)$ non è noto.

Per la disuguaglianza di Hardy con p qualunque, in [F. Gazzola, H.C. Granau, E. Mitidieri, 2004] si dimostra l'esistenza di una costante $C(p, \Omega) > 0$ tale che

$$(10) \quad \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx - \left(\frac{N-p}{p} \right)^p \int_{\Omega} \frac{|u|^p}{|x|^p} dx \geq C(p, \Omega) \|u\|_{L^p}^p,$$

per $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e $1 < p < N$. Inoltre è analizzato il comportamento asintotico di $C(p, \Omega)$, ma tuttora il suo valore ottimale non è noto.

I risultati conseguiti in questa tesi si collocano in tale contesto. Si è ottenuta la seguente stima riferendosi alla disuguaglianza di Sobolev (4) nello spazio $V^p(\Omega)$

$$(11) \quad \|\nabla u\|_{L^2}^2 \geq [K(2, \alpha_N)]^2 \|u\|_{L^{2^*}}^2 + C \|u\|_{\frac{N}{N-2}, w}^2 \quad \forall u \in V^2(\Omega),$$

(cfr. [3]). Si ricordi che al secondo membro della (5) non è possibile inserire la norma $\|u\|_{\frac{N(p-1)}{N-p}}$. In [3] si dimostra che l'esponente limite nella (5) viene raggiunto quando $p = 2$ se la norma $\|u\|_{\frac{N}{N-2}}$ è sostituita dalla norma debole $\|u\|_{\frac{N}{N-2}, w}$. Per ottenere la (11) ci si riconduce a un problema avente simmetria radiale, mediante la nozione di α -simmetrizzazione, e poi si adotta un'opportuna variante della tecnica utilizzata da Brezis e Lieb.

Riguardo la disuguaglianza di Hardy, nel lavoro [1] si determinano i valori della migliori costanti nella (9) per $q = 2$ e nella (10) per $p = 3$. Nel caso della (9) si ottiene

$$C(2, \alpha, \Omega) = w_0^{2-\alpha} \frac{\omega_N^{\frac{2}{N}}}{|\Omega|^{\frac{2-\alpha}{N}}},$$

dove w_0 è il primo zero della funzione

$$(12) \quad W(r) = J_0 \left(\frac{r^{1-\frac{\alpha}{2}}}{1-\frac{\alpha}{2}} \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{r^{(2-\alpha)k}}{(2-\alpha)^{2k} (k!)^2},$$

con J_0 funzione di Bessel di ordine zero. Per ottenere tale risultato ci si riconduce dapprima ad un problema avente simmetria radiale, mediante la nozione di simmetrizzazione secondo Schwarz, e successivamente si applicano metodi del Calcolo delle Variazioni unidimensionale. Particolarmente importante in questa seconda fase della dimostrazione è la risoluzione dell'equazione di Eulero di un opportuno funzionale associato alla disuguaglianza (9). La soluzione di tale equazione è fornita infatti dalla funzione $W(r)$ in (12).

Sempre in [1] viene calcolato il valore ottimale di $C(3, \Omega)$ nella (10) dato da

$$C(3, \Omega) = v_0^3 \left(\frac{\omega_N}{|\Omega|} \right)^{\frac{3}{N}},$$

dove v_0 è ancora una volta il primo zero della soluzione dell'equazione di Eulero di un opportuno funzionale associato alla (10). In questo caso tuttavia non è possibile determinare l'espressione analitica della soluzione di tale equazione. Il valore della costante v_0 è stato allora stimato mediante metodi numerici.

Le disuguaglianze di Sobolev ed Hardy possono anche essere viste come casi limite di una disuguaglianza generale dovuta ad Egnell (cfr. [V.G. Maz'ja, 1986] [H. Egnell, 1989])

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \geq C(p, v) \left(\int_{\mathbb{R}^N} u^{\frac{p(N+v)}{N-p}} |x|^v dx \right)^{\frac{N-p}{p(N+v)}},$$

con $1 < p < N$, $-p < v \leq 0$ (la (1) si ottiene per $v = 0$). Inoltre, con metodi analoghi a quelli utilizzati da Talenti per la (1), si può determinare l'espressione della miglior costante $C(p, v)$ e provare che essa è raggiunta (cfr. [H. Egnell, 1989], [T. Horiuchi, 1996]).

In [2] la disuguaglianza di Egnell viene ricavata attraverso una disuguaglianza di tipo Egnell con resto, che lega la norma L^p pesata di u alla sua norma $L^p - debole$, cioè

$$\|u\|_{\frac{p(N+v)}{N-p}, w}^{\frac{p(N+v)}{N-p}} \|\nabla u\|_{L^p} \geq A(N, p) \|u\|_{\frac{p(N+v)}{N-p}, |x|^v}^{\frac{p(N+v)}{N-p}} + B(N, p) \|u\|_{w, \frac{N-p}{N-p}}^{\frac{p(N+v)}{N-p}},$$

con $A(N, p)$ e $B(N, p)$ costanti opportune.

BIBLIOGRAFIA

- [1] S. CUOMO e A. PERROTTA, *On best constant in Hardy inequalities with a remainder term*, Preprint N. 29 - 2009, Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R. Caccioppoli", Università degli Studi di Napoli "Federico II". Sottomesso.
- [2] A. PERROTTA, *A note on a generalized Egnell inequality*, in preparazione.
- [3] A. PERROTTA e B. VOLZONE, *A note on a Sobolev Inequality with a remainder term for functions vanishing on part of the boundary*, Rend. Acc. Sci. fis. Mat. Napoli, **LXXIV** (2007), 35-50.

Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R. Caccioppoli"
 Università di Napoli "Federico II"
 e-mail: adamaria.perrotta@unina.it

Dottorato in Matematica con sede presso l'Università di Napoli – Ciclo XX
 Direttore di Ricerca: Prof. Angelo Alvino, Università di Napoli "Federico II"