La Matematica nella Società e nella Cultura

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Paolo Maroscia

Matematica e racconto

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **3** (2010), n.3, p. 375–397.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2010_1_3_3_375_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI

http://www.bdim.eu/

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2010.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. III, Dicembre 2010, 375-397

Matematica e racconto

PAOLO MAROSCIA

L'obiettivo di questo articolo (*) è quello di proporre un approccio alla presentazione della matematica, che utilizza in vari modi il racconto. Perché proprio il racconto? Una prima risposta si trova direttamente nei dizionari (cfr. ad es. [55]): un racconto non è soltanto un "componimento letterario in prosa, di ampiezza contenuta", ma anche una "esposizione di vicende vere o frutto di invenzione". Ebbene, se si guarda a questa seconda definizione, è ragionevole immaginare che possano esistere dei legami tra il mondo del racconto (cfr.[43]) e quello della matematica; ciò apparirà più chiaro alla fine dell'articolo.

Il lavoro è diviso in tre paragrafi. Nel primo vengono riportati alcuni passi molto espressivi, rispettivamente di Erodoto e di Archimede, riguardanti l'operazione del contare. Di solito, quando si parla di "contare", si pensa al semplice "far di conto", ossia all'esecuzione meccanica di operazioni aritmetiche; ma in realtà, come vedremo, vi è una grande ricchezza di significati legati all'attività del contare. Nel secondo paragrafo vengono esaminati alcuni passi di Quintiliano, di grande efficacia ed eleganza, che potrebbero essere utilizzati ancora oggi come un'introduzione elementare al classico *problema isoperimetrico* (cfr. [8], [14], [40]). Il terzo paragrafo prende le mosse, invece, da un'antica leggenda cinese, che ci porta direttamente allo studio dei cosiddetti *quadrati magici*, fino alla scoperta di alcuni risultati interessanti. L'articolo termina con alcune osservazioni che offrono spunti per ulteriori sviluppi, più che conclusioni vere e proprie.

(*) Il presente lavoro è una versione rielaborata di una relazione tenuta al Congresso Nazionale Mathesis 2006 (Trento, 2-4 Novembre), dedicato a Bruno de Finetti, nel primo centenario della nascita.

Occorre aggiungere che la scelta dei brani letterari, in senso lato, per una siffatta presentazione della matematica, è molto ampia, essendo numerosi i contributi significativi presenti in varie civiltà e in varie epoche; ci siamo limitati qui a pochi esempi, per ragioni di spazio. In proposito, segnaliamo i seguenti testi, ricchi di spunti in varie direzioni: [2], [3], [4], [6], [7], [11], [12], [15], [16], [24], [32], [35], [38], [46], [47], [48], [49], [50], [51], [57], [60], [61], [65].

1. – Contare e raccontare: Erodoto e Archimede

Erodoto, nato ad Alicarnasso verso il 484 a.C. e morto ad Atene (o forse a Turi) verso il 425 a.C., viene considerato, com'è noto, il padre della storiografia. La sua fama è dovuta alle *Storie* [25], oggi divise in nove libri, ciascuno dei quali è preceduto dal nome di una Musa, seguendo l'ordine che compare nella *Teogonia* di Esiodo. Eccezionale è l'*incipit* delle *Storie*:

"*Questa è l'esposizione della ricerca di Erodoto di Alicarnasso, affinché le azioni degli uomini non vadano perdute con il tempo e le imprese grandi e meravigliose, compiute sia dai Greci sia dai barbari, non rimangano prive di fama, e in particolare i motivi per i quali combatterono gli uni contro gli altri.*"

Sarebbe interessante analizzare (in altra sede) l'influenza esercitata da queste parole, così ricche di significati e di suggestioni, sullo sviluppo della cultura e della civiltà occidentale nel corso dei secoli, in tutti i suoi aspetti: letterario, artistico, filosofico, politico, scientifico...

Ebbene, nel libro VII delle *Storie* c'è la narrazione della guerra dei Persiani contro le regioni ioniche della Grecia (iniziata nel libro VI), con riferimento al periodo successivo alla morte di Dario (486 a.C.) e alla successione al trono di suo figlio Serse. I passi qui riportati, tratti dal libro VII (cfr. [25]), si riferiscono a una grande spedizione di Serse contro la Grecia; il libro termina con la celebre battaglia delle Termopili.

"Il territorio di Dorisco, in Tracia, è costituito da un tratto di costa e da un'ampia pianura, attraverso la quale scorre un grande fiume, l'Ebro; vi era stata costruita una fortezza reale (è questa che si chiama Dorisco), dove era stata installata da Dario una guarnigione persiana fin dal tempo della spedizione contro gli Sciti. A Serse il luogo sembrò adatto a schierare i suoi uomini e a contarli: e così fece. I navarchi, per ordine di Serse, condussero tutte le navi arrivate a Dorisco sulla spiaggia vicina alla fortezza, dove si trovano Sale, città dei Samotraci, Zone e, all'estremità del litorale, il famoso promontorio Serreo: tale località anticamente apparteneva ai Ciconi. Approdati a questa spiaggia, trassero in secco le navi e le fecero asciugare. Nel frattempo Serse, a Dorisco, procedeva a contare i suoi soldati. La consistenza numerica dei contingenti forniti da ciascun popolo non sono in grado di indicarla con esattezza (nessuno la riferisce), ma in totale l'esercito di terra risultò ammontare a un milione e settecentomila uomini. Ed ecco come vennero contati. Riunirono in un unico luogo diecimila soldati, li fecero serrare gli uni agli altri il più possibile e tracciarono un cerchio tutto intorno; tracciato il cerchio, mandarono via i diecimila e lungo il cerchio innalzarono un muretto, alto fino all'ombelico di un uomo; costruito il muretto, fecero entrare altri uomini nello spazio recintato, finché con questo sistema non li ebbero contati tutti. Effettuato il computo, li divisero in schiere in base ai popoli. Ed ecco i popoli che presero parte alla spedizione..."

Va detto subito che la cifra di 1.700.000 soldati appare un po' eccessiva (cfr. [25, p. 326, nota 60.1]), anche perché si riferisce alla sola fanteria partita dall'Asia (alla quale andavano aggiunte, tra l'altro, le truppe arruolate in Europa); lo stesso Erodoto manifesterà qualche perplessità più avanti. In ogni caso, ciò che interessa qui è il metodo seguito per contare un esercito abbastanza numeroso, probabilmente dell'ordine di alcune centinaia di migliaia di soldati. Si tratta di un metodo ingegnoso e abbastanza efficiente, se paragonato con altri metodi tradizionali.

