La Matematica nella Società e nella Cultura

RIVISTA DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

MARTA MENGHINI

La geometria intuitiva nella scuola media italiana del '900

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **3** (2010), n.3, p. 399–429.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2010_1_3_3_399_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2010.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. III, Dicembre 2010, 399-429

La geometria intuitiva nella scuola media italiana del '900

MARTA MENGHINI

Tra la fine del 19° e l'inizio del 20° secolo si assiste, in Italia, ad alternanti vicende relative all'introduzione, nelle classi ginnasiali corrispondenti all'attuale scuola media (11-14 anni), di una geometria intuitiva che fosse propedeutica alla geometria razionale del ginnasio superiore e del liceo. Da un lato l'introduzione della geometria intuitiva appariva necessaria a causa delle difficoltà che si erano registrate nei primi approcci alla geometria euclidea del liceo, dall'altro risultava però difficile caratterizzarne in modo chiaro l'essenza e la funzione.

Analizzare il perché delle varie altalenanti decisioni aiuta a dare un'interpretazione al valore e ai contenuti di questa disciplina. Il presente lavoro si ferma alla prima metà del 20° secolo, ovvero a programmi e testi precedenti la riforma della scuola media del '63. Tuttavia ci sembra che il momento storico esaminato – in cui si discutevano gli scopi della geometria intuitiva e se ne ponevano le basi – e i diversi libri di testo presi in considerazione consentano una riflessione anche sul significato odierno di questo insegnamento.

I testi esaminati provengono in buona parte dall'ampia collezione di testi scolastici lasciata da Ugo Amaldi al Dipartimento di Matematica dell'Università Sapienza di Roma. Non sono ovviamente gli unici nel loro genere – ve ne sono diversi altri nella stessa collezione – ma rispecchiano sicuramente le principali linee di tendenza. Già i primi due testi di geometria intuitiva, quelli di Veronese e di Frattini – qui esaminati più nel dettaglio – mettono in evidenza alcune scelte specifiche che si ritroveranno anche nei testi successivi.

1. – Cos'è la geometria intuitiva?

Definire che cos'è la geometria razionale non è difficile. Il termine "razionale", contrapposto a intuitivo, si riferisce a tutti gli aspetti dell'organizzazione logica e teorica della geometria (Marchi, Morelli & Tortora, 1996); pur con approcci diversi è innegabile che il riferimento principale siano gli *Elementi* di Euclide. Assai più complesso è definire la geometria intuitiva e analizzare in che senso essa costituisca una premessa alla geometria razionale. Molti studiosi di didattica della matematica si sono occupati di questo tema, che può essere inserito nelle più vaste ricerche riguardanti il ruolo che visualizzazione, percezione, materiali concreti e immagini mentali hanno nella costruzione del sapere nell'alunno (cfr. Clements & Batista, 1992). Citiamo, come esempio particolarmente significativo proprio nel passaggio dalla percezione alla geometria razionale, la *teoria dei livelli di pensiero* di Pierre van Hiele (cfr. Cannizzaro & Menghini, 2006).

I due diversi aspetti della geometria, pratico-intuitivo e deduttivo-razionale si ritrovano fin dagli inizi della storia della geometria, ma è solo con l'aumento della scolarizzazione – e conseguenti nuove esigenze didattiche – che si è cominciato a studiare il rapporto fra i due aspetti nell'apprendimento.

Secondo Tirosh & Tsamir (2008), si possono individuare, nel corso del '900, due periodi nella discussione del rapporto fra intuizione e rigore. Un primo periodo è quello *introspettivo*, nel quale gli attori sono prevalentemente matematici che riflettono su esperienze personali, sui processi mentali attraverso cui si perviene a concetti, dimostrazioni, soluzione di problemi. Un secondo periodo, a partire dagli anni '50, è basato sulla *ricerca didattica* e prende in considerazione i risultati di indagini didattiche e psicologiche; l'attenzione è rivolta ai discenti e ai loro processi mentali e l'intuizione viene piuttosto identificata con una conoscenza soggettiva dell'individuo (Fishbein, 1987).

Sicuramente nel primo periodo, pur con posizioni diverse dei matematici, si sottolinea maggiormente un *legame costante* tra geometria intuitiva e razionale. Così Enriques (1900) afferma che la certezza geometrica è rappresentata dalla base empirica da cui sono tratti i postulati, i quali hanno però un carattere differente rispetto alle semplici osservazioni fisiche:

> *Questo carattere risiede nel sentimento di necessità che accompagna l'evidenza geometrica e dà quasi l'illusione di una necessità logica [...] si può affermare un fatto geometrico elementare, ossia enunciare un postulato senza eseguire un'esperienza effettiva. Basta rivolgere l'intuizione interna sopra certi concetti che troviamo già formati nella nostra mente.*

Anche Hilbert e Cohn Vossen (1932, titolo italiano *Geometria Intuitiva*, 1972) sottolineano un ruolo dell'intuizione *complementare* alla comprensione razionale: "la tendenza intuitiva [...] si propone di giungere ad una chiara percezione degli oggetti considerati e a una rappresentazione concreta delle loro relazioni reciproche".

Ma, ben prima di arrivare alle ricerche della seconda metà del '900, esperienze di carattere didattico e pedagogico suggerivano l'opportunità di considerare – a livello scolastico – la geometria intuitiva come *propedeutica* a quella razionale. All'inizio del '900 troviamo proposte per una trattazione intuitiva della geometria anche in Inghilterra e in Germania. Principali fautori di queste idee furono John Perry, docente presso il Royal College di Londra e membro della British Association for the Advancement of Science, e Felix Klein. In una conferenza a Glasgow (UK), organizzata dall'Associazione di cui era membro, Perry (1901) enfatizzò il valore educativo dell'introduzione di procedimenti *sperimentali* nelle prime fasi dell'apprendimento della geometria euclidea. La proposta di Perry causò una serie di dibattiti, non solo in Inghilterra, ma si fu subito d'accordo che un approccio intuitivo poteva permettere agli studenti di affrontare la geometria razionale nelle fasi successive.

Il pensiero di Klein è ben rappresentato dai programmi proposti nel 1905 da un'apposita commissione ad un convegno degli scienziati ([1]) a Merano (allora austriaca) e ripubblicato poi da Klein e Schimmak (1907); in tali programmi si propone che l'insegnamento geometrico inizi a 11 anni con l'osservazione di oggetti della vita quotidiana e prosegua fino ai 13 anni con lo studio di concetti base delle figure e con

([1]) Reformvorschläge für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, Die Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte, 1905.

l'uso della riga e del compasso per effettuare costruzioni e misurazioni; seguirà poi lo studio teorico delle proprietà delle figure dai 13 ai 17 anni.

I libri di testo di Godfrey & Siddons (1903) in Inghilterra e di Treutlein (1911) in Germania rispecchiano le posizioni rispettivamente di Perry e di Klein. La geometria intuitiva è vista come capacità di saper vedere nello spazio, e ha il compito da un lato di fornire elementi per interpretare il mondo reale, dall'altro di sviluppare capacità logiche. Illustrando l'opera di questi autori, Fujita, Jones e Yamamoto (2004) definiscono la geometria intuitiva come "la capacità di 'vedere' figure geometriche e solidi, creandoli e manipolandoli nella mente per risolvere problemi geometrici" (p. 2). Per esempio, un esercizio del libro di Treutlein chiedeva agli studenti di costruire nuove figure, usando alcuni triangoli assegnati. Gli studenti potevano manipolare i triangoli, ma anche immaginare configurazioni spaziali. Oppure, per sviluppare le capacità immaginative, era richiesto agli studenti, dopo aver studiato un modello concreto di cubo, di costruire un "cubo d'aria" cioè un cubo immaginario e di indicare, usando le mani, i lati paralleli e le posizioni degli spigoli.

In questa accezione la geometria intuitiva ha dei contenuti "propri" rispetto alla geometria razionale, pur essendone considerata propedeutica, e non è tutto sommato lontana da quella che sarà qualche decennio dopo l'idea di geometria intuitiva di Hilbert.

2. – La geometria intuitiva nei programmi scolastici italiani dal 1867 al 1900: provvedimenti e motivazioni

Facciamo un passo indietro tornando alla fine del 19° secolo. Le idee dei legislatori italiani di quel periodo sono sicuramente diverse da quelle descritte nel paragrafo precedente: esse prevedono per la geometria intuitiva sostanzialmente gli stessi contenuti della geometria razionale, solo presentati in modo più semplice.

Il termine geometria razionale (più precisamente "insegnamento razionale dell'aritmetica e della geometria") compare nei programmi scolastici italiani nel 1867. La riforma del Ministro Coppino (R.d. 10-10-1867 n. 1942) introdusse l'uso degli *Elementi* di Euclide come libro di testo per l'insegnamento della geometria nel Ginnasio-Liceo. Il

Libro I doveva essere svolto nel 5° anno del Ginnasio, i Libri II e III nel primo anno del Liceo, e i restanti libri nel secondo anno del Liceo. ([2])

La legge Coppino non prevedeva alcun insegnamento geometrico nel *ginnasio inferiore*: in questa fascia scolare, corrispondente all'attuale scuola media, i docenti erano "professori di aritmetica".

