La Matematica nella Società e nella Cultura

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Costantino Capozzoli

Omeomorfismi con distorsione finita ed applicazioni alla Γ-convergenza

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **4** (2011), n.1 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 23–26.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2011_1_4_1_23_0>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2011.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. IV, Aprile 2011, 23-26

Omeomorfismi con distorsione finita ed applicazioni alla Γ-convergenza

COSTANTINO CAPOZZOLI

Nel corso degli ultimi anni è stato di grande interesse cercare proprietà di omeomorfismi che valgono anche per le mappe inverse.

Un primo risultato in questa direzione è contenuto in un lavoro di S. Hencl e P. Koskela del 2006 ed afferma che se Ω e Ω' sono domini di $\mathbb{R}^2$ e se $f : \Omega \xrightarrow{su} \Omega'$ è un omeomorfismo appartenente allo spazio di Sobolev $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^2)$ e il gradiente Df si annulla in quasi ogni punto in cui si annulla lo Jacobiano J_f di f, allora anche $f^{-1} \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega', \mathbb{R}^2)$ e il gradiente Df^{-1} si annulla in quasi ogni punto in cui si annulla lo Jacobiano $J_{f^{-1}}$ di f^{-1}.

Un altro risultato riguarda le funzioni distorsioni di un omeomorfismo f e della sua inversa f^{-1}. Al fine di enunciarlo è necessario richiamare alcune nozioni.

Sia Ω un dominio di $\mathbb{R}^2$, un omeomorfismo $f \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^2)$ ha *distorsione finita* se esiste una funzione misurabile $K(z) \geq 1$, finita quasi ovunque, tale che

$$|Df(z)|^2 \leq K(z) J_f(z) \ \text{ per q.o. } z \in \Omega,$$

in particolare tale funzione K è detta *distorsione* di f. La più piccola di tali distorsioni si denota con K_f ed è chiamata *funzione distorsione* di f.

Si prova che se f è K-*quasiconforme*, cioè $K_f \in L^\infty(\Omega)$ e $K_f(z) \leq K$ per q.o. $z \in \Omega$, allora anche f^{-1} è K-quasiconforme, cioè $K_{f^{-1}} \in L^\infty(\Omega')$ e $K_{f^{-1}}(w) \leq K$ per q.o. $w \in \Omega'$. Una dimostrazione di tale risultato è contenuta nel libro di K. Astala, T. Iwaniec, G. Martin: "Elliptic partial differential equations and quasiconformal mappings in the plane".

Dato un omeomorfismo $f \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^2)$ con distorsione finita, si pone il problema di stabilire, sempre che esista, quale altro spazio funzionale si comporta come L^∞ per K_f e $K_{f^{-1}}$.

Si ricordi che se $K_f \in EXP$, cioè se esiste un $\lambda > 0$ tale che $\int e^{\frac{K_f}{\lambda}} < \infty$, allora non solo $K_{f^{-1}}$ può non appartenere allo spazio EXP, ma può anche non essere integrabile.

La prima parte della tesi si colloca in tale contesto ed è dedicata allo studio dell'integrabilità della funzione distorsione $K_{f^{-1}}$ della mappa inversa f^{-1} di un omeomorfismo f avente distorsione finita.

Denotando con $\mathrm{Hom}(\Omega, \Omega')$ l'insieme di tutti gli omeomorfismi tra i domini Ω e Ω' di $\mathbb{R}^2$, si prova (cfr. [3]) che se $f \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^2) \cap \mathrm{Hom}(\Omega, \Omega')$ ha distorsione finita e la sua funzione distorsione $K_f \in EXP$ soddisfa la condizione

$$\mathrm{dist}_{EXP}(K_f, L^\infty) < 1,$$

allora

$$K_{f^{-1}} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega').$$

Inoltre, si mostra che questo risultato è ottimale nel senso che la conclusione fallisce se

$$\mathrm{dist}_{EXP}(K_f, L^\infty) = 1.$$

Poi si prova che se $K_f \in EXP$ soddisfa la condizione più generale

$$\mathrm{dist}_{EXP}(K_f, L^\infty) = \lambda \text{ per qualche } \lambda > 0,$$

allora

$$K_{f^{-1}} \in L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega') \ \ \forall p \in \left(0, \frac{1}{2\lambda}\right).$$

