La Matematica nella Società e nella Cultura

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Giuseppina Autuori

Sistemi di Kirchhoff: stabilità asintotica, non esistenza globale e blow up

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **4** (2011), n.1 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 3–6.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2011_1_4_1_3_0>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2011.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. IV, Aprile 2011, 3-6

Sistemi di Kirchhoff: stabilità asintotica, non esistenza globale e blow up

GIUSEPPINA AUTUORI

Questa tesi affronta lo studio della stabilità asintotica, della non esistenza globale e del blow up all'infinito delle soluzioni di sistemi non lineari di Kirchhoff, governati da forze di sorgente dipendenti dal tempo, termini di smorzamento esterni e/o intrinseci ed energie fortemente non lineari. Il lavoro prodotto si basa sugli articoli [3]–[9] che sono stati estesi in diverse direzioni, insieme a numerosi altri lavori già apparsi in letteratura.

La prima questione trattata è la stabilità asintotica delle soluzioni del problema in $\mathbb{R}_0^+ \times \Omega$

$$(\mathscr{P}_1) \qquad \begin{cases} u_{tt} - M(\mathscr{I}u(t))\Delta_{p(x)}u + \mu\|u\|^{p(x)-2}u + Q(t,x,u,u_t) + f(t,x,u) = 0, \\ u(t,x) = 0 \qquad\qquad \text{su } \mathbb{R}_0^+ \times \partial\Omega, \end{cases}$$

nell'assetto degli spazi di Sobolev ad esponente variabile. Qui e nel seguito $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è un dominio limitato e $u = (u_1, \dots, u_N) = u(t,x)$ rappresenta lo spostamento vettoriale, dove $N \geq 1$ e $\mu \geq 0$. L'operatore ellittico non omogeneo $p(x)$–*Laplaciano* è definito come

$$\Delta_{p(x)}u = \operatorname{div}(\|Du\|^{p(x)-2}Du),$$

dove $p \in C(\overline{\Omega})$ è tale che $\min_{x\in\overline{\Omega}} p(x) > 1$. Il funzionale

$$\mathscr{I}u(t) = \int_\Omega \frac{\|Du(t,x)\|^{p(x)}}{p(x)}dx$$

è l'*integrale di Dirichlet a livello* $p(x)$ associato al sistema. La nonlinearità Q rappresenta una *dissipazione* che agisce sul corpo, f è una *forza esterna* ed M è una funzione di Kirchhoff, il cui principale prototipo è

$$M(\tau) = a + b\gamma\tau^{\gamma-1}, \quad \tau \geq 0, \quad a,b \geq 0 \quad a+b>0.$$

Il sistema $(\mathscr{P}_1)$ appare in alcuni sottocasi, in molti problemi di fisica matematica. Nel caso $p(x) \equiv 2$, $\mu = 0$ e $n = N = 1$, esso descrive le vibrazioni non lineari di una corda elastica.

Il primo risultato di stabilità per $(\mathscr{P}_1)$ è il Teorema 1.1.5, in cui si prova che ogni soluzione globale del sistema è stabile, sotto opportune ipotesi di crescita su f e Q. L'analisi è condotta attraverso lo studio dell'*energia associata al sistema*, dove diciamo che *una soluzione globale è stabile se e solo se l'energia tende a zero quando il tempo va all'infinito*. Lo strumento principale della dimostrazione, introdotto da *Pucci* e *Serrin* in [6], è l'esistenza a priori di un'opportuna funzione ausiliaria k, di cui si costruiscono alcuni prototipi nel Corollario 1.1.6 della tesi.

Problemi del tipo $(\mathscr{P}_1)$ sono stati considerati inizialmente per energie potenziali che provengono da forze smorzanti, e successivamente sono stati considerati anche gli effetti di forze amplificanti, passando dalla stabilità globale a quella locale e assumendo delle condizioni di crescita su f solo per u piccolo in norma.

