La Matematica nella Società e nella Cultura

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Lorenzo Di Biagio

Sistemi pluricanonici per 3-fold, 4-fold e n-fold di tipo generale

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **4** (2011), n.1 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 47–50.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2011_1_4_1_47_0>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2011.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. IV, Aprile 2011, 47-50

Sistemi pluricanonici per 3-fold, 4-fold e *n*-fold di tipo generale

LORENZO DI BIAGIO

1. – Introduzione

Il problema fondamentale della geometria algebrica consiste nel classificare le varietà algebriche in classi di isomorfismo. Nella sua assoluta generalità questo problema trascende le tecniche per il momento disponibili, nondimeno costituisce ciò che potremmo chiamare un "problema guida", che offre continui stimoli alla ricerca e permette ai geometri di apprezzare i propri progressi.

Il nucleo centrale del problema di classificazione è certamente lo studio della geometria delle varietà algebriche e delle loro sottovarietà. Data quindi X varietà liscia complessa proiettiva di dimensione d, un possibile approccio per studiarne la geometria consiste nel considerare un'immersione di X in uno spazio proiettivo complesso $\mathbb{P}^N_{\mathbb{C}}$ ovvero, equivalentemente, considerare un fibrato lineare molto ampio su X (a cui, per definizione, è associata un'immersione di X). Poiché vi sono più modi per immergere X in uno spazio proiettivo, è necessario trovare una scelta "naturale" per tale immersione, ovvero una scelta naturale di un fibrato lineare su X.

L'unica scelta naturale disponibile di un fibrato lineare su X è il fibrato canonico, $K_X = \wedge^n T_X^\vee$, o i suoi multipli, i cosiddetti fibrati pluricanonici. Si può pensare, quindi, di utilizzare un multiplo del fibrato canonico per studiare la geometria della maggior parte delle varietà. Sfortunatamente non possiamo aspettarci che, per la maggior parte delle varietà di dimensione $d \geq 2$, qualche multiplo del canonico definisca un'immersione; possiamo però sperare che per la maggior parte delle varietà multipli del canonico definiscano mappe birazionali, ovvero mappe che risultano essere immersioni non globalmente su X ma su un aperto (di Zariski) di X.

È chiara quindi l'importanza dello studio degli invarianti numerici e geometrici che sono associati al fibrato (o divisore) canonico di X. Più specificatamente per ogni $n \in \mathbb{N}^+$, possiamo considerare sia l'n-esimo plurigenere, cioè la dimensione dello spazio delle sezioni globali del fibrato n-canonico, $P_n := h^0(X, nK_X)$, sia la mappa razionale (i.e., regolare su un aperto) associata al fibrato n-canonico, $\phi_n = \phi_{|nK_X|} : X \dashrightarrow \mathbb{P}(H^0(X, nK_X))$.

Focalizzando l'attenzione su varietà di tipo generale, cioè di dimensione di Kodaira massima, e di dimensione d si ha che per definizione i plurigeneri P_n crescono come n^d e ϕ_n è birazionale (sull'immagine) per n sufficientemente grande. È ragionevole quindi chiedersi se è possibile trovare esplicitamente un numero intero n_d che non dipenda da X (ma solo da d) e per cui $P_n \neq 0$ o ϕ_n è birazionale per ogni $n \geq n_d$.

Per curve e superfici di tipo generale risultati di questo tipo sono conosciuti da molto tempo: attraverso una semplice applicazione del teorema di Riemann-Roch sappiamo che per le curve $P_n \neq 0$ non appena $n \geq 1$ e ϕ_n è birazionale non appena $n \geq 3$; per quanto riguarda le superfici Bombieri ha dimostrato nel 1973 che $P_n \neq 0$ per $n \geq 2$ e ϕ_n è birazionale per $n \geq 5$.

Per varietà di dimensione superiore recenti progressi sono stati fatti indipendentemente da Hacon-McKernan (cfr. [2]) e Takayama (cfr. [4]) usando idee di Tsuji. Essi hanno dimostrato che in effetti, per ogni d, questo n_d esiste, anche se i loro metodi non ne consentono un calcolo diretto. Nel caso dei 3-fold (i.e., varietà di dimensione 3) J.A. Chen and M. Chen hanno dimostrato in [1] che $P_n > 0$ per ogni $n \geq 27$ e che ϕ_n è birazionale per ogni $n \geq 73$.