Dopo si dimostra che se $K_f \in EXP$ è tale che

$$\mathrm{dist}_{EXP}(K_f, L^\infty) = 0,$$

allora

$$K_{f^{-1}} \in \bigcap_{p \geq 1} L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega').$$

In altri termini, denotando con exp la chiusura di L^∞ in EXP, si fa vedere che se $K_f \in exp$ allora $K_{f^{-1}} \in L^p$ per ogni $p \geq 1$. Si osservi inoltre che, sotto l'ipotesi aggiuntiva $J_f \in L^\infty$, lo spazio exp è proprio quello che si comporta come L^∞ per K_f e $K_{f^{-1}}$. Tale ipotesi assicura infatti che se $K_f \in exp$ allora anche $K_{f^{-1}} \in exp$ (ciò discende dall'ultima condizione sufficiente per l'integrabilità di $K_{f^{-1}}$ e dalla formula della distanza in EXP di una funzione esponenzialmente integrabile da L^∞ contenuta in un lavoro di M. Carozza e C. Sbordone del 1997).

Successivamente sono stati analizzati risultati di continuità debole per l'operatore Jacobiano. Sia Ω un insieme aperto limitato di $\mathbb{R}^2$ e siano $f_k = (u_k, v_k)$ e $f = (u, v)$ mappe appartenenti allo spazio di Sobolev $W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^2)$. È noto che se la successione di Jacobiani J_{f_k} converge alla misura μ nel senso delle misure e

$$u_k \rightharpoonup u \text{ debolmente in } W^{1,p}(\Omega) \qquad v_k \rightharpoonup v \text{ debolmente in } W^{1,p}(\Omega)$$

per qualche $p > 4/3$, allora

$$d\mu = J_f \, dz. \tag{1}$$

Questo risultato è ottimale nel senso che non è valido per $p = 4/3$ (cfr. [Dacorogna B., Murat F., 1992]). D'altra parte, anche facendo ipotesi diverse sulle due componenti di f_k e f, vale a dire assumendo che

$$u_k \rightharpoonup u \text{ debolmente in } W^{1,1}(\Omega) \qquad v_k \rightharpoonup v \text{ debolmente in } W^{1,2}(\Omega)$$

allora la misura limite μ può non essere lo Jacobiano J_f di f (cfr. [Briane M., Casado Díaz J., Murat F., 2009]).

Al contrario si prova (cfr. [1]) che se

$$u_k \rightharpoonup u \text{ debolmente in } W^{1,\alpha}(\Omega) \qquad v_k \rightharpoonup v \text{ debolmente in } W^{1,2}(\Omega)$$

per qualche $\alpha \in (1,2)$, oppure se

$$u_k \rightharpoonup u \text{ debolmente in } W^{1,L\log^{1/2}L}(\Omega) \qquad v_k \rightharpoonup v \text{ debolmente in } W^{1,2}(\Omega),$$

allora la (1) è vera.

Un'altra problematica affrontata è stata quella di estendere alla topologia $\sigma(L^1, L^\infty)$ un risultato classico di G-convergenza uni-dimensionale relativo alla topologia $\sigma(L^\infty, L^1)$. Più precisamente, si prova (cfr. [2]) che se $a_j = a_j(x)$ $(j = 1, 2, \dots)$ e $a = a(x)$ sono funzioni non-negative appartenenti allo spazio di Lebesgue $L^1(0,1)$, $p > 1$, $a_j^{-1/(p-1)}$ è una successione limitata in $L^1(0,1)$ ed equi-integrabile e $a \in L^1(0,1)$, allora la successione degli operatori non-uniformemente ellittici del tipo

$$\mathcal{A}_j = -\frac{d}{dx}\left(a_j(x)\left|\frac{d}{dx}\right|^{p-2}\frac{d}{dx}\right)$$