Si noti che, per contro, per le parallele *Scuole Tecniche* (che, a differenza degli *Istituti Tecnici*, dipendevano dal Ministero della Pubblica Istruzione) la stessa riforma Coppino aveva previsto un insegnamento della geometria con metodo grafico-intuitivo. L'insegnante doveva abituare i giovani a ricavare dalla figura disegnata la prova intuitiva delle proprietà ad essa associate. Si legge nelle indicazioni "*Non importa che la via battuta per dimostrare una proposizione sia rigorosamente scientifica: importa bensì che gli scolari acquistino la cognizione di quella proposizione e la persuasione della sua verità*" (r.d. 10-10-1867 n. 1942). Sorprende, afferma Vincenzo Vita (1986, p. 40), che tali considerazioni metodologiche non siano state ritenute allora sufficienti a consigliare l'introduzione della geometria anche nel ginnasio inferiore. La geometria della Scuola Tecnica subirà in seguito alcune modifiche, ma in modo assai più attenuato che nel ginnasio.

Occupiamoci ora, più in dettaglio, del ginnasio e dei relativi libri di testo.

Nel 1881 (R.d. 16.06.1881 n. 459) il Ministro Baccelli introdusse lo studio della geometria intuitiva e del disegno geometrico in *tutte* le classi del ginnasio. Nel decreto si legge che

> A cominciare dall'anno scolastico 1881-82 cesserà nelle classi IV e V del ginnasio, l'insegnamento dell'aritmetica ragionata. Il professore di aritmetica eserciterà i giovani in tutte le classi sull'aritmetica pratica, sulla geometria

([2]) L'istruzione secondaria era divisa in due livelli. Per l'Istruzione Classica la legge Casati del 1859 aveva introdotto il *Ginnasio-Liceo*. Il ginnasio durava 5 anni ed era diviso in ginnasio inferiore (3 anni) e ginnasio superiore (2 anni); seguivano 3 anni di liceo. Tre anni di *Scuola Tecnica* e 4 anni di *Istituto Tecnico* coprivano invece l'Istruzione Tecnica (vedi Menghini, 2006). L'Istruzione Magistrale era coperta dalla *Scuola Normale*, di durata triennale, preceduta a partire dal 1880 da un'apposita *Scuola Complementare*, divenuta triennale e obbligatoria solo nel 1896. Dunque tre tipi di scuola corrispondevano alla fascia dell'attuale Scuola Media: il ginnasio inferiore, la scuola tecnica e la scuola complementare.

intuitiva, sui principii di scienze naturali e sul disegno secondo le istruzioni che saranno pubblicate.

E proprio nelle istruzioni ([3]) si leggono i motivi che hanno spinto all'introduzione di questo tipo di insegnamento:

Lo scopo dell'insegnamento della geometria intuitiva nelle prime classi del ginnasio è di procurare ai giovanetti, con metodi facili e per quanto sia possibile con prove di fatto, le prime e più importanti nozioni della geometria, nozioni che riescono acconcie al regolare sviluppo del loro giovane intelletto, [...] che le dimostrazioni, se necessarie, siano semplici, pratiche, sicché lo scolaro si convinca facilmente di quel che sente e vede. Imparerà a suo tempo, e forse con maggior interesse, come queste stesse dimostrazioni possano essere svolte con maggiore estensione e profondità [...]. Allo studio della geometria intuitiva va congiunto nelle prime due classi del ginnasio quello del disegno geometrico. [...] non dovendo il professore che esercitare i giovanetti a disegnare a mano libera delle rette e delle curve parallele, delle rette perpendicolari; [...] a dividere rette ed angoli in parti uguali, e così via. In seguito, poi coll'uso degli istrumenti, farà ripetere gli accennati problemi [...].

Annessa all'originale r.d. del 1881 compare una relazione del ministro ([4]) che illustra al Re i motivi e le questioni tecniche della riforma che si vuole apportare nell'insegnamento della matematica. In essa è, infatti, scritto:

Sire [...] rispetto all'insegnamento nelle classi ginnasiali, è riconosciuto che sia prematura in esse la trattazione dell'aritmetica ragionata, e si lamenta che ne' programmi di queste classi non entrino certe cognizioni elementari del mondo reale [...] Nessun ostacolo può trattenerci dal commettere a questo professore [di aritmetica] il solo insegnamento dell'aritmetica pratica, aggiungendogli l'obbligo di esercitare i giovani sulla geometria intuitiva, sui principi di scienze naturali e sul disegno. Qui non mi dissimulo un'obiezione che può esser fatta, se gli attuali professori ginnasiali di aritmetica siano idonei a dare tale insegnamento, elementare sì, ma nuovo e complesso. Il dubbio non è

([3]) Bollettino Ufficiale X del M. P. I., ottobre 1881 "Istruzioni e programmi per l'insegnamento nei Licei e nei Ginnasi in esecuzione del r.d. 16-06-1881", pag. 785-821.

([4]) Conservata nella raccolta ufficiale leggi e decreti presso l'Archivio centrale dello Stato.

senza gravità; tuttavia gli impedimenti saranno minori della previsione [...] La bontà del metodo, l'intelligenza, l'operosità degli insegnanti e dei discepoli, la scuola mutata, per così dire, in officina di osservazione in cui l'opera e gli sforzi dei maestri e degli alunni si affratellino, tutto questo, sostituito alle lezioni ambiziose, porterà i frutti che sono nel desiderio di tutti.

Si noti come si sottolinei la caratteristica di "semplicità" che le discipline scientifiche devono avere e il loro ruolo nell'avvicinare i giovani al mondo reale. Addirittura, per ovviare alle difficoltà della geometria razionale, questa è rinviata al liceo, saltando quindi i due anni del ginnasio superiore.

Dopo soli tre anni (R.d. 23.10.1884, n. 2737) il ministro Coppino sopprime lo studio della geometria intuitiva nel ginnasio inferiore e anticipa lo studio della geometria razionale al 4^{o} ginnasio. La decisione è presa in particolare su suggerimento del matematico *Eugenio Beltrami* (1836-1900). In quegli anni il legame che si era venuto a creare tra matematica elementare e ricerca avanzata, attraverso gli studi sui fondamenti, portava alcuni dei matematici più attivi nella ricerca pura a impegnarsi in prima persona non solo nella preparazione dei manuali per la scuola, ma anche nella politica culturale. Eugenio Beltrami non era, a dire il vero, molto impegnato nell'ambito dell'insegnamento della matematica, ma era stato eletto al Consiglio Superiore della Pubblica Istruzione.

Nella "Relazione per l'insegnamento delle matematiche per il ginnasio ed il liceo", annessa al regio decreto e firmata dello stesso Beltrami, leggiamo i motivi della soppressione della geometria intuitiva:

La determinazione dei limiti e dell'indole di questo insegnamento non è suscettibile di forma assoluta e non è d'altronde supplita praticamente da una tradizione secolare, come avviene per i classici elementi della matematica... Una linea di separazione tra le varie proposizioni della geometria elementare, dal punto di vista del maggiore o minore apparato di logica deduttiva che esige il loro apprendimento e, in corrispondenza, del più o meno frequente appello che bisogna fare all'intuizione diretta, è per se stessa alquanto indecisa e quindi variamente tracciata dagli intelligenti, perde ogni precisione e sfuma quasi compiutamente agli occhi degli insegnanti superficiali (Beltrami, 1885, pp. 16-17).

Dunque avrebbe influito sulla decisione la mancanza di una chiara demarcazione dei confini tra geometria intuitiva e geometria razionale, e quindi la preoccupazione che gli insegnanti non sapessero dare il giusto peso all'aspetto intuitivo-sperimentale perché legati al tradizionale aspetto logico-deduttivo. In realtà gli insegnanti del ginnasio inferiore non avevano mai insegnato geometria nelle loro classi, e il problema potrebbe essere piuttosto questo, come presagito nella lettera al re del 1881. Anche Giuseppe Veronese, nella prefazione alla prima edizione del suo libro di testo per la scuola media scriverà qualche anno dopo

> Tutti ricordano la cattiva prova fatta parecchi anni or sono dall'insegnamento di una cosiddetta geometria intuitiva, che finì per essere abolita perché più dannosa che utile all'insegnamento della geometria razionale (Veronese, 1901, p. vi).

Diamo naturalmente per scontato che, come sempre accade, ci siano anche state esperienze positive nell'impartire questo nuovo tipo di geometria; ma certo mancavano, in quegli anni, testi che potessero indirizzare i docenti al suo insegnamento. Ciò che viene messo in discussione è il valore *propedeutico* della geometria intuitiva. La riforma del 1884 prevede, nel ginnasio inferiore, lo studio della sola aritmetica pratica al fine di avviare i giovani ad acquisire familiarità con i calcoli, e a partire dal ginnasio superiore lo studio dell'aritmetica razionale e dei libri di Euclide.

