La Matematica nella Società e nella Cultura

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Roberto Cavoretto

Metodi di approssimazione meshfree, algoritmi e applicazioni

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **4** (2011), n.1 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 27–30.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2011_1_4_1_27_0>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2011.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. IV, Aprile 2011, 27-30

Metodi di approssimazione meshfree, algoritmi e applicazioni

ROBERTO CAVORETTO

1. – Introduzione

La tesi inizia con un'ampia rassegna di proposte di soluzione del problema di interpolazione su dati sparsi utilizzando metodi meshfree in più dimensioni spaziali. Nella maggior parte della letteratura corrente riguardante la teoria dell'approssimazione il cosiddetto metodo delle funzioni a base radiale e il metodo ai minimi quadrati locale (con il metodo di Shepard come caso particolare) sono trattati come due approcci separati per l'approssimazione multivariata su dati sparsi. Invece, nella tesi, ciascuno di questi metodi viene esaminato in modo approfondito e poi ulteriormente sviluppato e integrato in modo tale che le combinazioni di entrambi gli approcci possano essere applicate con successo per la risoluzione di difficili problemi applicativi con dati irregolarmente distribuiti, come nel caso di dati traccia.

L'irregolarità nella distribuzione dei dati causa grandi difficoltà nell'applicazione dei tradizionali metodi di approssimazione. Il principale risultato della tesi è probabilmente aver sviluppato un metodo meshfree in grado di gestire queste situazioni con precisione ed efficienza. Infatti, si è mostrato che il metodo proposto fornisce prestazioni migliori rispetto al metodo di R.J. Renka [4], che attualmente è considerato una procedura standard nel campo della teoria dell'approssimazione.

Dopo i primi due capitoli introduttivi contenenti strumenti matematici e fondamenti teorici di base, dal Capitolo 3 al Capitolo 7 la tesi entra nel vivo e vengono presentati algoritmi di approssimazione specifici sviluppati per affrontare alcune applicazioni:

- l'individuazione di faglie e l'approssimazione di linee di faglia (un argomento di notevole importanza in un paese a rischio sismico);
- l'interpolazione di dati sparsi e in particolare di dati traccia sia su regioni piane sia sulla superficie della sfera;
- la registrazione e la trasformazione di immagini mediche.

Il capitolo finale contiene lo studio di una classe di funzioni spline per l'interpolazione uni e multivariata di dati sparsi.

Una trattazione estesa e dettagliata sugli aspetti teorici, algoritmici e applicativi dei metodi di approssimazione meshfree può essere trovata nelle monografie di M.D. Buhmann [1], H. Wendland [5] e G.E. Fasshauer [2].

2. – Individuazione e approssimazione di linee di faglia

La modellazione di superfici discontinue gioca un ruolo importante in molte applicazioni geofisiche (come ad esempio la modellazione di serbatoi petroliferi), così come nella rappresentazione accurata ed efficiente di immagini (soprattutto immagini mediche) generate dalle moderne tecniche di imaging. In particolare, nei Capitoli 3 e 4 vengono studiati un metodo per l'individuazione di faglie verticali e un metodo adattabile per la loro identificazione muovendo da un insieme di dati sparsi. Quindi, applicando una potente tecnica di raffinamento, vengono presentate alcune tecniche per ottenere un'approssimazione accurata delle linee di faglia, considerando procedure basate su approssimazioni poligonali, sui minimi quadrati e sull'approssimazione ottima. Gli algoritmi sviluppati sono flessibili ed efficienti, in quanto sfruttano la natura meshfree del metodo di Shepard locale

$$F(x;\mathcal{N}_k)=\sum_{i=1}^{n_k} f_i\,\frac{d(x,x_i)^{-2}}{\sum_{j=1}^{n_k} d(x,x_j)^{-2}},\qquad F(x_i;\mathcal{N}_k)=f_i,\quad i=1,2,\dots,n_k,$$

dove $d(x,x_j)$ è la distanza Euclidea e $\mathcal{N}_k$ è l'insieme degli n_k punti più vicini a x. Tale formula permette un raffinamento dell'approssimazione relativamente semplice. Questo risultato è ottenuto accoppiando lo schema di approssimazione meshfree con una tecnica di localizzazione che consente l'elaborazione rapida e potenzialmente parallela dei dati. È stato inoltre provato che gli algoritmi sono in grado di trattare con successo superfici con faglie multiple che si biforcano e/o intersecano in modo complicato. Poichè gli algoritmi contengono un parametro di soglia che deve essere impostato dall'utente, un eventuale sviluppo potrebbe essere quello di creare una procedura automatica per scegliere questo parametro, forse sulla base di alcune proprietà statistiche dei dati sottostanti utilizzando la stima di massima verosimiglianza o la cross-validation.