Occorre aggiungere che Erodoto non si ferma qui al conteggio dei soldati, ma prosegue, sempre nel libro VII, fino a contare i membri dell'intera spedizione. Innanzitutto, prova a contare i combattenti, aggiungendo a 1.700.000 fanti (partiti dall'Asia, sopra citati) i seguenti uomini: per ciascuna delle 1207 navi provenienti dall'Asia, 230 membri, per un totale di 277.610 uomini e per ciascuna delle tremila imbarcazioni a 50 remi, chiamate "penteconteri", circa 80 uomini, per un totale di 240.000 uomini, sicché la flotta proveniente dall'Asia comprendeva in tutto 517.610 uomini; vi erano poi 80.000 cavalieri, 20.000 uomini tra Arabi che "montavano i cammelli" e Libici che "guidavano i carri", 24.000 uomini che costituivano gli equipaggi di 120 navi fornite dai "Greci della Tracia e delle isole adiacenti" e infine altri 300.000 fanti forniti da varie popolazioni tra cui quelle che abitavano lungo le coste della Tracia.

A questo punto, Erodoto tira le somme. Non solo, ma dopo aver eseguito con precisione i calcoli riguardanti il numero dei combattenti, si avventura anche in una stima approssimata degli altri partecipanti:

"*Queste miriadi, sommate a quelle provenienti dall'Asia, danno un totale di 2.641.610 combattenti. Tale era il numero dei combattenti; quanto ai servi che li seguivano, agli equipaggi delle imbarcazioni adibite al trasporto delle vettovaglie e degli altri battelli che accompagnavano l'armata, tutti costoro credo che fossero non meno dei soldati, ma di più. Tuttavia voglio ammettere che fossero in numero uguale, né di più né di meno: calcolati tanti quanti i combattenti, ammontano ad altrettante miriadi. Perciò fino al capo Sepiade e alle Termopili Serse figlio di Dario guidò 5.283.220 uomini. Questo è il totale degli effettivi dell'intero esercito di Serse.*"

Ma Erodoto non si accontenta di contare i vari contingenti, insieme ai civili che partecipano alla spedizione: gli scrupoli del suo mestiere di storico, la sua grande curiosità e l'interesse per i vari aspetti legati alle vicende umane lo spingono ad andare oltre nell'esposizione dei fatti, utilizzando tutti i dati raccolti. Ecco allora che passa immediatamente a considerare alcuni problemi apparentemente secondari, quali quelli legati al vettovagliamento:

"*Quanto alle donne che facevano il pane, alle concubine e agli eunuchi, nessuno potrebbe indicarne il numero esatto; neppure degli animali da tiro, delle altre bestie da soma e dei cani indiani al se-*

guito, neppure di questi, proprio perché erano tanti, qualcuno potrebbe indicare l'ammontare. Pertanto non mi suscita nessuna meraviglia che i corsi di alcuni fiumi si siano prosciugati, ma anzi mi stupisce il fatto che i viveri siano bastati a tante decine di migliaia di uomini. Infatti, in base ai miei calcoli, mi risulta che, se ciascuno riceveva una chenice di cereali al giorno e nulla più, ne venivano consumati ogni giorno 110.340 medimni. E non tengo conto delle donne, degli eunuchi, delle bestie da soma e dei cani."

Qui ci sono varie osservazioni da fare. Innanzitutto, è sorprendente l'interesse di Erodoto per i vari aspetti della vita quotidiana: sembra quasi di respirare, in anticipo di ben 2400 anni, l'atmosfera delle *Annales*. Inoltre, non può non colpire la disinvoltura e la sicurezza con cui egli tratta numeri così grandi, superando le notevoli difficoltà dovute alla mancanza di simboli e notazioni adeguate, e utilizza poi i dati numerici per il suo lavoro di storico.

C'è da segnalare tuttavia una piccola inesattezza nei calcoli. Infatti (cfr. [25, p.430, nota 187.2]), poiché la *chenice* (ciotola) è la quarantottesima parte del *medimno* (una misura di capacità, variabile a seconda delle epoche e delle località, che ad Atene equivaleva a circa 52 litri), dividendo 5.283.220 per 48 si ottiene circa 110.067, dunque il consumo giornaliero di cereali dei partecipanti alla spedizione, escludendo le donne, gli eunuchi, le bestie da soma e i cani, doveva essere di circa 110.067 medimni e non di 110.340, come asserito nel testo.

In ogni caso, al di là di qualche inesattezza, nei passi di Erodoto sopra riportati si ritrovano alcuni aspetti fondamentali dell'attività matematica: la ricerca della precisione nei calcoli, la necessità, a volte, di effettuare delle stime approssimate, l'uso di dati numerici per dedurre nuove informazioni significative ed eventualmente formulare congetture.

Infine, c'è ancora un altro motivo di interesse che riguarda, in particolare, il passo riportato all'inizio sulla conta dei soldati di Serse, e precisamente il ricorso alla circonferenza per delimitare l'area necessaria per contare diecimila soldati alla volta. Si tratta in sostanza di un'applicazione concreta della proprietà isoperimetrica del cerchio, enunciata nella forma "duale", ossia: "*tra tutte le figure piane aventi un'area fissata, quella che ha il perimetro minimo è il cerchio*".

Ebbene tale applicazione risulta di molto anteriore alla più antica trattazione a noi pervenuta riguardante la "teoria degli isoperimetri", dovuta al matematico del periodo ellenistico Zenodoro, intorno alla seconda metà del II secolo a.C., la quale fu poi rielaborata e sistemata da Pappo nel IV secolo d.C. (cfr. [8], [40]).