Negli anni successivi al 1884 e fino al 1900 si hanno diversi rimaneggiamenti dei programmi ministeriali, ma nessuno di rilievo: l'incertezza principale sembra essere l'inizio dello studio degli "Elementi" di Euclide, che oscilla fra le classi III, IV e V ginnasio. Da una parte si cerca di non costringere gli studenti ad affrontare prematuramente uno studio razionale, dall'altra non si vuole posticipare l'inizio di tale studio che ha effetti positivi sullo sviluppo mentale dei giovani.

Il problema rimaneva aperto. Quando un nuovo programma viene emanato nel 1900 (R.d. 24.10.1900, n. 361) dal ministro Gallo, la geometria intuitiva del ginnasio inferiore è ripristinata. Per evitare gli inconvenienti lamentati in precedenza, il programma prevede soltanto le nozioni elementari riguardanti la terminologia delle figure geometriche più semplici, le regole di calcolo per lunghezze, aree e volumi, nonché i primi rudimenti di disegno geometrico. Nelle istruzioni si dice che il nuovo studio "costituisce una propedeutica allo studio della geometria razionale", ma non è specificato come questo insegnamento debba essere presentato per costituire effettivamente un avviamento allo studio razionale della geometria. Anzi, esplicitamente esso costituisce "una ripetizione ed un ampliamento delle nozioni acquistate dagli alunni nelle scuole elementari" ed è visto sotto l'aspetto pratico, accentuato dall'insegnamento del disegno geometrico, senza però l'enunciazione delle regole soggiacenti alle varie costruzioni grafiche.

I programmi per il ginnasio non appaiono molto diversi da quelli stabiliti, tra il 1883 e il 1890, per il *corso complementare* ([5]). In questi ultimi programmi, alla nomenclatura delle principali figure piane e solide (risp. 1° e 2° anno, d.m. 1.11.1883) si aggiungono nozioni pratiche utili negli esercizi di disegno (r.d. 17.9.1890, n.7143) e lo studio delle principali figure geometriche e delle loro misure (r.d. 29.10.1891).

Per quanto riguarda la geometria razionale nella scuola superiore, i nuovi programmi lasciano libertà sulla scelta del libro di testo, purché segua il "metodo euclideo" (cfr. Maraschini & Menghini, 1992).

3. – Libri di testo di geometria intuitiva nei primi del '900

Subito dopo il 1900 compaiono i primi libri di testo per il ginnasio inferiore espressamente dedicati alla geometria intuitiva. Troviamo nel 1901 i testi di Giuseppe Veronese (*Nozioni elementari di geometria intuitiva*) e di Giovanni Frattini (*Geometria intuitiva*). Di *Giuseppe Veronese* (1854-1917) sono note l'opera geometrica (in particolare nel campo della geometria a più dimensioni) e le ricerche relative ai fondamenti della matematica. Il suo punto di vista si riflette nel libro di testo di geometria per i Licei del 1897, in cui il solo concetto primitivo

([5]) Vedi nota 2.

è il punto e in cui la retta è *un sistema lineare di punti con due ordini*. Veronese appartiene a quel gruppo di autori che, come Hilbert, evitano il ricorso ai movimenti rigidi e introducono l'uguaglianza (o congruenza) tra enti geometrici tramite opportune corrispondenze biunivoche.

Giovanni Frattini (1852-1925) fu insegnante di matematica e geometria descrittiva in un Istituto Tecnico, con interessi nel campo dell'algebra (si pensi ai *sottogruppi di Frattini*).

Entrambi gli autori seguono i programmi, ma si riscontrano differenze nelle loro concezioni di geometria intuitiva. Vale la pena analizzare in dettaglio analogie e differenze su alcuni punti specifici.

3.1 – *Concezioni di geometria intuitiva*

Nella prefazione al suo libro, Veronese scrive "Come prescrivono le istruzioni ministeriali, mi servo principalmente delle immagini delle figure per dare i loro nomi e per rilevare le proprietà più ovvie [...]" (Veronese, 1901, VI-VII). Dunque Veronese rileva le principali proprietà delle figure geometriche basandosi, più che sull'intuizione, sulla sola osservazione. E nella prefazione alla seconda edizione del 1902: "Queste nozioni infatti devono essere tali da essere riconosciute per vere, senza alcuna considerazione matematica all'infuori dell'osservazione, da tutte le persone dotate di mente sana". Veronese dichiara di occuparsi solo "di quelle figure che hanno una effettiva rappresentazione nel campo limitato dell'osservazione" (Veronese 1901, VII), neppure retta, piano e spazio illimitati, dal momento che richiedono un processo di astrazione, fanno inizialmente parte della sua trattazione.

Frattini parla, nell'introduzione al suo libro, di "verità geometrica" che scaturisce "dall'osservazione immediata delle cose, perché in ciò è l'essenza del metodo intuitivo" (Frattini 1901, p. 6). L'intuizione favorisce le prime *indagini*. Frattini non ha problemi a parlare di rette e piani *illimitati*, anche se, nell'introdurre le rette parallele, preferisce definirle come rette che non si incontrano se *indefinitamente prolungate*.

3.2 – *Nozioni preliminari*

Nelle *Nozioni preliminari* Veronese fa esempi di *corpi* (tavolo, casa, ...) e delle loro *proprietà* (colore, peso, ...). Le idee *astratte* si producono in noi se consideriamo solo alcune di tali proprietà. Così dai punti materiali (granelli di sabbia) si giunge al concetto astratto di punto, e poi alle linee materiali e al concetto astratto di linea, definita, oltre che con esempi pratici (segno di una matita) anche come *sistema lineare di punti* (chiara anticipazione di ciò che gli alunni troveranno nel suo libro di testo delle superiori).

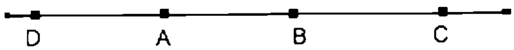
Come per tutti i trattati di geometria intuitiva di quel periodo, la retta è introdotta con l'immagine di un filo teso, spiegando poi come essa si disegna con un righello. In modo analogo la pagina di un libro conduce all'idea di superficie. Veronese, staccandosi dalle immagini concrete con cui aveva iniziato, afferma poi che esistono punti distinti, che esistono linee aperte e chiuse, che una retta ha due diversi ordini, che un punto X divide una retta in due parti, che esistono punti interni ed esterni ad un segmento, etc. Punti, linee, superfici, solidi e qualunque gruppo di punti si chiamano figure geometriche e la geometria è definita come scienza delle figure.

Le nozioni preliminari di Frattini sono sostanzialmente le stesse, ma il linguaggio è più semplice e il testo è più conciso. Per esempio, spiega che l'ordine su una retta è determinato dalle diverse posizioni A, B, C di un punto che si muove su di essa. L'idea di retta indefinitamente prolungabile è fornita con l'immagine di un filo elastico. Frattini include fra le nozioni preliminari anche alcune proposizioni (di fatto assiomi di incidenza) come "due punti determinano una retta" e "se due rette hanno due punti in comune esse coincidono", spiegando ciò per mezzo di un filo, prima curvo e poi teso. Proprietà analoghe sono stabilite per rette e piani nello spazio, con l'aiuto di un foglio di carta.

Frattini definisce anche la distanza come misura di un segmento, e afferma che il segmento di retta è la via più breve tra due suoi punti. Tale definizione di natura metrica non è data da Veronese, il quale ritiene dannoso introdurre concetti che necessitino di essere poi corretti negli studi superiori.

3.3 – *Evidenza intuitiva degli assiomi*

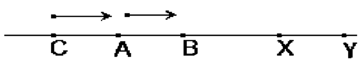
Nessuno dei due autori menziona il termine assioma, come è ovvio attendersi, ma entrambi introducono i corrispondenti enunciati con esempi pratici. Come abbiamo visto, Frattini illustra nei Preliminari gli assiomi di incidenza per il piano e per lo spazio. Lo stesso fa Veronese nel capitolo relativo alla *retta* e al *piano*, ma aggiunge anche l'assioma delle parallele e si dilunga molto in particolare sugli assiomi di uguaglianza, come

> Ogni segmento della retta non è uguale ad una sua parte.
>
> 
>
>
> Ad es. il segmento AB della figura precedente non è uguale a CD. Ciò si verifica in ogni caso ad occhio, o con la lista di carta, o col compasso.

Veronese "cede" anche alla tentazione di enunciare in modo formale le proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva dell'uguaglianza di segmenti. Spiega poi che l'uguaglianza di segmenti può essere verificata con una riga o un compasso.

Vediamo ad esempio come uno dei classici assiomi della distanza viene tradotto in forma di osservazione:

> Sempre che l'estensione del campo della nostra osservazione lo permetta, possiamo verificare che: nella retta r, dati un punto A e un segmento XY, vi sono nella direzione XY due segmenti CA ed AB eguali ad XY. Per la verifica basta far uso della solita lista di carta segnando dapprima su di essa un segmento uguale ad XY e facendola scorrere lungo la retta r nella direzione della freccia (Veronese, 1901, p. 9).



