Alice Fabbri

Anelli di funzioni di Kronecker e modelli proiettivi

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **4** (2011), n.1 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 51–54.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2011_1_4_1_51_0>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2011.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. IV, Aprile 2011, 51-54

Anelli di funzioni di Kronecker e modelli proiettivi

ALICE FABBRI

La tesi è articolata in due parti: nella prima vengono studiati i *domini vacanti*, ovvero i domini aventi un unico anello di funzioni di Kronecker, mentre nella seconda viene introdotta la nozione di *operazione star di tipo proiettivo* che consente di generalizzare la costruzione classica degli anelli di funzioni di Kronecker al caso di alcune estensioni di campi.

Le operazioni *star*, introdotte da Krull in una serie di lavori pubblicati dal 1936, sono operazioni di chiusura sull'insieme degli ideali (frazionari) non nulli di un dominio.

DEFINIZIONE 1. – *Sia R un dominio, K il suo campo dei quozienti e $F(R)$ l'insieme degli ideali frazionari non nulli di R. Una operazione star su R è un'applicazione $\star : F(R) \to F(R)$, $I \mapsto I^\star$ tale che, per ogni $I, J \in F(R)$ e $x \in K \setminus \{0\}$ le seguenti siano soddisfatte:*

($\star_1$) $R^\star = R$ *e* $(xI)^\star = xI^\star$;
($\star_2$) $I \subseteq I^\star$ *e se* $I \subseteq J$, *allora* $I^\star \subseteq J^\star$;
($\star_3$) $I^{\star\star} = I^\star$

Attraverso l'utilizzo delle operazioni star si può generalizzare a domini integralmente chiusi (non necessariamente di Dedekind) la teoria della divisibilità di Kronecker. Si può definire poi una star moltiplicazione ed isolare quelle operazioni star che, rispetto a questa moltiplicazione, sono cancellative sugli ideali finitamente generati. Tali operazioni star sono dette *endlich arithmetisch brauchbar* (in breve, *e.a.b.*). Per una operazione star e.a.b. $\star$ su un dominio R è valida la seguente generalizzazione del Lemma di Gauss: dati $f, g \in R[X]$ e denotando con $c(f)$ il contenuto di f, ovvero l'ideale di R generato dai coefficienti di f, allora $c(fg)^\star = c(f)^\star c(g)^\star$.

Un esempio di operazione star (e.a.b.), che ha un ruolo importante in questo contesto, è quello della b-operazione su un dominio integralmente chiuso: dato R integralmente chiuso e I un ideale non nullo di R, si denota con I^b la chiusura integrale di I (che coincide con il *completamento* di I). Su un dominio integralmente chiuso, l'applicazione che associa ad ogni ideale il suo completamento è una operazione star e.a.b.. Più precisamente, gli unici domini ad ammettere operazioni star e.a.b. sono quelli integralmente chiusi.

A partire da una operazione star e.a.b. su un dominio R, si può costruire *l'anello di funzioni di Kronecker di R*, generalizzazione di quel dominio che nella teoria di

Kronecker conteneva tutti i possibili massimi comuni divisori degli elementi del dominio di partenza. Sia $\star$ una operazione e.a.b. su R. L'anello di funzioni di Kronecker di R rispetto a $\star$ e all'indeterminata X è il dominio:

$$\mathrm{Kr}(R,\star) := \{0\} \cup \{f/g : 0 \neq f, g \in R[X], c(f)^{\star} \subseteq c(g)^{\star}\}.$$

Un ben noto teorema, dovuto a W. Krull, asserisce che un dominio integralmente chiuso può essere rappresentato come intersezione dei suoi sopra anelli di valutazione. Tale rappresentazione, eccetto per casi molto particolari, non è unica, in particolare è ridondante. Come dimostrato da R. Gilmer e W. Heinzer in [2], il numero di rappresentazioni (in particolare di quelle non ridondanti) di un dominio integralmente chiuso è legato al numero di operazioni star e.a.b. ammesse dal dominio e conseguentemente al numero di anelli di funzioni di Kronecker.

1. – Domini Vacanti

DEFINIZIONE 2. – *Un dominio integralmente chiuso R si dice vacante se ha un unico anello di funzioni di Kronecker, o, equivalentemente, se, date comunque due operazioni star e.a.b. $\star_1$ e $\star_2$ su R, si ha* $\mathrm{Kr}(R,\star_1) = \mathrm{Kr}(R,\star_2)$.