Dopo aver esaminato alcuni passi di Erodoto, in cui un ruolo centrale è svolto, come abbiamo visto, dalla presenza di "numeri grandi" e quindi dalla complessità dell'attività del contare in tali circostanze, viene spontaneo un collegamento con un'opera apparsa circa due secoli dopo le *Storie*. Si tratta dell'*Arenario* (cfr. [1]), l'opera di Archimede (287-212 a.C.) in cui viene affrontato e risolto il problema di calcolare, approssimativamente, il numero dei granelli di sabbia che compongono l'Universo, o meglio, utilizzando le concezioni astronomiche dell'epoca, il numero dei granelli di sabbia contenuti in una sfera avente come centro il Sole e come superficie il "cielo delle stelle fisse". Chiaramente, tale problema è molto più complesso di quelli descritti da Erodoto, poiché, prima di cominciare a contare, è necessario inventare un procedimento che permetta di misurare, per così dire, l'intero Universo, partendo dalle dimensioni di un granello di sabbia.

Ebbene, il procedimento, ideato e sviluppato in modo rigoroso da Archimede, si articola in cinque fasi (cfr. [1]): si parte da un *seme di papavero* (che si suppone non contenga più di diecimila granelli di sabbia), si passa poi a una sfera avente il diametro di un *dito* (contenente non più di 64.000 semi di papavero), poi ancora a una sfera avente il diametro di uno *stadio* (minore della sfera avente il diametro di 10.000 dita), successivamente alla *sfera del cosmo* avente il centro nel centro della Terra e come raggio la distanza tra i centri della Terra e del Sole (il cui diametro era stimato inferiore a 100 miriadi di miriadi di stadi) e infine alla *sfera delle stelle fisse*, il cui diametro era ritenuto minore di una miriade di volte il diametro del cosmo.

È importante sottolineare due grosse difficoltà incontrate da Archimede: la prima, nel calcolare l'angolo secondo cui il disco solare è visibile in cielo, cioè l'angolo sotto il quale il suo diametro si vede dalla Terra; la seconda, dovuta al fatto che il sistema greco di scrittura dei numeri non era posizionale, e di conseguenza non era affatto facile esprimere numeri molto grandi e soprattutto lavorare con essi.

A proposito della difficoltà di misurare il *diametro apparente* del Sole, Archimede così spiega, con grande semplicità, come intende procedere (cfr. [1]):

"*Ma determinare [quest'angolo] esattamente non è facile, poiché né la vista, né le mani, né gli strumenti per mezzo dei quali si deve eseguire la determinazione, son sicuri per l'esatta conoscenza:ma su queste cose presentemente non è opportuno prolungare [la discussione], anche perché sono state già spesso considerate. A me basta, per la dimostrazione di quanto proposto, di prendere un angolo che sia non maggiore dell'angolo compreso dal Sole e che ha il vertice nell'occhio, e di nuovo prendere un altro angolo che sia non minore dell'angolo compreso dal Sole e avente il vertice nell'occhio.*"

Per superare poi la difficoltà legata alle notazioni, Archimede elabora un metodo originale, servendosi di procedimenti iterativi, grazie al quale giunge a calcolare che il numero dei granelli di sabbia contenuti nella sfera delle stelle fisse è minore "*di mille miriadi dei numeri 'ottavi'* ", cioè, con le notazioni moderne, dell'unità seguita da 63 zeri (cfr. [1], [8]). Si tratta di un numero davvero enorme, e Archimede è il primo a rendersi conto di questo; ma tuttavia, prevale la sicurezza dei risultati ottenuti, perché il metodo da lui seguito non lascia dubbi né incertezze. Curiosamente, il numero a cui perviene Archimede si può pensare anche ottenuto a partire da una normale scacchiera, scrivendo 1 nella prima casella, 10 nella seconda, 100 nella terza e così via (moltiplicando ogni volta per 10 il numero della casella precedente), e considerando infine il numero corrispondente nell'ultima casella.

Ecco come termina l'*Arenario* (cfr. [1]):

"*Queste cose poi, o re Gelone, ritengo che sembreranno incredibili ai molti [che siano] imperiti nelle matematiche, ma che saranno credibili, mediante le dimostrazioni, da coloro che son versati [nelle matematiche] e che abbiano meditato sulle distanze e sulle grandezze della Terra, del Sole, della Luna e di tutto il cosmo: perciò ho ritenuto che fosse bene che tu conoscessi queste cose*".

Osserviamo, per inciso, che anche per Archimede l'unità di misura è la *miriade*, cioè il numero 10.000. In proposito, va sottolineato che il passo di Erodoto citato all'inizio, riguardante la conta dei soldati ordinata da Serse, contiene una delle prime testimonianze scritte di tale "convenzione", adottata tacitamente.

C'è da aggiungere poi che l'*Arenario* presenta altri motivi di interesse: innanzitutto, in esso si trova la più antica testimonianza scritta a proposito del sistema eliocentrico ipotizzato da Aristarco di Samo, verso la metà del III secolo a.C.; inoltre, alla luce dei procedimenti di ricorrenza utilizzati da Archimede nei calcoli, la successione dei numeri naturali viene presentata di fatto come una successione infinita, almeno potenzialmente.

Per finire, conviene segnalare che il calcolo prodigioso effettuato da Archimede nell'*Arenario* ha avuto degli echi significativi nei poeti latini del I secolo a.C., e precisamente in Virgilio, Catullo, Orazio (cfr. [28]).

2. – Una "lezione di geometria" di Quintiliano

Marco Fabio Quintiliano (40-96 d.C.) fu il primo professore di un'università pubblica a Roma. Grazie a Vespasiano, egli ricoprì la Cattedra di retorica latina, una delle due Cattedre istituite dall'imperatore e finanziate con i fondi dell'erario (l'altra essendo quella di retorica greca). È rimasto famoso per la sua *Institutio Oratoria*, in 12 libri, dedicata alla formazione dell'oratore.

Naturalmente, tra le discipline importanti per tale formazione non poteva mancare la matematica, anzi la geometria, come si intendeva allora. Ma ciò che colpisce, e che apparirà chiaro dai passi appresso illustrati, non è tanto la competenza specifica nel campo matematico, quanto la sensibilità e la finezza pedagogica di Quintiliano nel trattare argomenti di matematica, così che l'esposizione in questione potrebbe venir presa a modello per una lezione di geometria, anche oggi.