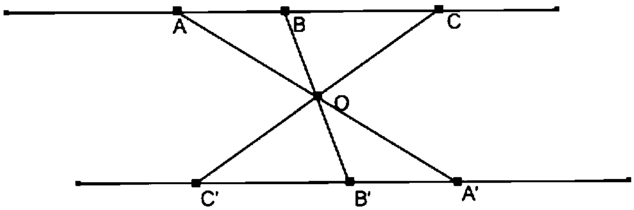
Va osservato che gli assiomi di uguaglianza (o congruenza) non vengono presentati, al giorno d'oggi, neppure nella scuola superiore. In effetti, mentre la loro formulazione è tutt'altro che semplice, le verifiche sperimentali appaiono piuttosto ingenue se non inutili.

3.4 – *Dimostrazioni*

Non ci sono dimostrazioni nel testo di Veronese; gli enunciati degli assiomi hanno il solo scopo di fare vedere agli studenti ciò che troveranno poi alle Superiori in modo esclusivamente formale (perlomeno tale è il punto di vista di Veronese).

L'unica parvenza di dimostrazione si ha quando, subito dopo aver introdotto la definizione di punti opposti rispetto ad un punto O (simmetria centrale), Veronese enuncia la proprietà che:

> *La figura opposta di una retta rispetto ad un punto è un'altra retta.*
> Abbiasi infatti una retta ABC e si costruisca la figura opposta A′B′C′ rispetto ad O. Si verifica col compasso, oppure ricalcando la figura AOB su una carta da lucidi e rovesciandola in modo che OA venga a combaciare con OA′, e OB con OB′, che il punto C′ è situato sulla retta r, determinata da B′ e A′... (p. 13).



Il motivo di tale "dimostrazione" è la definizione di rette parallele: per evitare il ricorso all'infinito, Veronese definisce parallele due rette quando l'una è simmetrica dell'altra rispetto ad un punto (e fornisce poi istruzioni per verificare se due rette sono parallele, sempre basandosi sulla simmetria centrale).

Molto diversa è su questo punto la posizione di Frattini, il quale presenta nel suo testo diverse dimostrazioni pratiche, dando anche più peso alle proprietà dei poligoni.

Vediamo il carattere di alcune sue dimostrazioni:

> *In un piano per un punto a una retta si può condurre una perpendicolare, e non si può condurre che quella.*
> Si pieghi infatti il piano, quasi immenso foglio di carta, per ottenerne l'angolo retto; e si faccia in modo che, delle piegature, una segua la retta alla quale si vuol condurre la perpendicolare, e l'altra contenga il punto pel quale la perpendicolare deve passare. Quindi si spieghi il foglio, e vi si vedrà impressa la traccia della perpendicolare dal punto alla retta (p. 21).

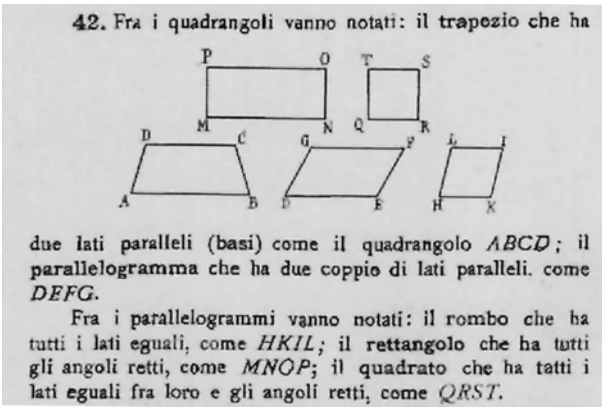
A loro volta le rette perpendicolari sono già state definite informalmente in base ancora a quanto si vede su un foglio piegato due volte.

Per dimostrare *che la somma dei tre angoli di qualsivoglia triangolo vale due retti*, Frattini ricorre alla dimostrazione classica, che, come è noto, si basa su una parallela a un lato e sull'uguaglianza di angoli alterni interni. Ovviamente l'uguaglianza degli angoli alterni formati da rette parallele è introdotta senza dimostrazione, con semplicemente un riferimento ad una grata ("lo studioso ne ricerchi il perché"). Invece, Veronese non menziona questa proprietà e neppure la più nota conseguenza.

Frattini riporta, con un metodo pratico, diverse dimostrazioni relative a triangoli e quadrilateri, quale:

> *le diagonali di un parallelogrammo si dividono scambievolmente per metà.*
> Se infatti il parallelogrammo [ABCD] venisse staccato dal foglio del disegno, esso lascerebbe un vuoto che potrebbe essere colmato, o rimettendo il parallelogrammo nella posizione di prima, o mettendo l'angolo A segnato con archetto sull'eguale C, il lato AD sull'eguale CB e il lato AB sull'eguale CD. In tal modo le diagonali della figura, sebbene rovesciate, tornerebbero nella posizione di prima. Lo stesso farebbe il loro punto di incontro. E i due segmenti OC e OA si scambierebbero: segno che sono uguali (p. 33).

Per quanto riguarda i quadrilateri, Veronese riporta solo la seguente Figura 1 e fornisce le definizioni relative ai vari triangoli e quadrilateri senza enunciare altre proprietà di queste figure. Anche per la circonferenza Veronese si limita alla figura e alla definizione.


42. Fra i quadrangoli vanno notati: il **trapezio** che ha

due lati paralleli (basi) come il quadrangolo *ABCD*; il **parallelogramma** che ha due coppie di lati paralleli. come *DEFG*.

Fra i parallelogrammi vanno notati: il **rombo** che ha tutti i lati eguali, come *HKIL*; il **rettangolo** che ha tutti gli angoli retti, come *MNOP*; il **quadrato** che ha tatti i lati eguali fra loro e gli angoli retti, come *QRST*.

Figura 1. – Quadrilateri nel testo di Veronese.

3.5 – *I movimenti*

L'uso delle trasformazioni geometriche (isometrie) è diffuso in tutti testi di geometria per il ginnasio inferiore di quel periodo ed è molto efficace. Esse non sono viste con le loro proprietà formali e sono considerate adatte ad un'introduzione intuitiva, come *strumento*. In effetti le trasformazioni possono essere eseguite sperimentalmente e permettono di osservare il risultato. Sia Veronese che Frattini le usano per muovere e confrontare figure; solo Veronese fornisce una definizione (della simmetria centrale). Questa posizione riguardo all'uso di trasformazioni geometriche è chiarita da Veronese nell'appendice del suo testo per il ginnasio superiore e il liceo:

> Abbiamo già detto che per costruire praticamente oggetti rettilinei eguali, si fa uso di alcuni istrumenti, fra i quali i più semplici sono la riga e il compasso; e abbiamo già visto che essi servono a risolvere praticamente nel disegno i problemi di geometria piana, che teoricamente si risolvono colla retta e il circolo. [...] I postulati geometrici [...] bastano per lo svolgimento razionale della geometria, non bastano però per le applicazioni di essa nell'ambiente esterno.
>
> Questo mezzo pratico [...] ci è fornito dal movimento dei corpi [...]. (Veronese 1897, p. 197).

3.6 – *Costruzioni Geometriche*

Nel corso di tutto il testo, Veronese assegna semplici esercizi di disegno a mano libera (tracciare una retta punteggiata, costruire un segmento uguale ad un altro segnando anche alcuni punti corrispondenti, costruire la simmetrica di una figura rispetto ad un centro). Solo nell'ultimo capitolo egli introduce le vere e proprie costruzioni geometriche, che "non hanno altro fine che di far meglio acquistare con la pratica del disegno l'intuizione netta delle forme geometriche, di cui devono poi studiarne la struttura col puro ragionamento". Il capitolo sulle costruzioni (quali costruzione di un triangolo dati i tre lati, costruzione della bisettrice di un angolo, etc. e altre più complesse), del tutto indipendente dai capitoli precedenti, è ovviamente basato su teoremi taciti (in particolare i criteri di uguaglianza dei triangoli), mai menzionati. Il capitolo è preceduto da istruzioni particolareggiate su come fare un disegno nitido e su come verificare la “bontà” di righello, squadra, gomma e matite.

Anche per Frattini il capitolo sulle costruzioni geometriche compare alla fine del testo, ma egli cerca di motivare le varie costruzioni usando proprietà viste nel corso del libro. Per fare un esempio, entrambi gli autori illustrano la classica costruzione della perpendicolare ad una retta data passante per un punto dato. Veronese non spiega il perché della costruzione (come del resto accade talvolta anche oggi nel disegno tecnico della scuola media o del primo anno del liceo scientifico), mentre Frattini la spiega facendo riferimento alle proprietà delle diagonali del rombo.

3.7 – *Il riferimento all'intuizione*

Al di là delle premesse, dall'analisi dei due testi emergono posizioni diverse sul ruolo che l'alunno deve svolgere per “intuire”. Come abbiamo visto, Veronese presenta gli assiomi per anticipare ciò che gli alunni ritroveranno in un secondo momento al ginnasio superiore, mentre Frattini cerca di coinvolgere l'alunno presentando alcune “dimostrazioni” con metodi pratici. Se pur va dato atto a Veronese di aver fatto un primo passo ragionato verso la geometria intuitiva, riscontriamo che da nessuna parte è richiesto all'alunno né uno sforzo intuitivo né una qualche forma di ragionamento. Non è del nostro parere Veronese, il quale dichiara che

> il metodo qui usato è per lo scolaro potentemente suggestivo, perché non lo obbliga a seguire passivamente un ragionamento, ma esige sempre la sua attiva collaborazione, invitandolo con gli oggetti e con le figure che gli stanno dinanzi a confrontare, a costruire figure, a fare ogni momento verificazioni.