Lo scopo è raggiunto grazie ad una profonda analisi qualitativa condotta sulla geometria del sistema, che consente di raggiungere la stabilità purché i dati iniziali appartengano ad una specifica regione $\tilde{\Sigma}_0$ nello spazio delle fasi, cf. Fig. 1. In particolare, se la coppia $(\|u(0,\cdot)\|_{q(\cdot)}, Eu(0)) \in \tilde{\Sigma}_0$ allora $(\|u(t,\cdot)\|_{q(\cdot)}, Eu(t)) \in \tilde{\Sigma}_0$ per ogni $t \in \mathbb{R}_0^+$, lungo ogni soluzione globale u di $(\mathscr{P}_1)$, cioè la traiettoria di $(\|u(t,\cdot)\|_{q(\cdot)}, Eu(t))$ giace nella stessa regione al crescere del tempo, una volta che i dati iniziali $(\|u(0,\cdot)\|_{q(\cdot)}, Eu(0))$ appartengono a essa. Qui $\|\cdot\|_{q(\cdot)}$ denota la norma nello spazio di Lebesgue anisotropico $L^{q(\cdot)}(\Omega)$ e $q(\,\cdot\,)$ è un esponente variabile legato alla crescita di f rispetto ad u.

In ingegneria meccanica spesso si incontrano strutture composte da parti rigide ed altre elastiche. Le parti flessibili sono certamente sensibili ai disturbi esterni ed inserire un termine di dissipazione interna può condurre a risultati soddisfacenti per la stabilità. Simili considerazioni ci hanno condotto a considerare il problema più delicato in $\mathbb{R}_0^+ \times \Omega$

$$(\mathscr{P}_2) \qquad \begin{cases} u_{tt} - M(\mathscr{T}u(t))(\Delta_{p(x)}u + g(t)\Delta_{p(x)}u_t) + \mu|u|^{p(x)-2}u + Q(t,x,u,u_t) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + f(t,x,u) = 0, \\ u(t,x) = 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \text{su } \mathbb{R}_0^+ \times \partial\Omega, \end{cases}$$

con $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+)$. Il termine $g(t)\Delta_{p(x)}u_t$ rappresenta lo smorzamento interno di tipo *Kelvin–Voigt* e chiaramente $(\mathscr{P}_2)$ include $(\mathscr{P}_1)$ quando $g \equiv 0$.

Combinando le tecniche usate in [3] e [4] per sistemi fortemente smorzati, con le idee introdotte da *Pucci* e *Serrin* in [8] per sistemi d'onda e in [4] per problemi di Kirchhoff, in questa tesi diamo risultati di stabilità sia locali che globali per $(\mathscr{P}_2)$. Inoltre molte situazioni interessanti si verificano quando le funzioni k e g sono in qualche modo correlate. In taluni di questi casi, infatti, è possibile rimuovere un controllo dal basso per Q, ma in ogni caso il modello $(\mathscr{P}_2)$ è assunto non degenere, ossia con $a > 0$.

Risultati migliori sono stati ottenuti, anche nel caso degenere, per il modello più semplice in $\mathbb{R}_0^+ \times \Omega$

$$(\mathscr{P}_3) \qquad \begin{cases} u_{tt} - M(\mathscr{T}u(t))\Delta_{p(x)}u - g(t)\Delta_{p(x)}u_t + \mu|u|^{p(x)-2}u + Q(t,x,u,u_t) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + f(t,x,u) = 0, \\ u(t,x) = 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \text{su } \mathbb{R}_0^+ \times \partial\Omega, \end{cases}$$

che coincide chiaramente con $(\mathscr{P}_2)$ quando $a > 0$ e $b = 0$. Inoltre tale analisi è stata condotta anche per sistemi poliarmonici fortemente smorzati in $\mathbb{R}_0^+ \times \Omega$ del tipo