I passi qui riportati sono tratti dal Libro I dell'*Institutio* (cfr. [54]). Dopo aver parlato dell'utilità della musica e della poesia per la formazione dell'oratore, Quintiliano scrive:

"...essendo la geometria divisa in numeri e forme, la conoscenza dei numeri è necessaria non solo all'oratore, ma a chiunque abbia almeno un'istruzione elementare. Nei processi invero essa suole trovare molto frequente applicazione e l'avvocato, non dico se appare titubante nel fare le somme, ma se solo con gesto insicuro e impacciato delle dita non concorda con il calcolo ad alta voce, è considerato ignorante. Quanto allo studio delle linee anch'esso per la verità ricorre frequentemente nelle cause (infatti spesso ci sono contese su confini e misure), ma vanta un'altra, più profonda affinità con l'arte oratoria. Anzitutto l'ordine è essenziale alla geometria; e non lo è forse anche all'eloquenza? La geometria prova le conclusioni a partire dalle premesse e le cose incerte dalle certe: forse che non facciamo proprio questo nel discorso?..."

Si tratta di considerazioni molto efficaci e incisive riguardanti la matematica, divisa *in numeros atque formas*, la cui importanza viene riconosciuta sostanzialmente "per tutti", a partire dall'attività del contare, la quale nei tempi antichi rientrava nel dominio dell'*actio*. Infatti i numeri corrispondevano a determinate posizioni delle dita (*flexio digitorum*), ciò che spiega il conteggio "ad alta voce". Poi ancora si ritrova lo studio della geometria collegato, com'era fin dai tempi antichi, a questioni legate a misure di terreni; ma in più, c'è il richiamo all'ordine logico, al pensiero razionale e alla capacità di dedurre, di trarre delle conclusioni "certe". In breve, Quintiliano spiega qui, con una chiarezza e una semplicità esemplari, il valore formativo dell'educazione matematica, dando importanza sia all'aspetto concreto che a quello astratto. Più avanti, così prosegue:

"...La geometria razionalmente coglie la falsità di certe affermazioni vere solo in apparenza...Ma altre cose sono più importanti. Infatti chi non crederebbe all'esattezza dell'affermazione: 'quando due luoghi hanno perimetri di eguale misura, la superficie in essi compresa è necessariamente uguale?' Ma questo è falso: infatti ha moltissima importanza di che forma sia il contorno; i geometri infatti hanno rimproverato gli storici che hanno creduto che la grandezza delle isole fosse sufficientemente indicata dalla circumnavigazione.

In effetti, quanto più una forma è perfetta, tanto più spazio racchiude. E perciò quella linea del perimetro, se formerà un cerchio, che è la forma più perfetta tra le figure piane, comprenderà più spazio che se formasse un quadrato di perimetro uguale; a sua volta il quadrato ne comprenderà di più del triangolo; lo stesso triangolo equilatero ne comprenderà di più del triangolo dai lati diseguali."

In queste poche righe c'è tanta matematica "raccontata" in modo splendido. Per cominciare, è molto efficace la citazione dell'errore degli storici antichi di stimare un'area in funzione del perimetro, e qui forse Quintiliano allude a un passo di Tucidide (cfr. [40]), il grande storiografo greco vissuto nella seconda metà del V secolo a.C. Inoltre, c'è quel tocco di maestria pedagogica, con cui il Lettore viene condotto a procedere per gradi, passando dal cerchio al quadrato, dal quadrato al triangolo equilatero, e infine dal triangolo equilatero al triangolo scaleno... Si tratta di figure semplici, familiari, che tutti possono immaginare senza difficoltà; ma soprattutto è più facile passare concettualmente, e visivamente, dalle figure regolari a quelle irregolari. Si noti poi che nel passo precedente non c'è soltanto l'enunciato della *proprietà isoperimetrica* del cerchio, secondo cui "*tra tutte le figure piane aventi un perimetro fissato, quella che ha l'area massima è il cerchio*", ma vi è in più un abbozzo di analisi del problema in questione, che verrà ripresa più avanti.

A questo punto, si potrebbe pensare che la spiegazione dell'argomento sia terminata; tutto ormai appare chiaro. Ma Quintiliano si rende ben conto che le sue considerazioni, per quanto precise, restano ancora astratte e in qualche modo incomplete. Mancano gli esempi, i casi concreti, i numeri! Ecco come prosegue subito dopo:

"*Ma altri casi forse saranno meno chiari: seguiamo un esempio che sarà facilmente compreso anche da coloro che sono inesperti di geometria. Che uno iugero si estenda per 240 piedi in lunghezza e la metà in larghezza, non c'è nessuno che lo ignori ed è facile calcolare qual è il suo perimetro e quanto grande superficie comprenda. Eppure un quadrato di 180 piedi di lato presenta lo stesso perimetro, ma lo spazio compreso nei suoi quattro lati è molto maggiore. Se ci si* *annoia di fare calcoli, si possono apprendere le stesse cose con numeri più piccoli. Un quadrato di 10 piedi di lato ha 40 piedi di perimetro e 100 piedi di superficie. Ma 15 piedi di lunghezza e 5 piedi di larghezza nello stesso perimetro racchiuderanno una superficie inferiore di un quarto. Se poi due lati sono lunghi 19 piedi ciascuno e distanti tra loro solo un piede, avranno una superficie in piedi quadrati non superiore alla loro lunghezza, mentre il perimetro sarà uguale a quello che comprende 100 piedi quadrati. Così, tutto quanto si toglierà alla figura del quadrato, verrà meno anche alla sua area. Dunque può anche accadere che in un perimetro maggiore sia compresa una superficie minore.*"

"Non basta essere chiari; occorre essere espliciti": sembra questo il principio informatore della pedagogia, non solo matematica, di Quintiliano. È un principio che, a nostro avviso, andrebbe tenuto presente anche oggi nell'insegnamento della matematica, a tutti i livelli.

Qui vi sono altre osservazioni da fare. Per cominciare, c'è da sottolineare la scelta, tutt'altro che casuale, del primo esempio preso in esame, quello di uno iugero, ben noto a tutti i suoi Lettori. Tuttavia non basta utilizzare una nozione familiare per comprendere il ragionamento e per fare agevolmente i calcoli. Infatti, lì intervengono necessariamente numeri di tre cifre, che non sono facilissimi da trattare a mente, almeno per una parte del pubblico. Ed ecco allora che il grande maestro, dopo aver ammesso con semplicità che qualcuno si può ben annoiare davanti a questi calcoli (*si computare quem piget*), passa subito a considerare numeri più piccoli (*brevioribus numeris*) così da facilitare notevolmente i calcoli e quindi la comprensione degli esempi e del problema in esame.