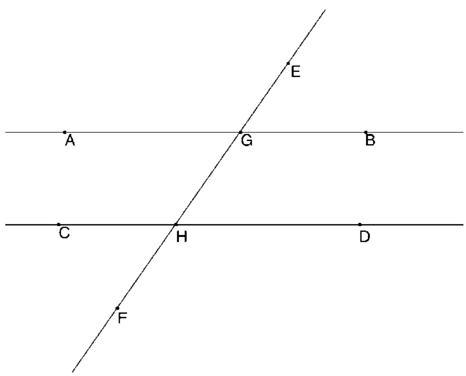
Per Frattini la questione è diversa. Frattini non prevede probabilmente che il docente effettui dimostrazioni con fogli, fili e altro materiale – e forse questo tipo di attività non è immaginabile all'interno delle scuole di allora – ma chiede all'alunno lo sforzo di “immaginare” operazioni effettuate col materiale. Un bell'esempio si trova quando Frattini vuole spiegare che *ciascun lato di un triangolo è* *maggiore della differenza tra gli altri due:*

> S'immagini infatti un triangolo di cui due lati sieno rappresentati da aste unite a cerniera come le gambe di un compasso, e il terzo da un filo teso. Ravvicinando le due aste, fino a riportare la minore sulla maggiore, il filo si rallenta tra un estremo e l'altro della loro differenza. Questa differenza è dunque minore della lunghezza del filo, cioè del terzo lato del primitivo triangolo.

Notiamo infine che il testo di Frattini non contiene esercizi, mentre quello di Veronese contiene solo pochissimi esercizi in cui si richiede il disegno a mano libera di alcune figure o relazioni geometriche. I testi sono in un unico volume di poco più di 100 pagine per i tre anni del ginnasio inferiore. Questa "essenzialità" è una caratteristica comune a tutti i libri qui analizzati.

4. – Sviluppi successivi nei libri di testo e nei programmi per la scuola media

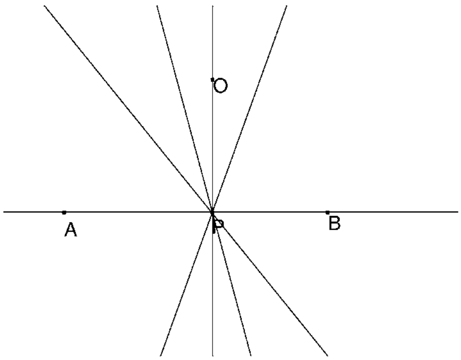
Nel 1905 viene pubblicato il libro di testo di Costanzo e Negro (1905). Continua l'uso delle trasformazioni geometriche, scompare il foglio di carta con cui aveva lavorato Frattini e rimangono poche dimostrazioni. L'unica verifica intuitiva riguarda un teorema non dimostrato né da Veronese né da Frattini:



> *Se due rette sono parallele gli angoli corrispondenti sono uguali.*
>
> Basta rendersi conto di questa proprietà per una sola coppia di angoli, p.es. per gli angoli CHG, AGE. Si faccia scorrere la retta HG lungo sé stessa, immaginando che la CD sia ad essa rigidamente collegata. La CD si manterrà durante tutto il movimento sempre parallela alla AB, e quando il punto H coinciderà con G, tutta la CD coinciderà con la AB, quindi anche l'angolo CHG coinciderà con l'angolo AGE, ossia sarà $< CHG = < AGE$ (pagg. 29-30).

A questo punto gli autori possono dimostrare che la somma degli angoli di un triangolo è 2 retti.

La retta perpendicolare è definita grazie alla seguente costruzione:



In un piano si conduca una retta AB e per un punto P di essa si conduca una retta PC.

Si faccia ruotare la PC, attorno al punto P: tra le infinite posizioni che essa può assumere, ne esiste una ed una sola per cui gli angoli formati con la AB sono uguali. Questa posizione è data dalla direzione della PO e si dice che la PO è perpendicolare alla AB (p. 23). ([6])

La "solita verifica sperimentale" non meglio precisata (misurazione? piegatura?) è chiamata in causa per enunciare, fra le proprietà del parallelogramma, che le diagonali si tagliano scambievolmente per metà. Vengono poi menzionati (più che negli altri due testi citati) teoremi di geometria dello spazio. Non ci sono verifiche sperimentali né dimostrazioni, ma compare spesso la frase "l'esperienza insegna e la geometria elementare dimostra" (ad esempio che fra tutti i segmenti che partono da un punto e terminano in un piano, il segmento perpendicolare al piano è il più piccolo). Il testo presenta alcuni esercizi di riepilogo alla fine della prima parte (la seconda parte riguarda le misure). Gli autori premettono che

> si tratterà il più delle volte di verificare su di una certa figura alcune particolari proprietà che sono facile e immediata conseguenza di quanto è studiato. Dove si dice dimostrare, cerchi l'alunno di richiamare alla mente la proprietà che può

([6]) Notiamo che una dimostrazione analoga sull'unicità della perpendicolare si ritrova anche in un'edizione postuma del libro di Legendre, in realtà curata da Blanchet (Legendre, A.M. 1784, *Eléments de géométrie*, 45a ed. «avec additions et modifications par M.A. Blanchet», 1935, Librairie de Paris, Paris). Il testo di Legendre, rivolto alle scuole superiori, fu molto criticato – in Italia – per la mancanza di rigore.

dare la spiegazione di quanto è affermato [...] e non si sgomenti se per le prime volte troverà difficilissimo l'intuire [tale] proprietà (p. 66).

Nel 1905 il ministro Bianchi (boll. Uff. P.I., 1.06.1905) affidò ad una Commissione Reale per l'ordinamento degli studi secondari in Italia l'incarico di riorganizzare la scuola secondaria italiana e di affrontare la questione dell'unicità o meno della scuola media inferiore. La commissione, della quale faceva parte il matematico e filosofo Giovanni Vailati, concluse i lavori nel 1909 con una *Relazione* (7). La Relazione propone di basare l'insegnamento della geometria sulle esercitazioni grafiche e sulla costruzione delle figure, come mezzo per avviare i giovani alla ricerca delle proprietà geometriche. Si tratta cioè non tanto di geometria intuitiva quanto di una geometria operativo-sperimentale. La commissione considera un "pregiudizio" il ritenere che il rigore si possa acquisire solo in una sistemazione definitiva della geometria che poggi su concetti primitivi e su premesse indimostrabili. L'importante è riconoscere in modo chiaro le ipotesi su cui la deduzione si basa.

In realtà quella della Commissione Reale rimase una proposta, perché non ricevette la necessaria approvazione in parlamento. È però probabile che essa abbia avuto qualche influenza su Veronese, il quale era in corrispondenza con Vailati proprio in riferimento al lavoro della commissione, e in una sua lettera del 1907 ribadisce la necessità di evitare il concetto di infinito (Cantù, 2000). In una riedizione del suo testo di geometria intuitiva destinata alla Scuola Complementare, Veronese (1907) aggiunge qualche operazione pratica, per esempio costruire un triangolo equilatero o un quadrato o un pentagono usando una striscia di carta. Aggiunge anche dimostrazioni, ma queste non sono di tipo "pratico" bensì tradizionale. Presenta quindi questa volta la classica dimostrazione della somma degli angoli di un triangolo, preceduta dalla dimostrazione dell'uguaglianza degli angoli alterni interni formati da due rette parallele con una trasversale. Quest'ultima dimostrazione sfrutta la simmetria rispetto ad un centro rappresen-

(7) v. *Il Bollettino di Matematica*, Anno IX, 1910, pp. 36- 59.

tato dal punto medio del segmento intercettato dalla trasversale tra le due parallele. Ovviamente Veronese deve modificare la premessa al testo per sottolineare la doppia natura, pratica e razionale, della geometria e per illustrare in cosa consista il metodo razionale.

Ancora nel 1907 compare un libro di Pisati che in un certo senso contesta, nella prefazione, l'impostazione dei programmi del 1900, asserendo che

> i risultati ottenuti sembrano dimostrare che nelle scuole medie inferiori voler prescindere interamente dall'indirizzo formale sarebbe grave errore. Le menti degli alunni nei primi anni sono di natura formaliste ... L'insegnamento intuitivo della geometria non è poi più facile di quello formale; esso corrisponde ad uno scopo più altamente scientifico e filosofico, e più lontano dalla praticità dell'insegnamento. [...] credo perciò che la giusta soluzione sia [...] dare svolgimento alla parte intuitiva e sperimentale, ma procedere di pari passo con quella formale.