3. – Interpolazione di dati sparsi e dati traccia sul piano e sulla sfera

Nel Capitolo 5 viene presentato un nuovo ed efficiente algoritmo per l'interpolazione bivariata di grandi insiemi di dati sparsi e dati traccia. Il metodo risolutivo è locale e coinvolge un'interpolante di Shepard modificata che fa uso di approssimanti locali. L'algoritmo associato è implementato e ottimizzato applicando una procedura di ricerca dei punti vicini. Nello specifico, questa tecnica si basa principalmente sulla partizione del dominio in un numero opportuno di strisce, la costruzione di intorni locali ed infine l'impiego di una procedura di ricerca basata sulle strisce. Questa struttura (a strisce) risulta particolarmente adatta per la trattazioni di dati traccia. Questi ultimi si incontrano non solo nelle misurazioni sonar o ecografiche di profondità oceaniche rilevate lungo le tracce di una nave, ma anche nel contesto di rilevamenti effettuati da aerei o persino in applicazioni di progettazione meccanica. La non uniformità e l'anisotropia dei dati, cioè nodi molto vicini gli uni agli altri lungo una stessa traccia ma piuttosto distanti su tracce differenti, provocano gravi difficoltà per i tradizionali metodi radiali (funzioni a base radiali, interpolanti di tipo Shepard, ecc.). Il metodo delle strisce descritto in dettaglio permette di trattare efficientemente questo speciale tipo di dati. Si è inoltre mostrato che il metodo proposto e il relativo algoritmo sono più efficienti dell'algoritmo di Renka [4] per lo stesso livello di precisione.

L'algoritmo di interpolazione può essere brevemente descritto come segue:

(i) partizionare il dominio in un numero opportuno di strisce parallele;

(ii) considerare una procedura di ricerca basata su strisce che stabilisce il numero minimo di strisce da esaminare, per determinare l'insieme dei nodi più vicini per ciascun nodo;

(iii) applicare il metodo di Shepard modificato

$$F(x) = \sum_{j=1}^{n} L_j(x) W_j(x),$$

dove le L_j sono funzioni interpolanti a base radiale o approssimanti ai minimi quadrati (funzioni nodali), mentre le W_j sono funzioni peso.

L'argomento del Capitolo 6 consiste nell'adattare il metodo di Shepard modificato e il relativo algoritmo al problema di interpolazione sferica. In questo contesto lo sforzo principale è convertire il formalismo precedentemente considerato al caso sferico, coinvolgendo funzioni a base zonale definite tramite le armoniche sferiche. In un certo senso questo capitolo presenta una piccola pausa rispetto al flusso del resto della tesi, ma è anche una naturale estensione delle idee presentate nel capitolo precedente. Numerose sono le possibili applicazioni su domini sferici. Un esempio è dato dai dati traccia generati dal percorso di un satellite in orbita intorno alla Terra.

4. – Registrazione e trasformazione di immagini mediche

La registrazione e la trasformazione di immagini mediche assume una grande rilevanza nell'elaborazione di dati medici [3]. Questo tema rientra nel campo dell'image processing e consiste non solo nell'analizzare una singola immagine ma anche nel confrontare o combinare informazioni provenienti da immagini differenti. Uno dei principali argomenti riguardanti l'image processing è dato dalla registrazione di immagini. Più precisamente, il problema della registrazione di immagini consiste nel trovare una trasformazione tra due o più immagini, dette immagine sorgente e immagine obiettivo. Lo scopo è quello di determinare una corrispondenza (o trasformazione funzionale) che connetta i punti delle due immagini, in modo tale che l'immagine venga affetta dalla minima deformazione possibile. Per questo motivo, nel Capitolo 7 viene proposto l'uso di una trasformazione locale che coinvolge funzioni a base radiale per la registrazione basata su dati sparsi (qui chiamati landmarks) di immagini mediche. Nello specifico, si considera la trasformazione di Shepard modificata con funzioni a base radiale gaussiane e thin plate splines come funzioni nodali.

5. – Spline di Lobachevsky

Nel Capitolo 8 viene presentata una classe di funzioni spline univariate, dette spline di Lobachevsky, convergenti alla funzione di densità normale, cioè

$$\lim_{n\to\infty} f_n^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right),$$

e inoltre applicabili nel campo dell'interpolazione uni e multivariata di dati sparsi. Queste funzioni a supporto compatto hanno la seguente espressione analitica

$$f_n^*(x) = \sqrt{\frac{n}{3}}\frac{1}{2^n(n-1)!}\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{n}{3}}x \right\rfloor} (-1)^k \binom{n}{k} \left[\sqrt{\frac{n}{3}}\,x + (n-2k)\right]^{n-1},$$

dove $\lfloor\cdot\rfloor$ indica il più grande intero minore o uguale al suo argomento. Sebbene le spline di Lobachevsky siano note in probabilità, esse non hanno ricevuto molta attenzione in teoria dell'approssimazione. Nella presente tesi, è stato provato che queste funzioni sono strettemente definite positive per n pari e dimostrata la loro applicabilità per l'approssimazione di dati sparsi sia nel caso univariato sia multivariato.

BIBLIOGRAFIA

[1] BUHMANN M. D., *Radial Basis Functions: Theory and Implementation*, Cambridge Monogr. Appl. Comput. Math.**12**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003.

[2] FASSHAUER G. E., *Meshfree Approximation Methods with MATLAB*, Interdiscip. Math. Sci. **6**, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, 2007.

[3] MODERSITZKI J., *Numerical Methods for Image Registration*, Numer. Math. Sci. Comput., Oxford Univ. Press, Oxford, 2004.

[4] RENKA R. J., *Multivariate interpolation of large sets of scattered data*, ACM Trans. Math. Softw. **14** (1988), 139–148.

[5] WENDLAND H., *Scattered Data Approximation*, Cambridge Monogr. Appl. Comput. Math.**17**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2005.

Dipartimento di Matematica, Università di Torino
e-mail: roberto.cavoretto@unito.it
Dottorato in Scienza e Alta Tecnologia - Indirizzo: Matematica
con sede presso l'Università di Torino – Ciclo XXII
Direttore di ricerca: Prof. Giampietro Allasia, Università di Torino