Inoltre, dopo la conferma "sperimentale" attraverso l'esame di varie situazioni concrete, si passa ad alcune considerazioni di carattere generale. La prima spiega in poche parole cosa succede all'area di un quadrato quando esso varia la sua forma, trasformandosi in un rettangolo, e qui il testo originale è di gran lunga più efficace, grazie alla concisione della lingua latina: *quidquid formae quadrati detraxeris, amplitudini quoque peribit*. La seconda osservazione sottolinea, in modo esplicito, un fatto non banale che sfata antiche credenze legate al senso comune. Si noti ancora, nel brano precedente, il passaggio graduale, sapiente, dal concreto all'astratto.

Ora, la "lezione" potrebbe considerarsi conclusa, anche dal punto di vista matematico. Ma Quintiliano sembra quasi rendersi conto di dover prevenire eventuali osservazioni del Lettore, suggerite proprio dall'esempio concreto degli iugeri di terreno, i quali non sempre sono disposti in pianura. E allora, è opportuno accennare al caso generale e andare quindi al di là della geometria piana... Ecco come prosegue:

"*Io parlo delle superfici piane; infatti per le colline e le valli anche l'inesperto vede bene che esse hanno più superficie che cielo. E che diremo del fatto che la geometria si innalza fino alla spiegazione di tutto l'universo? A tale proposito, nel momento in cui ci mostra attraverso i calcoli numerici le orbite sicure e regolari degli astri, noi apprendiamo che non c'è nulla di disordinato e di fortuito: e questo può talvolta essere interessante per l'oratore...*"

Varie osservazioni qui si impongono. Innanzitutto, è notevole la precisazione che, se la superficie in questione non è piana, e quindi presenta zone collinari o avvallamenti, allora, a parità di perimetro con una figura piana, essa ha una estensione maggiore (*patet plus soli esse quam coeli*). Molto efficace poi è l'uso di *coelum* per esprimere il perimetro di una superficie non piana. A tale proposito, conviene sottolineare che talvolta un'espressione linguistica può risultare più utile, per una piena comprensione, di un concetto o di un risultato espresso in un linguaggio formale, sia pure rigoroso. E poi, c'è l'esplicito riconoscimento dell'utilità e della validità dei metodi di calcolo delle orbite degli astri, sviluppati utilizzando la geometria. Compare qui in trasparenza un filo conduttore che collega strettamente tra loro tre delle quattro arti del quadrivio, che già figuravano nell'elenco delle *Disciplinae* del grande erudito Marco Terenzio Varrone (116-27 a.C.): Aritmetica, Geometria, Astronomia.

Infine, c'è da osservare che lo studio dei passi di Quintiliano sopra riportati, condotto con il testo latino a fronte, potrebbe essere utile per apprezzare concretamente la ricchezza e la potenza del linguaggio dei "classici" (cfr. [9], [21], [59]). In realtà, un discorso a parte andrebbe sviluppato a proposito dei rapporti peculiari esistenti tra il latino e la Scienza, e in particolare tra il latino e la matematica; si tratta di una questione molto importante e di grande attualità (cfr. ad es. [6], [22], [41], [53], [65]).

3. – Una leggenda dell'antica Cina

Il grande pensatore francese René Guénon (1886-1951) così riporta in [30] un'antica leggenda cinese:

"*Verso la fine del terzo millennio avanti Cristo, la Cina era divisa in nove province, secondo la disposizione geometrica raffigurata qui sotto:*

$$\begin{matrix} \mathbf{4} & \mathbf{9} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{5} & \mathbf{7} \\ \mathbf{8} & \mathbf{1} & \mathbf{6} \end{matrix} \tag{1}$$

una al centro, otto ai quattro punti cardinali e ai quattro punti intermedi. Questa divisione è attribuita a Yu il Grande (Ta-Yu), *il quale, si dice, percorse il mondo per 'misurare la Terra'; e, dal momento che tale misura si effettua su base quadrata, qui vediamo l'uso della squadra attribuita all'Imperatore in quanto 'Signore della Terra'. La divisione per nove gli fu ispirata dal diagramma chiamato Lo-chou o 'Scritto del Lago' che, secondo la 'leggenda', gli era stato portato da una tartaruga e in cui i primi nove numeri sono disposti in modo da formare quello che viene chiamato un 'quadrato magico'; così, tale divisione faceva dell'Impero un'immagine dell'Universo. Nel 'quadrato magico', il centro è occupato dal numero 5, che sta anch'esso nel 'mezzo' dei primi nove numeri...*"

Ricordiamo che, per tradizione, un *quadrato magico* 3×3 è una matrice quadrata di ordine 3 formata da numeri naturali, tale che i numeri di ciascuna riga, di ciascuna colonna e di ciascuna diagonale, diano sempre la stessa somma, che indichiamo con S; diremo allora che S è la *somma costante* del quadrato magico. Nell'esempio (1) si ha: $\mathrm{S} = 15$. Tale definizione può essere subito generalizzata, introducendo i *quadrati magici* $\mathrm{n} \times \mathrm{n}$, con $\mathrm{n} \geq 3$, pensati come matrici quadrate $\mathrm{n} \times \mathrm{n}$

formate da numeri reali, soddisfacenti alle corrispondenti condizioni sulle righe, sulle colonne e sulle diagonali, dunque a $2n + 2$ condizioni.

Ora, prendendo lo spunto dal quadrato (1), viene spontanea una prima domanda:

Problema 1: *È possibile inserire i primi nove numeri naturali in un quadrato magico* 3×3 *in altri modi, oltre quello descritto in* (1)?

Innanzitutto, si vede subito che esistono almeno altri 7 modi. Basta considerare un quadrato magico come una figura geometrica, cioè un "quadrato", e osservare che ogni *simmetria* del "quadrato" dà luogo a un nuovo quadrato magico, avente le proprietà richieste. Così, le rotazioni del "quadrato" in verso orario, intorno al suo centro di simmetria, di ampiezza rispettivamente 90°, 180°, 270°, forniscono i quadrati magici:

$$\begin{matrix} 8 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ 6 & 7 & 2 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 6 & 1 & 8 \\ 7 & 5 & 3 \\ 2 & 9 & 4 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 2 & 7 & 6 \\ 9 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 8 \end{matrix}$$

mentre le riflessioni rispetto alle due diagonali e le riflessioni rispetto alla seconda riga e alla seconda colonna forniscono, rispettivamente, i quadrati magici:

$$\begin{matrix} 4 & 3 & 8 \\ 9 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & 6 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 6 & 7 & 2 \\ 1 & 5 & 9 \\ 8 & 3 & 4 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 2 & 9 & 4 \\ 7 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 8 \end{matrix}$$

Resta ora da stabilire se esistono altri quadrati magici 3×3 formati dai primi nove numeri naturali, oltre agli 8 sopra descritti.

