
La Matematica nella Società e nella Cultura

RIVISTA DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

SIMONE CALAMAI

La metrica di Calabi per lo spazio delle metriche Kähleriane

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. 4 (2011), n.1 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 19–22.

Unione Matematica Italiana

[<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2011_1_4_1_19_0>](http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2011_1_4_1_19_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

La metrica di Calabi per lo spazio delle metriche Kähleriane

SIMONE CALAMAI

Oggetto della tesi è la proposta di una nuova metrica, e relativa geometria, per lo spazio delle metriche Kähleriane su una fissata varietà Kähleriana (M, ω) ; per tale varietà la sola ipotesi che si fa è che essa sia chiusa. La metrica prende il nome di Eugenio Calabi; a lui si deve, come mi è stato riferito da Xiu Xiong Chen [1], l'intuizione da cui è partito il mio studio.

1. – Introduzione

In geometria differenziale, problema di naturale importanza è quello di cercare metriche Riemanniane che godono di certe proprietà all'interno di uno spazio di competizione. Quando la data varietà differenziabile è una varietà Kähleriana, un vantaggio di cui si dispone è quello di poter confondere la metrica Riemanniana con una forma differenziale chiusa. Risulta naturale considerare come spazio di competizione in questo caso quello delle metriche coomologhe alla metrica data. Questo viene chiamato lo *spazio delle metriche Kähleriane*, e si indica con il simbolo K . È desiderabile arricchire tale spazio di struttura geometrica allo scopo di migliorare lo studio di particolari metriche. Un secondo vantaggio di lavorare con una varietà Kähleriana chiusa è che lo spazio K è in corrispondenza biunivoca con un sottospazio delle funzioni lisce a valori reali. In [4] Mabuchi, definì una metrica di tipo Weil-Peterson per lo spazio di metriche Kähleriane. Grosso modo, egli dotò ogni spazio tangente a K di un prodotto scalare che varia in modo liscio quando valutato su coppie di sezioni arbitrarie lungo arbitrarie curve; si può pensare a K come a una varietà Riemanniana di dimensione infinita. Mabuchi dimostrò che la metrica induce la sua derivata covariante di Levi Civita (cosa non scontata quando si lavora in dimensione infinita, cfr. [2]) e che la curvatura sezionale di K è non positiva. I concetti di derivata covariante e curvatura sezionale, come è facile immaginare, sono estensioni delle definizioni che si incontrano in geometria Riemanniana. Mabuchi però non dette risultati riguardo all'esistenza di geodetiche, passo assolutamente necessario per poter parlare di una geometria dello spazio. Pochi anni dopo, Semmes in [5] ritrovò indipendentemente la metrica di Mabuchi; il suo lavoro è importante perché vi si intravede il fatto che la equazione geodetica è equivalente a una equazione di Monge-Ampère complessa omogenea. Tale equivalenza fu precisata in [2], articolo che è un vero e proprio programma di ricerca di Donaldson per legare questioni geometriche di K , all'epoca ancora tutte da provare, a esistenza e unicità di metriche a curvatura scalare costante. In tale lavoro Donaldson

inoltre trova esempi di non esistenza di soluzioni per il problema di Cauchy per l'equazione delle geodetiche, in più egli congettura che lo spazio K sia connesso per geodetiche lisce e che sia uno spazio metrico, dove le geodetiche minimizzano il funzionale della lunghezza. Queste ultime congetture trovarono risposta parziale in [3]; Xiu Xiong Chen dimostrò che K è spazio metrico con funzione distanza di classe C^1 e che le geodetiche minimizzano il funzionale distanza. Per quanto riguarda l'altra congettura, Chen provò che due qualunque punti di K sono connessi da una unica geodetica che è di classe $C^{1,1}$ e che sta nella chiusura di K ; la congettura di Donaldson come era stata posta rimane problema aperto. Tuttavia il risultato di Chen gli fu sufficiente per dimostrare l'unicità di metriche a curvatura scalare costante quando la prima classe di Chern è non positiva, $C_1 \leq 0$.