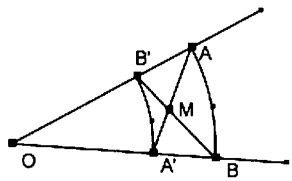
In effetti, il libro inizia con l'esposizione dei concetti di assioma, postulato, teorema, corollario e problema. Nel testo vi sono esplicitamente teoremi e dimostrazioni. Rimane l'uso della simmetria assiale per alcune dimostrazioni (per esempio che ciascun punto dell'asse di un segmento è equidistante dai due estremi del segmento) e il teorema secondo cui in un triangolo la somma di due lati è sempre maggiore del terzo è dimostrato facendo riferimento al fatto che "la retta segna la minima distanza fra due qualunque dei suoi punti". Si noti che questa contestata definizione metrica della retta, utilizzata anche da Frattini, non sarà ripresa in nessun volume di geometria per la scuola superiore italiana. I teoremi sull'esistenza di baricentro, ortocentro e incentro sono solo enunciati affermando "si dimostra che ...". In questo modo Pisati può giustificare tutte le costruzioni geometriche riportate in fondo al volume. Come per Frattini, in questo testo non ci sono esercizi.

Già con il testo di Pisati il titolo "geometria intuitiva" comincia a scomparire dai libri per la scuola media, per ricomparire solo con il testo di Emma Castelnuovo del 1946. È indubbio che i libri per la scuola media stiano "scivolando" verso il metodo razionale.

Con la riforma di Giovanni Gentile del 1923 (R.d. 6.5.1923, n. 1054) si fa un passo indietro: per quanto riguarda la geometria nelle prime tre classi del ginnasio, "essa non deve avere altro scopo che quello di mantenere vivo il ricordo delle nozioni geometriche apprese nelle scuole elementari e di fissare bene la nomenclatura." Si chiede dunque ancora meno che nelle indicazioni del 1900.

Tra i libri usciti subito dopo la riforma Gentile va menzionato il libro di Francesco Severi del 1928, che contiene una prefazione dello stesso Ministro dell'Educazione Nazionale. Nonostante le lodi della prefazione, è difficile dire che il libro segua le indicazioni dei programmi. Non solo negli anni la geometria ha perso il suo carattere intuitivo-sperimentale, ma i libri di testo sono diventati quasi indipendenti dai programmi, del resto molto sintetici e privi di indicazioni didattiche. Il libro di Severi non fa eccezione. Esso contiene numerosi teoremi (fino a quelli sugli angoli al centro e alla circonferenza), dimostrati in modo classico, salvo introdurre i movimenti (rotazione e simmetria) come ausilio alla dimostrazione ed evitare la parola "teorema". Vediamo ad esempio il seguente:

> Un angolo qualunque ammette sempre una ed una sola bisettrice.
>
> Sia ab l'angolo dato, di vertice O. Sulle semirette a,b si prendano i due segmenti diseguali OA, OB: sia p.es. OA $>$ OB. Si segnino inoltre, sulle semirette stesse, i punti B$'$, A$'$ tali che OB$'$ $=$ OB, OA$'$ $=$ OA. Essendo OB$'$ $<$ OA, il punto B$'$ è interno al segmento OA e quindi giace da quella banda della retta AB che contiene O. Per contro, essendo OB $<$ OA$'$, il punto A' giace da quella banda della retta AB che non contiene O. Onde i punti A$'$, B' risultano da parti opposte della retta AB e quindi il segmento $A'B'$ incontra la retta AB in un punto M (Severi, 1928, p. 46).



Poi Severi passa a dimostrare che OM è la bisettrice cercata, servendosi del movimento che sovrappone a se stesso il piano dell'angolo, invertendo i lati a, b (omettiamo la lunga dimostrazione).

Eppure pochi anni prima Severi sembrava di opinione del tutto diversa:

> ... bisogna che nei primi gradi delle scuole (scuole elementari e scuole medie) l'insegnamento della matematica sia esclusivamente intuitivo. Col taglio della carta, coi modelli e con mille altri accorgimenti di cui si trovano esempi nei libri di testo inglesi, bisogna suscitare la "curiosità" degli allievi. Specialmente la geometria si dovrà considerarla, in questa fase, come una vera e propria scienza fisica.
>
> Vi sono esperienze graziosissime che inducono spontaneamente il ragazzo a domandare il perché del loro successo. E allora, senza che egli se ne accorga, si può cominciare a fargli seguire un ragionamento, che riconduca nel dominio immediato dei sensi la proprietà più riposta, conseguita prima sperimentalmente... Nessuna definizione nei primordi dell'insegnamento: suscitare l'idea coll'immagine concreta dell'oggetto e andare avanti. Lo so che queste sono norme pedagogiche che hanno tanto di barba; ma io mi domando quand'è che le abbiamo seguite sul serio nell'insegnamento della matematica. E anche nelle scuole superiori andare cauti, cauti, cauti colle disquisizioni sui principi.
>
> ... resterà quel che resterà; ma intanto il grosso della scolaresca non sarà stato ributtato da difficoltà insormontabili fin dalle prime lezioni ed avrà almeno imparato quel tanto che era possibile, ... (Severi, 1919).

Va anche notato che Severi aveva già scritto un libro di testo di geometria per le superiori (Severi, 1926/7). Tale libro era stato molto lodato per l'approccio sperimentale. Di fatto il libro manteneva inalterato l'approccio razionale ai teoremi, ma introduceva gli assiomi con considerazioni sperimentali, analogamente a quanto poi fatto nel libro di testo per il ginnasio inferiore.

Il testo di Severi per il ginnasio inferiore presenta esercizi alla fine di ogni capitolo. È singolare la formulazione, perché si tratta di un elenco di enunciati, ad esempio "1. Se AB è un segmento e C un punto interno, il punto B è esterno al segmento AC", oppure "6. Se due angoli, aventi lo stesso vertice, hanno in comune un lato e un punto fuori di questo, uno di essi contiene l'altro". Si suppone ovviamente che l'alunno debba verificare quanto enunciato, ma non vi sono indicazioni in tal senso.

Il contrasto fra lo scritto del 1919 e il libro di testo del 1928 rispecchia forse il problema cui aveva accennato Beltrami nel 1884, ovvero la difficoltà – per un matematico abituato a procedimenti deduttivi – di individuare il confine tra intuizione e rigore e di trovare un'argomentazione convincente della validità di una proposizione, senza dimostrarla rigorosamente.

Piccole variazioni troviamo in alcune riforme del 1936 e 1937, in cui si ammette che nel ginnasio inferiore si faccia uso di qualche semplice ragionamento deduttivo.

Nel 1940, con la riforma del ministro Bottai (legge 1.7.1940, n. 899), vengono unificati, nella *Scuola Media*, i trienni inferiori del ginnasio, della scuola tecnica e dell'istituto magistrale. Per quanto riguarda la geometria, pur confermandone il carattere intuitivo, le avvertenze suggeriscono di valorizzare le proprietà evidenti "attraverso numerosi e convenienti esempi ed esercizi, che possano talvolta anche acquistare carattere dimostrativo per il modo stesso in cui sono impostati". C'è dunque qualcosa di più rispetto alle piccole variazioni del 1936: si vuole partire dall'intuizione per procedere verso ragionamenti di natura più astratta.

5. – Una novità nel panorama italiano: il libro di testo di Ugo Amaldi

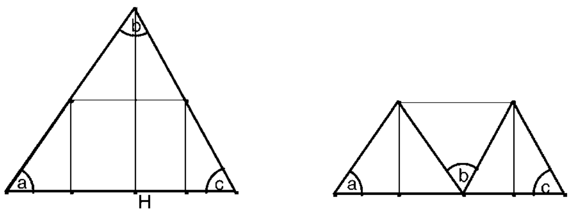
Dopo la riforma Bottai troviamo l'interessantissimo libro di Ugo Amaldi (1941). Come è noto, Amaldi fu un valido collaboratore di Levi Civita e di Federigo Enriques, e con quest'ultimo scrisse numerose edizioni di noti libri di testo di geometria – indirizzati soprattutto alla scuola superiore – per quasi un cinquantennio a partire dagli inizi del '900.

Amaldi arresta completamente il processo di "razionalizzazione" della geometria. Si può dire che il suo testo somigli a quello di Frattini, ma ci sono importanti novità: gli argomenti relativi alla misura e le costruzioni geometriche non rappresentano più capitoli a parte ma sono integrati con il resto, fornendo un utile strumento didattico. Così con il compasso si introducono somma e differenza di due segmenti, e poi si passa a parlare di multipli e sottomultipli e della loro misura, per poi tornare alla retta graduata e al righello. Molte sono le figure e i riferimenti alla realtà (per esempio una porta che ruota per illustrare gli infiniti piani che passano per una retta, strisce di carta per il trasposto di segmenti...), del tutto scomparsi dopo Frattini e Veronese.

Così, dopo aver dato le istruzioni per costruire con riga e compasso l'asse di un segmento, la verifica della correttezza della costruzione è fatta suggerendo di piegare il foglio ed osservare la sovrapposizione delle varie parti della figura.