A tale scopo, cominciamo a osservare che il numero 5 che compare nella casella centrale del quadrato (1) è proprio uguale a 1/3 della somma costante 15. Dopodiché, a seguito di verifiche su altri esempi, scopriamo che tale proprietà vale in generale per ogni quadrato magico 3×3 formato da numeri reali, del tipo:

$$\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix} \tag{2}$$

Infatti, se S è la *somma costante* del quadrato (2), si ottiene facilmente (per esempio, considerando le tre relazioni riguardanti, rispettivamente, le due diagonali e la seconda riga) che:

$$S = 3e \tag{3}$$

Ebbene, utilizzando la (3), si trova direttamente che "*non* esistono altri quadrati magici 3×3 del tipo richiesto, oltre agli 8 precedentemente descritti", ciò che fornisce la risposta al Problema 1. Per ottenere ciò, osserviamo innanzitutto che i "vertici" di un quadrato del tipo (2), ossia i numeri a, c, g, i, devono essere necessariamente pari. Infatti, se per esempio a fosse dispari, allora b non potrebbe essere dispari (altrimenti c, g, i, d, f, h risulterebbero dispari, essendo $S = 15$) e neppure pari (altrimenti c, g, d, f risulterebbero pari, essendo $S = 15$), ciò che è una contraddizione. Inoltre, ciascuna delle 4 scelte possibili per a individua due quadrati magici del tipo richiesto: infatti, se a è fissato, allora i resta determinato, mentre per c (o per g) vi sono solo due scelte possibili. Il Problema 1 è così risolto.

Ma il discorso non finisce qui. Intanto, è possibile sviluppare alcuni spunti interdisciplinari, considerando, per esempio, due quadrati magici 4×4 ben noti, collegati alla storia dell'arte:

il *primo*, che è contenuto nella famosa incisione *Melencolia I* di Albrecht Dürer (1471-1528):

$$\begin{matrix} \mathbf{16} & \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{13} \\ \mathbf{5} & \mathbf{10} & \mathbf{11} & \mathbf{8} \\ \mathbf{9} & \mathbf{6} & \mathbf{7} & \mathbf{12} \\ \mathbf{4} & \mathbf{15} & \mathbf{14} & \mathbf{1} \end{matrix} \tag{4}$$

(si noti nell'ultima riga il numero 1514, anno della composizione dell'opera, e anche della morte del matematico Luca Pacioli, amico del Dürer, con il quale l'artista tedesco aveva avuto intensi scambi culturali e scientifici);

il *secondo*, che si trova inciso sulla parete esterna della *Sagrada Familia*, il grande capolavoro di Antonio Gaudì (1852-1926), tuttora in fase di ultimazione:

$$(5) \qquad \begin{matrix} \mathbf{1} & \mathbf{14} & \mathbf{14} & \mathbf{4} \\ \mathbf{11} & \mathbf{7} & \mathbf{6} & \mathbf{9} \\ \mathbf{8} & \mathbf{10} & \mathbf{10} & \mathbf{5} \\ \mathbf{13} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{15} \end{matrix}$$

Il primo quadrato magico ha somma costante $S = 34$, mentre il secondo ha somma costante $S = 33$, ossia gli anni di Cristo. Entrambi presentano alcuni aspetti intriganti: per esempio, la presenza al loro interno di sottomatrici quadrate 2×2, i cui elementi danno come somma, rispettivamente 34 e 33. Un esercizio istruttivo, non banale, è quello di contare *tutti* i "quadratini" siffatti presenti in (4) e in (5).

Tuttavia, altri sviluppi matematici interessanti si presentano in modo naturale. Ad esempio, è facile osservare che l'insieme dei quadrati magici 3×3 a elementi reali, che denotiamo con $Q(3, \mathbf{R})$, è uno spazio vettoriale rispetto alle operazioni di addizione e di moltiplicazione per uno scalare tra matrici quadrate, sicché esso risulta un sottospazio dello spazio vettoriale $M(3, \mathbf{R})$ di tutte le matrici reali 3×3. E qui nasce spontanea la domanda:

Problema 2: *Qual è la dimensione dello spazio vettoriale* $Q(3, \mathbf{R})$?

Tale problema può essere risolto, per esempio, scrivendo le 8 condizioni che legano tra loro i 9 elementi di un quadrato magico della forma (2) e studiando il sistema di equazioni lineari così ottenuto. Seguiremo qui un altro approccio, più diretto e concreto.

Precisamente, utilizzando la nozione di dimensione, intesa come numero massimo di *gradi di libertà* o di *parametri indipendenti* del "sistema" rappresentato dallo spazio vettoriale in esame, scopriremo che "*lo spazio* $Q(3, \mathbf{R})$ *ha dimensione* 3".

Per ottenere ciò, basta far vedere che "fissati a piacere tre numeri reali a, b, c, esiste *uno e un solo* quadrato magico 3×3 avente i numeri a,b,c disposti ordinatamente sulla prima riga, e quindi con somma costante $S = a + b + c$". Ma tale verifica è immediata, partendo da una tabella del tipo (2). Infatti, poiché dalla (3) segue che $e = (a + b + c)/3$, vi è uno e un sol modo per riempire tutte le altre caselle della tabella e ottenere così il quadrato magico con le proprietà richieste.

Per esempio, prendendo $a = 7$, $b = 23$, $c = 6$, resta individuato il quadrato magico (avente necessariamente il numero 12 nella casella centrale):

$$\begin{array}{ccc} 7 & 23 & 6 \\ 11 & 12 & 13 \\ 18 & 1 & 17 \end{array}$$

Ora, le considerazioni sopra svolte circa la struttura algebrica dell'insieme $Q(3, \mathbf{R})$ dei quadrati magici 3×3 si trasportano inalterate all'insieme $Q(n, \mathbf{R})$ dei quadrati magici $n \times n$, con $n > 3$, il quale risulta ancora uno spazio vettoriale e precisamente un sottospazio dello spazio vettoriale $M(n, \mathbf{R})$ di tutte le matrici reali $n \times n$. A questo punto, è naturale chiedersi:

Problema 3: *Qual è la dimensione dello spazio vettoriale* $Q(n, \mathbf{R})$, *con* $n > 3$?