2. – Descrizione dell'elaborato di tesi e dei principali risultati

L'unica ipotesi che si fa è di disporre di una varietà Kähleriana (M, ω) chiusa, cioè compatta e senza bordo, di dimensione complessa n . Si indica con ω_ϕ un generico elemento dello spazio delle metriche Kähleriane K , che è in corrispondenza biunivoca con la funzione ϕ , *potenziale Kähleriano*, modulo costante additiva. L'intuizione di Calabi è di definire il prodotto Riemanniano che sul tangente allo spazio delle metriche Kähleriane in ϕ è

$$(1) \quad \langle \psi, \chi \rangle_\phi := \int_M \Delta_\phi \psi \Delta_\phi \chi \frac{\omega_\phi^n}{n!},$$

dove si noti la presenza del Laplaciano metrico $\Delta_\phi \cdot$, e la differenza con la metrica di Mabuchi

$$(2) \quad \prec \psi, \chi \succ_\phi := \int_M \psi \chi \frac{\omega_\phi^n}{n!}.$$

Come nel caso della metrica di Mabuchi, il primo problema da affrontare nella prospettiva di ottenere una geometria è quello della esistenza della derivata covariante di Levi-Civita. L'argomento finito dimensionale, che si basa sulla formula di Koszul, non funziona in questo contesto sostanzialmente perché la formula di Koszul mette in gioco il duale dello spazio tangente che nel caso corrente non coincide con lo spazio tangente stesso, diversamente a quanto accade in dimensione finita. Come nel caso della metrica di Mabuchi ho provato l'esistenza della derivata covariante scrivendone l'espressione esplicita. Questo ovviamente ha portato il vantaggio di poter maneggiare tale oggetto matematico che è basilare per poter attaccare problemi come l'equazione delle geodetiche e il calcolo della curvatura sezionale.

Riguardo alla curvatura sezionale dello spazio delle metriche Kähleriane ho ottenuto il seguente risultato

TEOREMA 1. – *Lo spazio delle metriche Kähleriane, provvisto della metrica di Calabi, ha curvatura sezionale costante positiva, esplicitamente data da $(4\text{Vol})^{-1}$,*

dove Vol è il volume della varietà M . In più, il quadritensore di curvatura ha derivata covariante nulla, cioè la metrica di Calabi dota lo spazio delle metriche Kähleriane di una struttura di spazio localmente simmetrico.

Si noti che, dal momento che la curvatura nel caso di Mabuchi è non positiva, la metrica di Calabi e quella di Mabuchi non sono isometriche. Per quanto riguarda le geodetiche, un primo risultato è stato

TEOREMA 2. – *La equazione delle geodetiche per la metrica di Calabi è equivalente alla equazione differenziale ordinaria del moto armonico.*

Come detto nella introduzione, l'equazione delle geodetiche per la metrica di Mabuchi equivale a una equazione di Monge-Ampère complessa omogenea; in questo caso l'equazione ha soluzioni di facile scrittura, e genera una ricca geometria per lo spazio delle metriche Kähleriane. In particolare, per quanto riguarda il problema di Cauchy ho dimostrato il seguente

TEOREMA 3. – *Per ogni punto u_0 dello spazio delle metriche Kähleriane e per ogni elemento v_0 del tangente in u_0 , esiste una unica, modulo parametrizzazione, geodetica passante per u_0 con velocità v_0 ; tale geodetica è di classe analitica reale, ed ha esplicita espressione*

$$(3) \quad u = u_0 + 2 \log (\cos (t) + \frac{v_0}{2} \sin (t)).$$

A partire da quest'ultimo risultato mi è stato possibile definire un'applicazione esponenziale per lo spazio delle metriche Kähleriane, cosa che invece non è possibile fare per la metrica di Mabuchi (cfr. [2] e l'introduzione). A proposito delle applicazione esponenziale ho dimostrato

TEOREMA 4. – *L'applicazione esponenziale è sia iniettiva che suriettiva.*

Anche per quanto riguarda il problema di Dirichlet per l'equazione geodetica il risultato che ho ottenuto è ottimale