D'altra parte è ragionevole aspettarsi di ottenere risultati espliciti per dimensioni basse (e anche migliori rispetto a quelli esistenti nel caso dei 3-fold) assumendo che X abbia volume sufficientemente alto, dove $\mathrm{vol}(X) = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{d!h^0(nK_X)}{n^d}$ è una misura asintotica della dimensione dello spazio delle sezioni globali dei fibrati pluricanonici. Si noti come tale ipotesi sul volume non sia da considerarsi troppo restrittiva, dato che le varietà di tipo generale di dimensione d e volume al più M, con M costante positiva fissata, sono birazionalmente limitate, ovvero le varietà di tipo generale, di dimensione d e volume limitato sono birazionali a sottovarietà di $\mathbb{P}^{2d+1}$ con grado limitato, e dunque possono essere birazionalmente organizzate in un numero finito di famiglie.

G.T. Todorov (cfr. [5]) ha dimostrato che nel caso di 3-fold di tipo generale e volume sufficientemente alto allora $P_2 \neq 0$ e ϕ_5 è birazionale.

2. – Risultati effettivi sui sistemi pluricanonici per 3-fold e 4-fold di tipo generale

Nella tesi di dottorato "Pluricanonical systems for 3-folds, 4-folds and n-folds of general type", partendo dal lavoro di Todorov, abbiamo sviluppato una strategia per studiare in modo effettivo il non annullamento (e la dimensione) dei sistemi pluricanonici e la birazionalità delle mappe pluricanoniche per varietà di tipo generale e volume alto, riuscendo a ottenere risultati espliciti nel caso di varietà di dimensione bassa.

In particolare siamo riusciti a migliorare e rendere più specializzati i risultati di Todorov per i 3-fold, a ottenere risultati espliciti nel caso dei 4-fold e in parte anche nel caso dei 5-fold. Abbiamo ottenuto anche delle caratterizzazioni per i 3-fold di tipo generale e volume alto per i quali la mappa 4-canonica non è birazionale.

Nello specifico, nel caso dei 3-fold di tipo generale abbiamo dimostrato i seguenti

TEOREMA 1. – *Sia X una varietà liscia, proiettiva, complessa, di dimensione* 3 *e di tipo generale e tale che* $\mathrm{vol}(X) > \alpha^3$. *Se* $\alpha \geq 879$ *allora* $h^0(2K_X) \geq 1$ *e se* $\alpha \geq 432(n+1) - 3$ *allora* $h^0((n+1)K_X) \geq n$, *per ogni* $n \geq 2$.

TEOREMA 2. – *Sia X una varietà liscia, proiettiva, complessa, di dimensione* 3 *e di tipo generale e tale che* $\mathrm{vol}(X) > \alpha^3$. *Se* $\alpha > 1917\sqrt{[3]}2$ *allora* $|lK_X|$ *determina una mappa birazionale per ogni* $l \geq 5$.

In realtà in entrambi i casi abbiamo stime più precise su α in dipendenza anche del genere delle curve che vivono su X. Per semplicità espositiva rimandiamo però, per questo, alla versione integrale della tesi di dottorato.

Abbiamo ottenuto risultati analoghi anche nel caso dei 4-fold di tipo generale. Utilizzando risultati generali che abbiamo dimostrato valere per varietà di ogni dimensione e utilizzando un limite inferiore sul volume dei 3-fold di tipo generale trovato da J.Chen e M.Chen (cfr. [1]) abbiamo dimostrato i seguenti:

TEOREMA 3. – *Sia X una varietà liscia, proiettiva, complessa, di dimensione* 4 *e di tipo generale e tale che* $\mathrm{vol}(X) > \alpha^4$. *Se* $\alpha \geq 1709$ *allora* $h^0(X, (1+m)K_X) \geq n$ *per ogni* $n \geq 1$ *e ogni* $m \geq 191n$.

TEOREMA 4. – *Sia X una varietà liscia, proiettiva, complessa, di dimensione* 4 *e di tipo generale e tale che* $\mathrm{vol}(X) > \alpha^4$. *Se* $\alpha \geq 2816$ *allora* $|lK_X|$ *determina una mappa birazionale per ogni* $l \geq 817$.

Come prima in realtà abbiamo stime più precise su α, in dipendenza del genere delle curve che vivono su X.