Questa volta il problema è un po' più complicato. È possibile tuttavia pervenire al risultato seguente (che estende quello appena dimostrato per i quadrati magici 3×3), secondo cui "*la dimensione dello spazio vettoriale* $Q(n, \mathbf{R})$ *dei quadrati magici* $n \times n$ *a elementi reali è uguale a* $n(n - 2)$, *per ogni* $n > 3$".

Per ottenere tale risultato, procediamo in due passi, seguendo la lezione di Quintiliano.

(I) Cominciamo dal caso $n = 4$, considerando un generico quadrato magico 4×4 a elementi reali:

$$\begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & l & m & n \\ o & p & q & r \end{array} \tag{6}$$

e facciamo vedere che, se fissiamo arbitrariamente nella tabella (6) i numeri a, b, c, d, e, f, g, i, sicché la tabella può essere riscritta nella forma:

$$
(7) \qquad \begin{array}{cccc}
- & - & - & - \\
- & - & - & ? \\
- & ? & ? & ? \\
? & ? & ? & ?
\end{array}
$$

dove il trattino orizzontale indica un elemento fissato, mentre il punto interrogativo indica un elemento da trovare, allora "esiste *uno e un solo* quadrato magico 4×4 avente gli 8 numeri prefissati disposti ordinatamente come descritto nella tabella (7), e quindi come somma costante $S = a + b + c + d$".

Infatti, nelle ipotesi attuali, restano determinati nella tabella (6) innanzitutto gli elementi h, o, e poi l, p. Ma allora anche m, n, q, r restano determinati, poiché valgono relazioni della forma:

$$
(8) \qquad \begin{aligned}
m + n &= \text{cost.} \\
m + r &= \text{cost.} \\
n + r &= \text{cost.}
\end{aligned}
$$

da cui si ricavano subito m, n, e quindi anche q, r. Ciò mostra che lo spazio vettoriale $Q(4, \mathbf{R})$ ha dimensione 8, ossia la tesi.

(II) Supponiamo $n > 4$ e consideriamo la tabella $n \times n$ ottenuta generalizzando la (7) e raffigurata qui sotto, in cui abbiamo fissato arbitrariamente $n(n-2)$ elementi, indicati con un trattino orizzontale, mentre i $2n$ elementi da trovare sono indicati con un punto interrogativo:

$$
(9) \qquad \begin{array}{ccccccc}
- & - & - & \cdots\cdots & - & - & - \\
- & - & - & \cdots\cdots & - & - & ? \\
- & - & - & \cdots\cdots & - & - & ? \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
- & ? & - & \cdots\cdots & - & ? & ? \\
? & ? & ? & \cdots\cdots & ? & ? & ?
\end{array}
$$

Ora, ripetendo un'argomentazione del tutto analoga a quella sopra illustrata nel caso $n = 4$, giungiamo a scrivere relazioni del tipo (8), che ci permettono di concludere che "esiste *uno e un solo* quadrato magico $n \times n$ avente gli $n(n-2)$ elementi prefissati disposti ordinatamente come descritto nella tabella (9), e quindi come somma costante il numero S ottenuto sommando gli elementi prefissati sulla prima riga." Ciò mostra che lo spazio vettoriale $Q(n, \mathbf{R})$ ha dimensione $n(n-2)$, per ogni $n > 4$, ossia la tesi in generale.

Conviene sottolineare inoltre il carattere costruttivo delle argomentazioni sopra sviluppate, ciò che consente, in particolare, di scrivere immediatamente una base *esplicita* dello spazio vettoriale $Q(n, \mathbf{R})$, per ogni $n \geq 3$. Segnaliamo infine che un'altra dimostrazione di tipo algebrico dei risultati precedenti viene suggerita in [13].

Osservazioni finali

Per concludere, vogliamo mettere in evidenza alcuni aspetti specifici legati all'uso del racconto nell'apprendimento della matematica, sulla base di quanto esposto in precedenza.

In particolare, nel primo paragrafo, abbiamo visto comparire vari momenti dell'attività matematica: l'operazione concreta del contare in situazioni non banali, in cui entrano in gioco numeri molto grandi, la manipolazione di dati numerici per ricavare nuove informazioni significative e formulare congetture, la ricerca di un modello per calcolare numeri molto grandi e, a volte, la necessità di effettuare calcoli approssimati.

Nel secondo paragrafo, prevalgono invece altri aspetti: anche qui ci sono calcoli, ma si tratta di calcoli molto semplici, che servono unicamente a illustrare proprietà generali, attraverso esempi concreti. C'è soprattutto una serie di passaggi molto stimolanti tra il concreto e l'astratto, tra gli esempi e la teoria. Non ci sono vere dimostrazioni matematiche, ma piuttosto considerazioni generali, sorrette da argomentazioni ben sviluppate dal punto di vista logico, oltreché da esempi calzanti, che permettono al Lettore di comprendere appieno i problemi e i risultati in questione.

L'ultimo paragrafo, infine, è dedicato al momento della "ricerca" e della "scoperta" in matematica. Precisamente, prendendo spunto da un'antica leggenda, abbiamo visto come possa nascere la curiosità per nuovi sviluppi, giungendo a considerare alcuni problemi non banali, con gradi differenti di complessità, ma anche con chiari risvolti ludici, la cui importanza non andrebbe sottovalutata. A quest'ultimo riguardo, segnaliamo alcuni testi: [3], [7], [24], [29], [33], [51], [60] e in particolare, uno straordinario racconto umoristico di Zavattini, di solito citato col titolo: *La gara mondiale di matematica* (cfr. [62]).

Inoltre, al di là degli aspetti culturali dell'approccio qui illustrato, a partire dal contatto diretto con testi storici, letterari, artistici, filosofici, ecc., tra cui la ricchezza di spunti interdisciplinari (cfr. [3], [5], [10], [15], [23], [26], [27], [31], [32], [34], [36], [37], [38], [39], [42], [44], [45], [56], [57], [58], [63], [64], [65]), c'è qualche elemento più riposto che forse andrebbe sottolineato.

