Chiara Bianchini

Aspetti di convessità in problemi ellittici

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **4** (2011), n.1 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 15–18.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2011_1_4_1_15_0>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2011.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. IV, Aprile 2011, 15-18

Aspetti di convessità in problemi ellittici

CHIARA BIANCHINI

La tesi parte dallo studio di problemi ellittici in domini anulari e si pone l'obiettivo di studiare se e come certe proprietà di convessità del dominio possano essere ereditate dalla soluzione. In particolare, da una parte ci siamo interessati a problemi completamente non lineari in anelli convessi, dall'altra abbiamo considerato problemi a frontiera libera di tipo Bernoulli, focalizzandoci in particolarmodo sulle proprietà geometriche. Più precisamente abbiamo considerato problemi del tipo:

$$\begin{cases} F(x, u, Du, D^2u) = 0 & \text{in } \Omega \setminus \overline{K} \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \\ u = 1 & \text{su } \partial K\,, \end{cases} \tag{1}$$

dove F è un operatore *proprio* e *ellittico degenere* e $\Omega \setminus \overline{K}$ è un *anello convesso* (cioè Ω, K sono sottoinsiemi limitati e convessi di $\mathbb{R}^N$ con $\overline{K} \subset \Omega$). Per convenienza si è assunto $u \equiv 1$ in K in modo che, sotto opportune ipotesi su F, $u \in C(\overline{\Omega})$.

Nella prima parte della tesi abbiamo considerato il problema (1) trovando delle condizioni sull'operatore F che garantiscano che la convessità di Ω e K si trasferisca agli insiemi di sopralivello della soluzione u. Abbiamo cioè trovato delle condizioni su F affinché la soluzione sia *quasi-concava*. La quasi-concavità delle soluzioni di problemi ellittici in anelli convessi è stata ampiamente studiata in letteratura a partire dal lavoro di Gabriel (1957), il quale considera l'operatore Laplaciano omogeneo $F(x, u, Du, D^2u) = \Delta u$, dimostrando che la soluzione del problema (1) è quasi-concava. Del tutto analogo è il risultato di Lewis (1977), il quale considera l'operatore omogeneo p-Laplaciano. Molti altri autori si sono interessati al problema, utizzando svariate tecniche, e la classe degli operatori considerati è stata via via sempre più estesa; in particolare in questa tesi sono stati tratti operatori completamente non lineari.

Il nostro approccio si basa sulla tecnica dell'inviluppo quasi-concavo di funzioni, proposto da Kawohl (1985). Data una funzione u, si definisce il suo inviluppo quasi-concavo u^* come la funzione i cui insiemi di sopralivello sono l'inviluppo convesso dei corrispondenti insiemi di sopralivello di u: $\{x \in \mathbb{R}^N : u^* \geq t\} = \text{conv}\{x \in \mathbb{R}^N : u(x) \geq t\}$. Quindi u è una funzione quasi-concava se e solo se $u \equiv u^*$, che equivale a $u^* \leq u$ essendo per defінzione $u^* \geq u$. L'idea alla base del metodo consiste nel provare che u coincide con u^* via un principio del confronto viscoso, dimostrando che u^* è una sottosoluzione viscosa dello stesso problema.

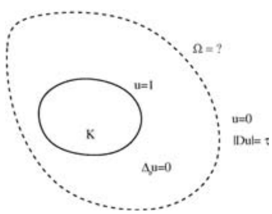
Nel nostro lavoro la tecnica dell'inviluppo quasi-concavo è stata affinata utilizzando la cosidetta somma alla Minkowski di funzioni: date $u_1, ..., u_m$ funzioni (quasi-concave) e $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_m)$ t.c. $\lambda_i \in [0,1]$, $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$, si definisce $u_\lambda = \widetilde{\sum_{i=1}^m} \lambda_i u_i$ la funzione i cui insiemi di sopralivello sono la *combinazione alla Minkowski* (i.e. somma vettoriale) dei corrispondenti insiemi di sopralivello delle funzioni u_i: $\{u_\lambda \geq t\} = \lambda_1\{u_1(x) \geq t\} + ... + \lambda_m\{u_m(x) \geq t\}$. Questo nuovo approccio ci ha permesso di considerare operatori non lineari generici, indipendentemente dalla loro struttura.

La nuova idea consiste in un confronto puntuale di u^* e u_λ, combinazione convessa alla Minkowski di N copie di u. Infatti, per ogni $x \in \Omega \setminus \overline{K}$ esiste $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_N)$ con $\lambda_i \in [0,1]$ e $\sum_{i=1}^N \lambda_i = 1$, t.c. $u^*(x) = u_\lambda(x)$, con $u_\lambda = \widetilde{\sum_{i=1}^N} \lambda_i u_i$. Inoltre delle esplicite espressioni per le derivate di u_λ in termini delle derivate di u sono note e, per la località dell'argomento di viscosità, l'analisi di $F(x, u^*(x), Du^*(x), D^2u^*(x))$ può essere quindi ridotta a $F(x, u_\lambda(x), Du_\lambda(x), D^2u_\lambda(x))$. Questi risultati sono stati raccolti e pubblicati in collaborazione con Marco Longinetti e Paolo Salani in [3].