TEOREMA 5. – *Per ogni coppia di punti u_0, u_1 nello spazio delle metriche Kähleriane esiste uno e un solo segmento geodetico i cui estremi sono u_0 e u_1 . Tale segmento è di classe analitica reale, ha una espressione esplicita ed è tutto contenuto nell'interno dello spazio delle metriche Kähleriane.*

Come ho fatto notare nell'introduzione, il risultato di Chen riguardo a questo stesso problema per la metrica di Mabuchi è di classe $C^{1,1}$ ed è contenuto nella chiusura dello spazio piuttosto che nell'interno. Come applicazione di questo risultato ho calcolato il diametro dello spazio delle metriche Kähleriane; esso è risultato valere $\pi \sqrt{Vol}$.

Mi sono posto il problema di provare che la metrica di Calabi rende lo spazio delle metriche Kähleriane uno spazio metrico, vale a dire provvisto di una distanza fra punti. Il risultato che ho ottenuto è il seguente

TEOREMA 6. — *La lunghezza del segmento di geodetica che connette due punti induce una funzione distanza d sullo spazio delle metriche Kähleriane. Tale funzione è analitica reale e ha una esplicita espressione; di più, i segmenti geodetici realizzano il minimo della lunghezza di curve che connettono i due punti fissati.*

Una applicazione della definizione di applicazione esponenziale che ho proposto è stata la nozione di campi di Jacobi, dove entra in gioco anche la semplice espressione ottenuta per la curvatura sezionale. A loro volta, i campi di Jacobi portano a considerare la nozione di punti coniugati; tale nozione è del tutto analoga a quella che si incontra in geometria Riemanniana classica. A tal proposito ho dimostrato

TEOREMA 7. — *Lo spazio delle metriche Kähleriane non ammette punti coniugati.*

I risultati sopra citati mi hanno portato a stabilire un parallelo tra lo spazio delle metriche Kähleriane e la porzione di sfera unitaria che giace nel primo ottante. Difatti ho dimostrato il seguente fatto

TEOREMA 8. — *Lo spazio delle metriche Kähleriane è isometrico a una porzione della sfera dello spazio $C^\infty(M)$ munito di metrica piatta.*

Infine, mi sono posto il problema di studiare il bordo dello spazio. La nozione di bordo che ho considerato è data da quelle metriche che in almeno un punto di M sono degeneri. Un risultato che ho provato per il bordo dello spazio è il seguente

TEOREMA 9. — *Per ogni punto u_0 dello spazio delle metriche Kähleriane esiste una successione di punti $\{u_k\}_k$ del bordo tale che la distanza tra u_0 e u_k tende a zero per k che tende all'infinito. In particolare la distanza di u_0 dal bordo dello spazio è zero.*

L'ultima affermazione del teorema è abbastanza sorprendente e motiva ulteriormente lo studio della geometria generata dalla metrica di Calabi; altra naturale motivazione, come accennato all'inizio di questa Nota, è la ricerca di applicazioni in problemi che hanno per oggetto metriche con particolari proprietà.

BIBLIOGRAFIA

- [1] CALABI E., CHEN X.X., *Comunicazione privata.*
- [2] DONALDSON S.K., *Symmetric spaces, Kähler geometry and Hamiltonian dynamics*, Amer. Math. Soc. Transl., **196** (1999), 13-33.
- [3] CHEN X.X., *The space of Kähler metrics*, J. Differential Geom., **61** (2002), 173-193.
- [4] MABUCHI T., *Some symplectic geometry on compact Kähler manifolds*, Osaka J. Math., **24** (1987), 227-252.
- [5] SEMMES S., *Complex Monge-Ampère and symplectic manifolds*, Amer. J. Math., **114** (1992), 495-550.

Dipartimento di Matematica 'Ulisse Dini', Università di Firenze

e-mail: scalamai@math.unifi.it

Dottorato in Matematica

con sede presso l'Università di Firenze – Ciclo XXII

Direttore di ricerca: Professor Giorgio Patrizio, Università di Firenze