Per la somma degli angoli di un triangolo Amaldi suggerisce quanto segue:

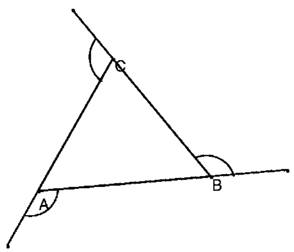
> Ritagliato nella carta un triangolo ABC, guardiamo quale sia il suo lato maggiore. Se [...] codesto lato è AC, abbassiamo da B l'altezza BH su AC (servendoci della squadra o piegando la carta in modo che la piega passi per B e il lato AC si ripieghi su sé stesso). Se allora pieghiamo le tre punte del triangolo (lungo i tre segmenti) in maniera che i tre vertici risultino riuniti in H, vediamo che la somma dei tre angoli del triangolo dà un angolo piatto, ossia 180° (pag. 53).



Sia il linguaggio che le figure del libro suggeriscono azioni da compiere in modo effettivo. La verifica sperimentale appena vista sottintende la proprietà, non enunciata, che due rette parallele formano angoli alterni interni uguali e che angoli adiacenti al lato maggiore sono acuti.

Il teorema precedente viene anche verificato in un secondo modo che richiede la partecipazione attiva dell'alunno e appare come un gioco da affrontare in classe:

> Consideriamo un triangolo ABC, abbastanza grande perché si possa tracciare col gessetto sul pavimento.



> Un alunno si pone coi piedi in A e, volgendosi nella direzione del lato AB, distende avanti a sé orizzontalmente il braccio destro nella direzione di codesto lato. Poi sempre mantenendo il braccio nella posizione or ora indicata, percorre AB; giunto in B, gira sui tacchi fino a disporsi nella direzione di BC e percorre questo secondo lato fino al vertice C, dove, con una seconda conversione, si dispone nella direzione di CA; percorso

> anche questo terzo lato, fa in A una terza conversione, in guisa da riprendere la sua posizione di partenza. Egli si trova così ad aver compiuto un intero giro su sé stesso, cioè ha descritto complessivamente col braccio teso, un angolo di 360°. Ma questo intero giro non è che la somma delle tre conversioni, che l'alunno ha successivamente compiuto in B, in C e da ultimo in A, e che sono date dai tre angoli esterni del triangolo. Si ha dunque che la somma di questi tre angoli esterni vale 360°. Ora, se a ciascuno di questi angoli esterni si aggiunge il rispettivo angolo interno adiacente, e si fa la somma complessiva, si ottengono tre angoli piatti [...] ossia 540°. Poiché questa somma complessiva comprende insieme la somma degli angoli interni del triangolo e quella dei tre angoli esterni...i quali ultimi, presi insieme, valgono per parte loro 360°, si conclude che la somma degli angoli del triangolo è data dalla differenza 540°- 360°, cioè appunto da 180°.

Sempre ritagliando e poi sovrapponendo si verifica che la diagonale divide un parallelogrammo in due parti uguali; analogamente per le altre proprietà dei quadrilateri.

Amaldi sembra avere ben chiaro quali proprietà possano essere date per scontate e quali invece necessitino di essere scoperte o perlomeno evidenziate con una procedura pratica, ed è in grado di trovare metodologie adatte allo scopo. Riesce dunque a realizzare quanto Severi aveva scritto nel 1919.

6. – Verso una nuova concezione dell'insegnamento. Il libro di testo di Emma Castelnuovo e l'uso del materiale concreto

Dopo la fine della guerra, nel 1945, una Commissione nominata dai Governi Alleati formulò dei programmi poi ripresi dal MPI ed estesi a tutto il territorio nazionale. Presidente della commissione era Carleton Washburne, pedagogista della scuola di Dewey. Forse proprio sotto l'influsso delle idee della cosiddetta *scuola attiva*, il programma per la scuola media torna all'aspetto pratico e sperimentale.

In realtà le premesse, come anche per il ginnasio superiore, appaiono slegate dai programmi, che non presentano particolari novità.

Ma una novità c'è ed è rappresentata dal libro di geometria intuitiva di Emma Castelnuovo (1948). Non sembra, a dire il vero, che la Castelnuovo sia stata ispirata dai programmi del '45, anche se sicuramente essa entrò in contatto con Washburne. Come lei stessa racconta nella *lectio magistralis* tenuta al Festival della Matematica a Roma il

15 marzo 2007 (Castelnuovo, 2007), la Castelnuovo si servì della "libertà di insegnamento concessa dal Ministero Italiano" e fu molto stimolata dalle riunioni che si tenevano in casa di Enriques, in cui si leggevano testi di geometria per studiare come si poteva modificarne l'insegnamento. In una di queste riunioni, Attilio Frajese propose la lettura di alcuni libri di Clairaut del '700.

> Li studio a fondo e decido dall'oggi al domani di cambiare il mio corso di geometria del primo triennio, quello che sarebbe oggi la scuola media. [...] Decido di cambiare, era il '45-'46, e mi valgo di quella meravigliosa libertà che concede il ministero italiano [...]. In tutte le mie classi avevo due corsi paralleli, gremiti di allievi, in tutto circa 200 allievi. Di colpo, cambio. Nella sala, la classe mi cambia fra le mani. Capisco che devo fare così. Capisco che devo organizzare il corso in questa maniera, a partire dalla realtà.

La Castelnuovo cita Clairaut anche nella prefazione al libro del 1948:

> Gli Eléments de Géométrie del Clairaut, costituiscono nella letteratura pedagogico-matematica un'opera veramente unica nel suo genere. Mi è sembrato che l'inquadratura del testo, ancora così moderna e vivace, si potesse adattare con successo nelle nostre scuole medie inferiori [...]. A me sembra che lo scopo principale del corso di geometria intuitiva sia quello di suscitare, attraverso l'osservazione di mille fatti della tecnica, dell'arte, della natura, l'interesse del ragazzo per le proprietà fondamentali delle figure geometriche, e quindi il gusto e l'entusiasmo della ricerca. E questo gusto non può nascere se non facendo partecipare l'allievo stesso al lavoro creativo.

Il libro della Castelnuovo procede sulla scia di quello di Amaldi, con disegni, figure, riferimenti alla realtà e integrazione delle costruzioni e delle misure.

Qui occorre aprire una parentesi sul ruolo delle figure. Già Veronese attribuiva un particolare ruolo – nell'insegnamento della geometria intuitiva – agli "oggetti e le figure" che si trovano dinanzi all'alunno, ed è ovvio che lo abbiano. Nei libri fin qui esaminati le descrizioni geometriche – come generalmente accade in tutti i testi di geometria – fanno riferimento a figure, se non altro per far comprendere la posizione delle lettere utilizzate. Ma le figure sono molto piccole, quasi marginali rispetto al testo.

Con il libro di Amaldi le figure aumentano, si ingrandiscono leggermente, rappresentando talvolta anche oggetti concreti per richiamare operazioni reali. Ma è solo con il libro della Castelnuovo che il rapporto fra testo e figure quasi si ribalta, sia per la quantità che per la dimensione delle figure stesse. Le figure costituiscono ora un richiamo, suscitano il desiderio di capire cosa rappresentano, di leggerne la descrizione.

Ma nel testo della Castelnuovo c'è di più. Intanto il libro si rivolge allo studente, non solo per chiedergli di seguire un ragionamento o di fare una verifica, ma per porre problemi (come mai? Come sarà che?). Il libro inizia con la piegatura della carta, per poi passare alle costruzioni con riga e squadra. Come Amaldi, e come Clairaut, riprende l'idea del filo teso fra due punti per introdurre le proprietà di segmenti e rette.

> Ma quale significato – mi chiederete – ha l'affermazione che per due punti distinti A, B passa una sola retta? Come si potrebbe pensare il contrario?
>
> È vero: non è certo possibile concepire due o più rette distinte che passino per A e B, ma è invece possibile costruire, facendo uso del compasso, tanti cerchi passanti per due punti (Castelnuovo 1948, p. 12).

In tal modo si utilizza la semplice idea didattica che una proprietà è ben illustrata se si trovano esempi in cui essa non vale. Anche Frattini ne aveva fatto uso nell'analoga situazione.

Le parole della Castelnuovo mettono in evidenza un'altra novità didattica: cercare di mettersi dal punto di vista dell'alunno.

A proposito di quel suo primo libro, scrive Emma Castelnuovo (Castelnuovo, 2008, p. 37):

> Lo studio delle aree, motivato dal concreto, è preceduto, come fa il Clairaut, dal disegno con riga e compasso di vari poligoni. Mi sembrava, così, di operare in modo concreto. Ma poi mi sono resa conto che la costruzione di una figura con riga e compasso vincola la libertà di pensiero per il fatto che porta a considerare solo un numero finito di casi: il disegno, per la sua staticità, non stimola l'osservazione e non può quindi condurre a fare scoperte. Ho capito che la costruzione di figure geometriche va fatta con un materiale, un qualcosa che si maneggia, che si fa e si disfa...

In realtà, già nel testo del '48, si proponevano materiali, come il metro snodabile per far vedere come si passa da un quadrilatero all'altro, e i casi limite in cui l'area si annulla.

Dopo quel periodo si susseguono proposte di riforma, ma troviamo nuovi programmi solo con la riforma della nuova Scuola Media nel 1963 (d.m. 24.4.1963). Leggiamo che "giova fare ricorso ai procedimenti induttivi che muovono da osservazioni, da facili esperimenti e prove empiriche, alle quali l'alunno parteciperà in modo diretto e costante, così da esercitarvi ed educarvi la capacità d'intuizione."