$$(\mathscr{P}_4) \quad u_{tt} + M(\|\mathcal{D}_L u\|_2^2)(-\Delta)^L u + g(t)(-\Delta)^L u_t + \mu u + Q(t,x,u,u_t) + f(t,x,u) = 0,$$

con $L \geq 1$, che includono il modello $(\mathscr{P}_1)$ quando $p(x) \equiv 2$, $L = 1$ e $g \equiv 0$, e, quando $L \geq 2$,

$$(\mathscr{P}_5) \quad u_{tt} + (-\Delta)^L(u + g(t)u_t) + M(\|\mathcal{D}_{L-1}u\|_2^2)(-\Delta)^{L-1}u + \mu u + Q(t,x,u,u_t) + f(t,x,u) = 0,$$

dove, come prima, $g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+)$ e

$$\mathcal{D}_L u = \begin{cases} D\Delta^j u & \text{se } L = 2j+1 \\ \Delta^j u & \text{se } L = 2j \end{cases}.$$

Nel caso biarmonico $L = 2$, i problemi $(\mathscr{P}_4)$ e $(\mathscr{P}_5)$ sono largamente trattati in letteratura in molte versioni semplificate. Infatti, i modelli fisici originali, governati da sottocasi di $(\mathscr{P}_4)$ e $(\mathscr{P}_5)$, sono membrane elastiche di tipo *Woinowsky–Krieger*, con dissipazione intrinseca di tipo *Kelvin–Voigt* e smorzamento effettivo Q nel dominio. Nel caso di interesse fisico $L = 2$, un sottocaso interessante di $(\mathscr{P}_5)$ si ha quando $g \equiv 0$, cioè quando $(\mathscr{P}_5)$ si riduce a

$$(\mathscr{P}_6) \qquad u_{tt} + (-\Delta)^L u - M(\|Du\|_2^2)\Delta u + \mu u + Q(t,x,u,u_t) + f(t,x,u) = 0.$$

Per $(\mathscr{P}_4)$–$(\mathscr{P}_6)$ diamo risultati di stabilità sia locale che globale, sotto le condizioni omogenee di Dirichlet al bordo $D^\alpha u(t,x) = 0$ per ogni multi-indice α tale che $\|\alpha\| \leq 2(L-1)$ su $\mathbb{R}_0^+ \times \partial\Omega$, nell'assetto classico degli spazi di Sobolev standard. Tali risultati, insieme agli altri contenuti nella tesi sulla stabilità di $(\mathscr{P}_1)$–$(\mathscr{P}_3)$, hanno portato alla stesura dei recenti lavori [1]–[2].

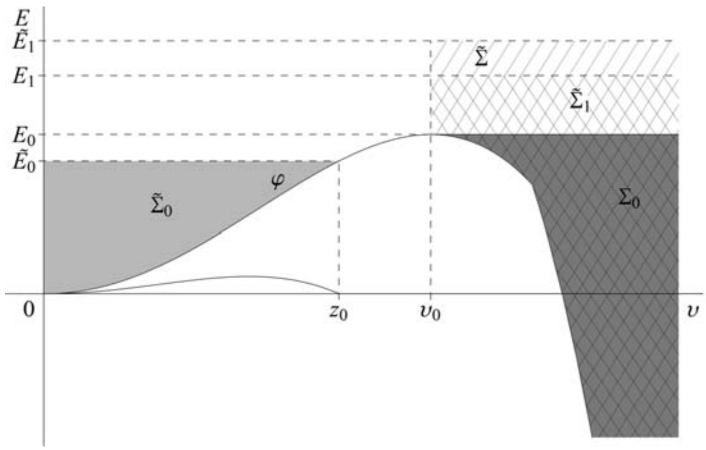

Fig. 1. – Lo spazio delle fasi (v, E). Qui $E = Eu(0)$, dove Eu rappresenta l'energia naturale associata alle soluzioni u del sistema, mentre v denota $\|u(0,\cdot)\|_{q(\cdot)}$.