La seconda parte della tesi è incentrata sull'analisi dei problemi a frontiera libera di tipo Bernoulli. Tali problemi offrono una modellizzazione in campo fisico di svariate situazioni, come ad esempio nel caso di capacitori e resistori di forma anulare: si consideri un condensatore di forma anulare con una differenza di potenziale fissata e costante (uguale a uno), tale che una delle due piastre è data mentre l'altra deve essere determinata in modo che l'intensità del campo elettrostatico sia costante su di essa. Se $\Omega \setminus \overline{K}$ rappresenta il condensatore a due piastre si ha dunque $\Delta u = 0$ in $\Omega \setminus \overline{K}$, con $u = 0$ su $\partial\Omega$ e $u = 1$ su ∂K; inoltre, il vincolo sull'intensità impone $|Du| = \mathit{costante}$ o su $\partial\Omega$ o su ∂K, a seconda di quale dei due rappresenti la piastra libera. Nel problema classico la legge di flusso è assunta lineare, e quindi l'operatore associato è il Laplaciano; tuttavia, per poter modellizzare situazioni più generali, una legge di flusso di tipo potenza sembra più adeguata. Si considera, cioè, come operatore differenziale, il p Laplaciano.

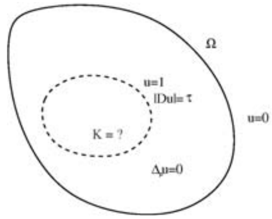
Se il dominio assegnato rappresenta la piastra interna, allora il problema è detto problema di Bernoulli esterno: dato un dominio K di $\mathbb{R}^N$ (la piatra assegnata), e una costante positiva τ (che rappresenta il valore del vincolo sull'intensità del campo), il problema consiste nel trovare una funzione u (il potenziale elettrostatico), e un dominio Ω (la piastra libera), che contenga $\overline{K}$ e tale che

$$
\begin{cases}
\Delta_p u(x) = 0 & \text{in } \Omega \setminus K, \\
u = 1 & \text{su } \partial K, \\
u = 0, \ |Du| = \tau & \text{su } \partial\Omega.
\end{cases}
\tag{2}
$$



Se, al contrario, è la piastra esterna $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ ad essere assegnata, il problema è detto problema di Bernoulli interno e consiste nel trovare un potenziale elettrostatico u e la corrispondente piastra interna K, contenuta in Ω, in modo che:

$$
\begin{cases}
\Delta_p u(x) = 0 & \text{in } \Omega \setminus K, \\
u = 0 & \text{su } \partial\Omega, \\
u = 1, \; |Du| = \tau & \text{su } \partial K\,.
\end{cases}
\tag{3}
$$



I problemi esterno e interno sono molto differenti tra loro, sia dal punto di vista delle difficoltà che comportano, sia dal tipo di comportamento delle soluzioni. In particolare nel caso esterno (2) è stato provato da Henrot e Shahgholian (1997, 2000) che, se il dominio assegnato è convesso allora il problema ammette un'unica soluzione per ogni valore della costante $\tau > 0$. D'altra parte, si può facilmente verificare che questo non è più vero nel caso del problema interno.

Per quanto riguarda il problema interno, il primo contributo è dovuto a Beurling (1957) il quale presenta una tecnica, successivamente sviluppata da molti autori, che consiste nel considerare la classe delle cosidette sottosoluzioni, cioè la classe di funzioni p-subarmoniche che soddisfano il problema di Dirichlet con $|Du| \leq \tau$ su ∂K.

Utilizzando questa tecnica Henrot and Shahgholian (2000) hanno dimostrato che il problema (3) ammette una soluzione se e solo se τ è sufficientemente grande. Più precisamente esiste una costante $\Lambda(\Omega)$, detta *costante di Bernoulli* di Ω, tale che (3) ammette soluzione se e solo se $\tau \geq \Lambda(\Omega)$. Ovviamente $\Lambda(\Omega)$ dipende dall'operatore differenziale e quindi da p. Nel caso del Laplaciano (i.e. per $p = 2$) Cardaliaguet and Tahraoui (2002) hanno dimostrato l'unicità della soluzione corrispondente a $\tau = \Lambda(\Omega)$; nella tesi abbiamo esteso questo risultato al caso di $p > 1$. La costante di Bernoulli gioca un ruolo fondamentale nello studio dei problemi di Bernoulli interni, poiché rappresenta il valore critico per l'esistenza di una soluzione di (3); in particolare il suo valore esplicito può essere calcolato solo in casi molto specifici, come nel caso della palla. La ricerca di stime sul suo valore, quindi, ha suscitato da sempre un grande interesse. Un esempio è offerto dalla congettura di Flucher and Rumpf (1997) circa la disuguaglianza isoperimetrica per $\Lambda(\,\cdot\,)$: ci si chiede se, nella classe degli insiemi (convessi) a volume fissato, la costante di Bernoulli assume minimo sulle palle; cioè se $\Lambda(\Omega) \geq \Lambda(B)$, per ogni dominio (convesso) di $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, dove B è una palla con lo stesso volume di Ω. Molti autori hanno cercato di dare una risposta (affermativa) alla domanda, e molti passi in questa direzione sono stati fatti. Tuttavia la questione non è ancora stata completamente risolta.