Indicazioni didattiche e metodologiche ancor più esplicite si troveranno nei programmi per la Scuola Media del 1979, relative all'insegnamento di "scienze matematiche, chimiche, fisiche e naturali".

7. – Conclusione

Nel corso dell'ultimo secolo si sono succedute visioni diverse della geometria intuitiva. Tali visioni, pur essendo legate al periodo storico e in particolare alla diversa immagine che la scuola ha indubbiamente avuto nel corso dei decenni, non sono però solo frutto dell'evoluzione storica e, del resto, coesistono ancora adesso.

Nelle nostre scuole medie non si è mai realmente diffuso l'uso di carta, forbici, cannucce e altro materiale più o meno povero. Tuttavia questo aspetto "sperimentale" sembra appartenere all'immagine che molti hanno della geometria nella scuola media (cfr. Linati, 1988, p. 141). In ogni caso, l'uso del materiale concreto – che si estende anche a riga e compasso o a opportuni software geometrici – non va inteso come sperimentale in senso classico: nelle scienze sperimentali, come la fisica, la relazione tra due grandezze viene stabilita attraverso un certo numero di esperimenti. Nel caso della geometria intuitiva invece, una volta condotta un'esperienza – come quelle riportate da Amaldi per il calcolo della somma degli angoli di un triangolo – l'alunno non ha bisogno di ripeterla, perché ha *afferrato le relazioni che intercorrono tra gli elementi in gioco*. Secondo Hans Freudenthal (1971) è proprio questa comprensione delle relazioni in gioco che fornisce il senso della geometria prima del suo sviluppo logico-formale.

L'interpretazione che Freudenthal dà della geometria intuitiva non è soddisfatta dal testo di Veronese, perché l'autore non spinge gli alunni a cercare relazioni tra oggetti geometrici. Ma non è soddisfatta neppure da testi, come quello di Pisati e Severi, che richiedono troppi passaggi logici per giustificare le proprietà e le relazioni enunciate. Un altro approccio, oggi diffuso ma poco convincente, è denunciato da Linati (1988), secondo il quale molti libri di testo presentano la geometria "sulla falsa-riga degli Elementi di Euclide, elencando cioè tutte le proprietà delle figure dopo averne soppresso tutte le dimostrazioni". Tale critica può riferirsi anche a molti enunciati presenti nel libro di Costanzo e Negro.

Concepire la geometria intuitiva come un primo approccio semplificato alla geometria non significa evitare "ragionamenti". La geometria intuitiva ha, o dovrebbe avere, suoi ragionamenti specifici, con carattere generale, che tuttavia non preludono ad una dimostrazione formale (un esempio è la prima argomentazione di Amaldi sulla somma degli angoli di un triangolo nel paragrafo 5.). Anche l'uso delle trasformazioni geometriche, in particolare della simmetria assiale e centrale, rientra in questa fase come strumento che favorisce un'immagine mentale.

Ragionare su relazioni e proprietà che troviamo nelle figure geometriche favorisce e sviluppa la precisione di linguaggio, che a sua volta favorisce la comprensione. Questo vale, per esempio, anche per descrizioni semplici come quella proposta da Costanzo e Negro per gli angoli alterni interni. L'approccio alla struttura *linguistica* di una dimostrazione è molto importante come propedeutica.

In sostanza, il successivo sviluppo della geometria deve appoggiarsi su

– chiare immagini mentali, aiutate dalla capacità di visualizzare e di disegnare;

– una buona familiarità con la terminologia, ma anche con enunciati, frasi, ... e l'idea di *conseguenza*.

Un altro aspetto appare essenziale per poter effettivamente parlare di geometria intuitiva, ed è il ruolo attivo dell'alunno. Talvolta i programmi stessi, come quelli del 1900 e del 1923, hanno cercato di negare questo ruolo. Al contrario alcuni autori sono riusciti – anche solo per qualche momento – a "mutare la scuola in officina", come auspicato nella lettera al re del 1881. Ma è chiaro che nessun libro di testo, per quanto ricco di immagini e di esaurienti spiegazioni, può essere considerato autosufficiente per un insegnamento delle geometria intuitiva. È l'insegnante che deve far proprio il metodo. Si apre così un altro scenario che in questo articolo non può essere affrontato.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

AMALDI U. (1941). *Nozioni di geometria*, ad uso della scuola media. Zanichelli, Bologna.

BELTRAMI F. (1885). Relazione per l'insegnamento delle matematiche per il ginnasio ed il liceo, *M.P.I., Bollettino Ufficiale*, Appendice al N.12-1884, Roma, Tip. Bencini, 16-17.

CANNIZZARO L. – MENGHINI M. (2006). From Geometrical Figures to Definitional Rigour: Teachers' analysis of Teaching Units Mediated Trough van Hiele's Theory. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, **6**, 369-386.

CANTÙ P. (2000). L'insegnamento della geometria nelle scuole medie inferiori. Una lettera inedita di Giuseppe Veronese a Giovanni Vailati, Il Voltaire, **5**, 109-118.

CASTELNUOVO E. (1948), *Geometria intuitiva*, per le scuole medie inferiori, Carrabba, Lanciano-Roma.

CASTELNUOVO E. (2007), Lectio magistralis, Festival della Matematica, Roma, 15 marzo 2007, http://www.mat.uniroma1.it/ricerca/gruppi/education/

COSTANZO G. – NEGRO C. (1905). *Geometria intuitiva e rudimenti di disegno geometrico per le tre prime classi del Ginnasio, a norma delle ultime disposizioni ministeriali*, Bologna : N. Zanichelli.

FRATTINI G. (1901). *Geometria intuitiva: per uso delle scuole complementari e del ginnasio inferiore*, Torino G.B. Paravia.

FREUDENTHAL H. (1971). Geometry between the devil and the deep sea. Educational Studies in Mathematics, **3**, 413-435.

FUJITA T. – JONES K. – YAMAMOTO S. (2004). The Role of Intuition in Geometry Education: Learning from the teaching practice in the early 20th Century. Paper presented at the *Topic Group 29 on the History of the Teaching and the Learning of Mathematics, 10th International Congress on Mathematical Education, (ICME-10)*, Copenhagen, Denmark.

GODFREY C. – SIDDONS A. W. (1903). *Elementary Geometry practical and theoretical.* Cambridge at the *University* Press.

KLEIN F. – SCHIMMACK R. (1907). Der Meraner Lehrplan für Mathematik, in *Vorträge über den mathematischen Unterricht an den höheren Schulen*, Teil 1: Von der Organisation des mathematischen Unterrichts, Leipzig 1907, S. 208-220.

LINATI P. (1988). Geometria intuitiva e geometria razionale: distinzione ancora valida? Archimede, **XL**, 141-150.

MARASCHINI W. – MENGHINI M. (1992). Il metodo euclideo nell'insegnamento della geometria, *L'educazione matematica*, **XIII**, 3, 161-180.

MARCHI M. – MORELLI A. – TORTORA R. (1996). Geometry: The Rational Aspect, in (A. Malara – M. Menghini – M. Reggiani eds.) *Italian Research in Mathematics Education, 1988-1995*, Consiglio Nazionale delle Ricerche, Roma.

MENGHINI M. (2006). The Role of Projective Geometry in Italian Education and Institutions at the End of the 19th Century. *International Journal for The History of Mathematics Education*, **1**, 35-55.

PERRY J. (ed.) (1901). *Discussion on the Teaching of Mathematics*. A British Association Meeting at Glasgow, 1901, Macmillan and Co., London.

PISATI L. (1907). *Elementi di geometria ad uso delle scuole medie inferiori*. Torino: G. B. Paravia.

SEVERI F. (1928). *Elementi di Geometria*, per le scuole medie inferiori (ed. ridotta). Vallecchi Editore, Firenze.

SEVERI F. (1919). La matematica. *Energie Nove*, Serie II, n. **9**, Torino, Ottobre 1919

TREUTLEIN, P. (1911). Der *geometrische Anschauungsunterricht als Unterstufe eines zweistufigen geometrischen Unterrichtes an unseren hohen Schulen*, Leipzig und Berlin, B. G. Teubner (Nachdr. 1985), Paderborn.

VERONESE G. (1897), Elementi di geometria ad uso dei licei e degli istituti tecnici, 1° biennio, F.lli Drucker Verona-Padova.

VERONESE G. (1901). *Nozioni elementari di geometria intuitiva. Ad uso del ginnasio inferiore*, Verona-Padova, Fratelli Drucker.

VERONESE G. (1907). *Nozioni di geometria intuitiva*. Ad uso delle scuole complementari, Padova Fratelli Drucker.

VITA V. (1986). *I programmi di matematica per le scuole secondarie dall'Unità d'Italia al 1986. Rilettura storico-critica*. Pitagora Editrice, Bologna 1986.

Marta Menghini,
Dipartimento di Matematica, Sapienza – Università di Roma
e-mail: marta.menghini@uniroma1.it