Gli esempi più semplici di domini vacanti sono costituiti dai domini di Prüfer e dai domini di valutazione. Precisamente ogni dominio di Prüfer è vacante (cf. [1, Proposition 32.18]), ma l'inclusione della classe dei domini di Prüfer in quella dei domini vacanti è stretta. Un esempio di dominio vacante che non sia di Prüfer viene dato da R. Gilmer in [1, Example 32.12] e si tratta di un dominio di *pseudo valutazione*, ovvero di un dominio quasi locale R con ideale massimale M e campo dei quozienti K, tale che $(M : M) = \{x \in K : xM \subseteq M\}$ è un dominio di valutazione con ideale massimale M.

Più esplicitamente, nell'esempio fornito da Gilmer risulta, dato k un campo, $(M : M) = k(X) + M$ un DVR e $R = k + M$.

Dopo aver dimostrato che per gran parte dei domini maggiormente studiati nell'ambito della teoria moltiplicativa degli ideali (ovvero i domini di Krull, quindi in particolare UFD e domini Noetheriani integralmente chiusi, i PvMD e più generalmente P$\star$MD con $\star$ operazione star arbitraria, i domini gcd e gcd generalizzati), la proprietà di essere vacante induce la proprietà più forte di essere di Prüfer, è stato possibile dimostrare che l'esempio di Gilmer rientra in una classe ben più ampia di domini di pseudo valutazione vacanti. Il risultato seguente fornisce una classificazione della proprietaà di unicità dell'anello di funzioni di Kronecker per domini di pseudo valutazione.

TEOREMA 1. – *Sia $R = (R, M)$ un dominio di pseudo valutazione integralmente chiuso, che non sia di valutazione. Sia $V := (M : M)$. Si supponga che V/M sia finito su un'estensione puramente trascendente di R/M. Sono equivalenti:*

(a) *R non è vacante;*
(b) *il grado di trascendenza di V/M su R/M è strettamente maggiore di* 1*;*
(c) *R ha infiniti non numerabili anelli di funzioni di Kronecker.*

Le costruzioni di tipo pullback da sempre si rivelano utili per la produzione di esempi. È stato possibile dimostrare che la proprietà di essere vacante si conserva nei diagrammi pullback noti come *estensioni CPI* (ovvero, *complete pre image*) per un anello di valutazione. Più esplicitamente, partendo da un dominio di valutazione V, si denoti con F la sua proiezione sull'ideale massimale. Si consideri poi un dominio di pseudo valutazione vacante R che abbia F come campo dei quozienti. La preimmagine di R tramite la proiezione di V su F risulta essere un dominio vacante quasi locale che non è di pseudo valutazione né di valutazione.

Utilizzando i domini di pseudo valutazione vacanti abbiamo anche fornito esempi di domini vacanti che non siano quasi locali, ma aventi un numero finito arbitrario di ideali massimali. Tali costruzioni sono in generale note come *locally pseudo valuation domains* ed hanno la proprietà di essere localmente di pseudo valutazione. Dopo aver dimostrato che essere vacante localmente implica essere vacante, siamo stati in grado di costruire esempi in cui tutte le localizzazioni sono domini di pseudo valutazione vacanti ottenendo così un dominio vacante che non è quasi locale (e non è di Prüfer).

2. – Anelli di funzioni di Kronecker proiettivi

Una delle più recenti generalizzazioni della costruzione degli anelli di funzioni di Kronecker è quella fornita da F. Halter-Koch in [3]. Utilizzando una costruzione assiomatica Halter-Koch introduce, per un campo K, la nozione di *Anello di K-funzioni*, che dipende solamente da collezioni di domini di valutazione di K e non più necessariamente da operazioni star e.a.b. Ciò nonostante, tutti gli anelli di funzioni di Kronecker di domini aventi K come campo dei quozienti possono essere ottenuti mediante la costruzione di Halter-Koch. La sua maggior generalità risiede nel poter associare un dominio con le stesse proprietà del classico anello di funzioni di Kronecker non più esclusivamente ad estensioni di tipo dominio - campo dei quozienti, ma addirittura ad estensioni di campi.