G-converge all'operatore

$$\mathcal{A} = -\frac{d}{dx}\left(a(x)\left|\frac{d}{dx}\right|^{p-2}\frac{d}{dx}\right)$$

se e solo se

$$a_j^{-1/(p-1)} \rightharpoonup a^{-1/(p-1)} \text{ debolmente in } L^1(0,1).$$

Infine, l'ultima parte della tesi è dedicata allo studio di un opportuna proprietà di continuità del seguente operatore

$$f \in \mathcal{F} \to A_f \in \mathcal{A},$$

dove

$$\mathcal{F} = \{f \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^2) \cap \mathrm{Hom}(\Omega, \Omega') \,|\, f \text{ ha distorsione finita } K \in EXP(\Omega)\}$$

$$\mathcal{A} = \{A : \Omega \to \mathbb{R}^{2\times 2} \,|\, A = A^t, \det A = 1 \text{ q.o. in } \Omega \text{ e } A \text{ soddisfa la (2)}\}$$

$$\frac{|\xi|^2}{K(z)} \leq \langle A(z)\xi, \xi\rangle \leq K(z)|\xi|^2 \text{ per q.o. } z \in \Omega, \forall\, \xi \in \mathbb{R}^2 \tag{2}$$

e A_f è la matrice dei coefficienti dell'operatore di *Laplace-Beltrami* associata a f. Più precisamente si prova (cfr. [4]) che se Ω e Ω' sono domini limitati di $\mathbb{R}^2$, con Ω sufficientemente regolare, se $\{f_j\} \subset W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^2)$ è una successione di omeomorfismi di Ω su Ω' aventi distorsione finita K_j tali che

$$\int_\Omega e^{\frac{K_j(z)}{\lambda}}\, dz \leq c_0 \quad \forall j \in \mathbb{N},$$

per qualche $\lambda \in (0, 1/2)$ e $c_0 > 0$ e se

$$f_j \rightharpoonup f \quad \text{debolmente in} \quad W^{1,1}_{\text{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^2),$$

dove f è anch'esso un omeomorfismo di Ω su Ω', allora f ha distorsione finita, la sua funzione distorsione K_f soddisfa anch'essa la condizione

$$\int_\Omega e^{\frac{K_f(z)}{\lambda}} dz \leq c_0$$

e

$$A_{f_j} \quad \Gamma\text{-converge a} \quad A_f \quad \text{in } W^{1, L^2 \log L}(\Omega).$$

Il primo a provare un risultato relativo alla convergenza delle matrici dei coefficienti dell'operatore di Laplace-Beltrami è stato S. Spagnolo nel 1976, prendendo in considerazione il caso particolare delle mappe K-quasiregolari, cioè

$$K_j(z) \leq K \quad \text{per q.o.}\, z \in \Omega, \forall j \in \mathbb{N}.$$

Più tardi, nel 1987, questo stesso risultato è stato generalizzato al caso n-dimensionale da P. Donato e R. De Arcangelis. Nel 2000 si è ritornati al caso bi-dimensionale con M. Formica, la quale fa un ipotesi con più alto grado di integrabilità esponenziale, precisamente

$$\int_\Omega e^{\left(\frac{K_j(z)}{\lambda}\right)^\alpha} dz \leq c_0 \quad \forall j \in \mathbb{N},$$

per qualche $\alpha > 1$, $\lambda > 0$ and $c_0 > 0$. Per provare il nostro teorema si fa uso di un risultato di regolarità ottimale per il gradiente di mappe aventi distorsione esponenzialmente integrabili ottenuto combinando un risultato dovuto a K. Astala, J. Gill, S. Rohde e E. Saksman del 2008 con un altro dovuto a T. Iwaniec, P. Koskela, G. Martin e C. Sbordone del 2003.

BIBLIOGRAFIA

[1] ALBERICO T. e CAPOZZOLI C., *Weak convergence of Jacobians under asymmetric assumptions*, Preprint N. 10, 2010, Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R. Caccioppoli", Università degli Studi di Napoli "Federico II". Sottomesso.

[2] CAPOZZOLI C., *The G-convergence of some non uniformly elliptic operators in dimension one*, Rend. Acc. Sc. Fis. Mat. Napoli, Vol. **LXXIV** (2007), 75-86.

[3] CAPOZZOLI C., *Sufficient conditions for integrability of distortion function $K_{f^{-1}}$*, Boll. Unione Mat. Ital., Serie IX, Vol. **II**, No. 3 (2009), 699-710.

[4] CAPOZZOLI C. e CAROZZA M., *On Γ-convergence of quadratic functionals in the plane*, Ricerche Mat., **57** (2008), 283-300.

Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R. Caccioppoli",
Università di Napoli "Federico II"
e-mail: costantino.capozzoli@dma.unina.it
Dottorato in Scienze Matematiche
con sede presso l'Università di Napoli "Federico II" – Ciclo XXII
Direttore di Ricerca: Prof. Carlo Sbordone, Università di Napoli "Federico II"