Il secondo tema trattato nella tesi è la non esistenza globale di soluzioni di $(\mathscr{P}_1)$, $(\mathscr{P}_4)$–$(\mathscr{P}_5)$ con $g \equiv 0$, e $(\mathscr{P}_6)$. Allo scopo, la forza f è considerata a secondo membro dell'equazione, essendo la non continuazione un problema duale rispetto alla stabilità, e i risultati più generali ottenuti si hanno assumendo che l'energia iniziale sia limitata superiormente da un valore critico $\tilde{E}_1$. In tal modo estendiamo completamente la regione di non esistenza globale per i sistemi di Kirchhoff anisotropici da Σ_0, usualmente trattata in letteratura, a $\tilde{\Sigma}$, grazie ad un raffinamento di un argomento introdotto da *Pucci* e *Serrin* in [9], e ad una nuova combinazione dei classici metodi della valle di potenziale e di concavità.

Quando in un sistema d'onde compare un termine di dissipazione intrinseco, sorgono molte difficoltà tecniche. Questa è la ragione per cui, nei modelli $(\mathscr{P}_2)$–$(\mathscr{P}_5)$, ci siamo ristretti al caso $p = 2$. Per essi, inoltre, non è più possibile utilizzare le stime sul potenziale legato alla forza esterna f, al fine di ottenere la non continuazione delle soluzioni locali, ma è necessario rifarsi all'operatore che coinvolge la parte ellittica del sistema, secondo un'idea introdotta in [9] per equazioni di evoluzione astratte e ripresa più tardi in [5] per sistemi di Kirchoff anisotropici. Pertanto per $(\mathscr{P}_2)$–$(\mathscr{P}_5)$ abbiamo considerato il blow up all'infinito della norma delle soluzioni globali, anche nel caso in cui $\|g\|_\infty = \infty$. I teoremi più generali sono stati ottenuti per dati iniziali appartenenti a $\tilde{\Sigma}_1$ e numerose applicazioni sono state date in Σ_0.

BIBLIOGRAFIA

[1] AUTUORI G. e PUCCI P., *Local Stability for Polyharmonic Kirchhoff Systems*, Appl. Anal., (2011), in corso di stampa.

[2] AUTUORI G. e PUCCI P., *Asymptotic stability for Kirchhoff Systems in variable exponent Sobolev spaces*, Complex Var. Elliptic Equ. (2011), in corso di stampa.

[3] AUTUORI G., PUCCI P. e SALVATORI M.C., *Asymptotic stability for Nonlinear Kirchhoff systems*, Nonlinear Anal. Real World Appl., **10** (2009), 889-909.

[4] AUTUORI G., PUCCI P. e SALVATORI M.C., *Asymptotic stability for Anisotropic Kirchhoff systems*, J. Math. Anal. Appl., **352**, (2009), 149-165.

[5] AUTUORI G., PUCCI P. e SALVATORI M.C., *Global Nonexistence for Nonlinear Kirchhoff Systems*, Arch. Rational Mech. Anal., **196** (2010), 489-516.

[6] PUCCI P. e SERRIN J., *Precise damping conditions for global asymptotic stability of second order systems*, Acta Math., **170** (1993), 275-307.

[7] PUCCI P. e SERRIN J., *Asymptotic stability for non–autonomous dissipative wave systems*, Comm. Pure Appl. Math., **XLIX** (1996), 177-216.

[8] PUCCI P. e SERRIN J., *Local asymptotic stability for dissipative wave systems*, Israel J. Math., **104**, (1998), 29-50.

[9] PUCCI P. e SERRIN J., *Global nonexistence for abstract evolution equations with positive initial energy*, J. Diff. Equations, **150**, (1998), 203-214.

Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Perugia
e-mail: autuori@dmi.unipg.it
Dottorato in Matematica, con sede presso l'Università di Firenze – Ciclo XXII
Direttore di ricerca: Prof. Patrizia Pucci, Università di Perugia