La seconda parte della tesi verte su una costruzione di operazioni star di tipo proiettivo. L'obiettivo è ottenere anelli di funzioni di Halter-Koch attraverso la stessa costruzione degli anelli di funzioni di Kronecker per una qualche operazione di tipo star, anche nel caso in cui una operazione star di tipo classico non può essere definita.

Sia $S := K[X_0, \dots, X_n]$ anello di polinomi su un campo K. Si consideri l'insieme dei fasci coerenti di ideali su Proj(S). L'idea è stata quella di costruire una operazione star proiettiva come un'applicazione dell'insieme di tali fasci di ideali in sé che soddisfi condizioni analoghe a quelle di una operazione star classica. Alla luce della biiezione tra l'insieme di tali fasci di ideali su Proj(S) e l'insieme degli ideali omogenei e saturi di S ci si restringe a considerare questi ultimi.

Una operazione star *omogenea* è un'applicazione dall'insieme degli ideali non nulli ed omogenei di S in sé, tale che le condizioni ($\star_1$), ($\star_2$) e ($\star_3$) siano soddisfatte per ogni coppia di ideali omogenei di S e per ogni funzione razionale non nulla $f/g, f, g \in S$ omogenei.

Vengono forniti esempi di operazioni star omogenee su S quali la b-operazione e la v-operazione (i.e. per I ideale di $S, I^v := (S : (S : I))$), oltre banalmente all'identità. Vi sono però su S operazioni star che non sono omogenee, presentiamo come esempio l'operazione star $v(M)$, con $M := (X_0, \ldots, X_{n-1})$ e mostriamo che esiste almeno un ideale omogeneo J di S tale che $J^{v(M)} := (M : (M : J))$ non è omogeneo.

Denotando con *sat* la saturazione di un ideale, si nota che anche questa è un'operazione star omogenea. Si definisce allora una *operazione star proiettiva* una operazione star omogenea $\star$ tale che $sat \circ \star = \star$.

Vengono poi presentati esempi di operazioni star proiettive (v e *sat*) e operazioni star omogenee ma non proiettive (l'identità e la b-operazione).

Successivamente, attraverso un processo di *deomogeneizzazione*, si associa ad un'operazione star proiettiva su S un insieme di $n+1$ operazioni star ognuna definita su uno dei domini $R_i := K\left[\frac{X_0}{X_i}, \ldots, \frac{X_n}{X_i}\right]$, per $i = 0, \ldots, n$. Viceversa, data una condizione di compatibilità tra operazioni star definite sugli R_i, è possibile costruire da esse una operazione star proiettiva attraverso un processo di *omogeneizzazione*. Vi è dunque una biiezione:

$$\left\{ \begin{array}{c} \{\star_0, \ldots, \star_n\} \\ \star_i = \text{ operazione star su } R_i, \\ \star_i \text{ compatibile con } \star_j,\ \forall i,j \end{array} \right\} \quad \longleftrightarrow \quad \left\{ \star = \text{operazione star proiettiva su } S \right\}$$

Si definisce poi l'analogo proiettivo della condizione e.a.b. per operazioni star, ovvero una operazione star proiettiva è e.a.b. se induce per deomogeneizzazione una operazione star e.a.b. su ogni R_i. Successivamente si definisce *l'anello di funzioni di Kronecker proiettivo* di S rispetto ad una operazione star proiettiva e.a.b. su S.

Si dimostra che attraverso questa costruzione si ottengono anelli di K-funzioni di Halter-Koch, non ottenibili con operazioni star di tipo classico, come anelli di funzioni di Kronecker proiettivi.

BIBLIOGRAFIA

[1] R. Gilmer, *Multiplicative Ideal Theory.* Volume 90 of Queen's Papers in Pure and Applied Mathematics (1992).

[2] R. Gilmer e W. Heinzer, *Irredundant intersections of valuation rings. Math. Z.*, **103** (1968), 306-317.

[3] F. Halter-Koch, *Kronecker function rings and generalized integral closures. Comm. Alg.*, **31** (1) (2003), 45-59.

Dipartimento di Matematica, Università degli Studi "Roma Tre"
e-mail: afabbri@mat.uniroma3.it
Dottorato in Matematica
con sede presso l'Università di "Roma Tre" – Ciclo XXII
Direttori di ricerca: Prof. Bruce Olberding, New Mexico State University;
Prof. Marco Fontana, Università degi Studi "Roma Tre"