Nella tesi abbiamo dato una risposta alternativa alla congettura, provando una disuguaglianza di tipo Urysohn per la costante di Bernoulli: per ogni dominio convesso Ω di $\mathbb{R}^N$, si ha $\Lambda(\Omega) \geq \Lambda(B)$ dove B è una palla con lo stesso spessore medio di Ω e l'uguaglianza vale se e solo se Ω è una palla. La dimostrazione della disuguaglianza si basa sulla disuguaglianza di Brunn-Minkowski per la costante di Bernoulli, anch'essa provata nella tesi: per ogni dominio convesso Ω_0, Ω_1 in $\mathbb{R}^N$, per ogni $\lambda \in (0,1)$, si ha $\Lambda((1-\lambda)\Omega_0 + \lambda\Omega_1)^{-1} \geq (1-\lambda)\Lambda(\Omega_0)^{-1} + \lambda\Lambda(\Omega_1)^{-1}$, e l'uguaglianza vale se e solo se Ω_0 e Ω_1 sono omotetici. La prova è basata sulla *combinazione alla Minkowski* di problemi di Bernoulli e l'idea è quella di confrontare la soluzione del problema combinato con la combinazione delle soluzioni dei problemi di partenza. Abbiamo inoltre utilizzato questo metodo per mostrare un comportamento di concavità dei problemi a frontiera libera di tipo Bernoulli (sia nel caso esterno che interno). Questi risultati sono stati raccolti e pubblicati in collaborazione con Paolo Salani in [4].

Infine abbiamo proposto due generalizzazioni del problema di Bernoulli interno. Nella prima abbiamo considerato una condizione non costante sul gradiente, dipendente dal vettore normale esterno. Dato un dominio Ω di $\mathbb{R}^N$ e una funzione regolare $\tau : S^{N-1} \to (0, +\infty)$, si è cercato un potenziale u e un dominio K, contenuto in Ω, tali che il problema (3) ha soluzione con $\tau = \tau(\nu(x))$, non più costante ma funzione della normale esterna a ∂K in x, $\nu(x)$.

Abbiamo provato che, se una soluzione del problema esiste, allora ce ne è una convessa. La tecnica proposta è basata sull'utilizzo delle sottosoluzioni del problema e i risultati ottenuti sono stati raccolti in [1].

La seconda generalizzazione considerata riguarda la forma dell'operatore differenziale, che è stato considerato di tipo divergenza, in dimensione 2. Più precisamente, dato un dominio convesso $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ e una costante positiva τ, si cerca una funzione u e un dominio K con $\overline{K} \subseteq \Omega$, tali che

$$\begin{cases} div(A(|Du|)Du) = 0 & \text{in } \Omega \setminus K, \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega, \\ u = 1, \ |Du| = \tau & \text{su } \partial K, \end{cases}$$

dove $A(\,\cdot\,)$ soddisfa alcune condizioni di ellitticità. Utilizzando la teoria delle *P-function*, abbiamo presentato un risultato di convessità della soluzione mostrando che, se una soluzione esiste, allora ne esiste una convessa. Questo risultato è stato ottenuto in collaborazione con Bernd Kawohl ed è stato raccolto in [2].

BIBLIOGRAFIA

[1] BIANCHINI C., *A Bernoulli problem with non-constant gradient boundary constraint, Appl. Anal.,* **to appear**.

[2] BIANCHINI C., KAWOHL B., *Bernoulli interior problems for divergence form operators, in preparation.*

[3] BIANCHINI C., LONGINETTI M. e SALANI P., *Quasiconcave solutions to elliptic problems in convex rings, Indiana Univ. Math. J.,* **58**, 4 (2009), 1565-1590.

[4] BIANCHINI C. e SALANI P., *Concavity property for the free boundary elliptic problems, Nonlinear Anal.,* **71** (2009), 4461-4470.

Institut Élie Cartan, Université Henri Poincaré Nancy
e-mail: chiara.bianchini@math.unifi.it
Dottorato in Matematica, con sede presso l'Università di Firenze - Ciclo XXII
Direttore di ricerca: Prof. Andrea Colesanti, Università di Firenze