Nel caso di varietà di tipo generale di dimensione d, quando l è sufficientemente grande, abbiamo anche trovato funzioni $\alpha_1(d,l), \alpha_2(d,l)$ tali che se $\mathrm{vol}(X) > \alpha_1(d,l)^d$ allora o $h^0(lK_X) \neq 0$ oppure X è birazionale a una fibrazione su una curva tale che la fibra generale ha volume limitato e se $\mathrm{vol}(X) > \alpha_2(d,l)^d$ allora o $|lK_X|$ è birazionale oppure X è birazionale a uno spazio fibrato su una curva tale che la fibra generale ha volume limitato. Entrambe queste funzioni dipendono dai limiti inferiori dei volumi delle varietà di dimensione uguale o minore di $d-2$, permettendoci, quindi, di trovare risultati espliciti nel caso dei 5-fold di tipo generale.

3. – Caratterizzazione dei 3-fold di tipo generale con mappa 4-canonica non birazionale

Al contrario del caso dei 4-fold, i risultati sui 3-fold sono, in un certo senso, ottimali: infatti esistono 3-fold di volume arbitrariamente grande tali che $P_1 = 0$ o ϕ_4 non è birazionale. Quindi un altro interessante problema che si può affrontare nello studio dei 3-fold di tipo generale è il cercare di stabilire quando ϕ_4 è birazionale. È chiaro che ϕ_4 non può essere birazionale se X è birazionale a una fibrazione su una curva B tale che la fibra generale è una superficie minimale S di tipo $(1,2)$, ovvero una superficie minimale tale che $\mathrm{vol}(S) = K_S^2 = 1$ e tale che il genere geometrico $p_g = 2$, dato che in questo caso $|4K_S|$ non determina una mappa birazionale. In generale il viceversa è falso. Siamo riusciti a dimostrare, però, che il viceversa vale nel caso X abbia volume sufficientemente grande. In particolare abbiamo dimostrato il seguente:

TEOREMA 5. – *Sia X una varietà liscia, proiettiva, complessa, di dimensione* 3 *e di tipo generale e tale che* $\mathrm{vol}(X) > \alpha^3$. *Se* $\alpha > 6141\sqrt[3]{2}$ *allora* $|4K_X|$ *non determina una mappa birazionale se e solo se X è birazionale a una fibrazione X'', con $f : X'' \to B$, dove B è una curva, tale che la fibra generale X''_b è una superficie minimale liscia di tipo* $(1, 2)$.

Come al solito, abbiamo stime più precise su α in dipendenza del genere delle curve che vivono su X.

4. – Tecniche dimostrative

Le dimostrazioni dei risultati esposti si basano sulle tecniche algebrico-geometriche del programma dei modelli minimali. Più precisamente si basano sullo studio delle singolarità di coppie. L'idea di base, già applicata con successo da Angehrn-Siu, Hacon-McKernan, Takayama, Todorov e molti altri, consiste nel produrre centri log-canonici di certi divisori, tagliarne la dimensione e infine produrre sezioni dei fibrati pluricanonici per pull-back. Quando, per 3-fold di tipo generale, questo processo di riduzione delle dimensioni dei centri log-canonici non consentirebbe di ottenere risultati espliciti per sistemi pluricanonici di ordine basso, allora, seguendo Todorov, abbiamo applicato dei risultati di McKernan-Todorov sulle famiglie di tigri per ricondurci allo studio di fibrazioni.

BIBLIOGRAFIA

[1] JUNGKAI A. CHEN e MENG CHEN, *Explicit birational geometry of threefolds of general type,* II. arXiv:0810.5044, 2008.
[2] CHRISTOPHER D. HACON e JAMES MCKERNAN, *Boundedness of pluricanonical maps of varieties of general type*. Invent. Math., **166** (1) (2006), 1-25.
[3] CHRISTOPHER D. HACON e JAMES MCKERNAN. *Boundedness Results in Birational Geometry*. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, 2010.
[4] SHIGEHARU TAKAYAMA. *Pluricanonical systems on algebraic varieties of general type*. Invent. Math., **165** (3) (2006) 551-587.
[5] GUEORGUI TOMOV TODOROV. *Pluricanonical maps for threefolds of general type*. Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **57** (4) (2007), 1315-1330

Dipartimento di Matematica, Università di Roma "La Sapienza"
e-mail: lorenzo.dibiagio@gmail.com
Dottorato in Matematica
con sede presso l'Università di Roma "La Sapienza" – Ciclo XXI
Direttore di ricerca: Prof. Angelo Felice Lopez, Università di Roma Tre