Innanzitutto, proprio la forma del racconto, come abbiamo visto, può stimolare la curiosità, l'immaginazione, la fantasia e la creatività. Si tratta dunque di un contributo prezioso per un migliore apprendimento della matematica, anche alla luce del fatto che tale disciplina viene presentata, di solito, in un contesto già formalizzato e rigidamente organizzato per mezzo di assiomi, definizioni, regole e procedure di calcolo.

Un altro elemento importante da tener presente è il fatto che la lettura di un racconto non richiede prerequisiti e per di più, non provoca in generale stati d'ansia, di frustrazione o di inadeguatezza. Pertanto, un approccio del tipo qui proposto potrebbe aiutare, in certi casi, a superare alcuni ostacoli relativi all'apprendimento della matematica.

Per finire, tornando al mondo della scuola, si potrebbe pensare al racconto come *pre-testo*, cioè momento che preceda l'uso del testo vero e proprio o l'esposizione dei vari argomenti in programma, ma anche come *pretesto*, ossia occasione per sviluppi ulteriori, nella direzione della "matematica per problemi". A questo punto, il riferimento al pensiero e all'opera di Bruno de Finetti (1906-1985), a cui è dedicato questo Congresso, diventa del tutto naturale, se non obbligato. Basta ricordare alcuni aspetti fondamentali della sua concezione dell'insegnamento della matematica: più induzione che deduzione, più intuizione che rigore formale, più "scoperta" che apprendimento meccanico, più visione generale ispirata al "fusionismo" che specializzazione spinta (cfr. [17], [19]). È il messaggio di uno dei più grandi matematici italiani del Novecento, che ha lasciato tracce profonde nella cultura del secolo scorso, non solo italiana (cfr. ad es. [18], [20], [52]).

Ringraziamenti. – Desidero ringraziare, in particolare, il mio amico Franco Altomare per le osservazioni, i suggerimenti e gli incoraggiamenti ricevuti durante la stesura del lavoro.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] ARCHIMEDE (1974), *Opere*, Utet, Torino.
[2] BARROW J.D. (1992), *Perché il mondo è matematico?*, Laterza, Bari.
[3] BARTOCCI C. (a cura di) (2006), *Racconti matematici*, Einaudi, Torino.
[4] BELL E.T. (1949), *La magia dei numeri*, Longanesi, Milano.
[5] BELL E.T. (1966), *I grandi matematici*, Sansoni, Firenze.
[6] BERNARDINI C. – DE MAURO T. (2003), *Contare e raccontare – Dialogo sulle due culture*, Laterza, Bari.
[7] BORGES J.L., *Tutte le Opere*: vol. **1** (1984), vol. **2** (1985), Mondadori, Milano.
[8] BOYER C.B. (1980), *Storia della matematica*, Mondadori, Milano.
[9] CALVINO I. (1991), *Perché leggere i classici*, Mondadori, Milano.
[10] CALVINO I. (1998), *Lezioni americane*, Mondadori, Milano.
[11] CALVINO I. (2005), *Romanzi e racconti*, voll. **1-3**, Mondadori, Milano.
[12] CASTELNUOVO E. (1993), *Pentole, ombre, formiche*, La Nuova Italia, Firenze.
[13] CHAMBADAL L. – OVAERT J.L. (1968), *Algèbre linéaire et algèbre tensorielle*, Dunod, Paris.
[14] COURANT R. – ROBBINS H. (2000), *Che cos'è la Matematica?*, Bollati Boringhieri, Torino.
[15] D'AMORE B. (2009), *Matematica, stupore e poesia*, Giunti, Firenze.
[16] D'ARCY W. THOMPSON (1969), *Crescita e forma*, Bollati Boringhieri, Torino.
[17] DE FINETTI B. (1967), *Il "saper vedere" in matematica*, Loescher, Torino.
[18] DE FINETTI (1989), *La logica dell'incerto*, Il Saggiatore, Milano.
[19] DE FINETTI B. (2005), *Matematica logico-intuitiva. Nozioni di matematiche complementari e di calcolo differenziale e integrale*, Giuffrè, Milano.
[20] DE FINETTI B. (2006), *L'invenzione della verità*, Cortina, Milano.
[21] DIONIGI I. (a cura di) (2002), *Di fronte ai classici*, Rizzoli, Milano.
[22] DIONIGI I. (a cura di) (2007), *I classici e la scienza*, Rizzoli, Milano.
[23] EMMER M. (2006), *Visibili armonie*, Bollati Boringhieri, Torino.
[24] ENZENSBERGER H.M. (1997), *Il mago dei numeri*, Einaudi, Torino.
[25] ERODOTO (1996), *Le Storie*, vol. **II**, Utet, Torino.
[26] EULERO (2007), *Lettere a una principessa tedesca*, Bollati Boringhieri, Torino.
[27] FREUDENTHAL H. (1967), *La matematica nella scienza e nella vita*, Mondadori, Milano.
[28] GEYMONAT M. (2006), *Il grande Archimede*, Sandro Teti, Roma.

[29] GHERSI I. (1972), *Matematica dilettevole e curiosa*, Hoepli, Milano.
[30] GUÉNON R. (1980), *La Grande Triade*, Adelphi, Milano.
[31] HARDY G.H. (1989), *Apologia di un matematico*, Garzanti, Milano.
[32] HERSH R. (2001), *Cos'è davvero la matematica*, Baldini Castoldi, Milano.
[33] HOFFMAN P. (1999), *L'uomo che amava solo i numeri*, Mondadori, Milano.
[34] KANDINSKY W. (1968), *Punto, linea, superficie*, Adelphi, Milano.
[35] KAPLAN R. (1999), *Zero. Storia di una cifra*, Rizzoli, Milano.
[36] KLINE M. (1976), *La matematica nella cultura occidentale*, Feltrinelli, Milano.
[37] LANG S. (1991), *La bellezza della matematica*, Bollati Boringhieri, Torino.
[38] LE LIONNAIS F. (1962), *Les grands courants de la pensée mathématique*, Librairie Scientifique et Technique A. Blanchard, Paris.
[39] LOMBARDO RADICE L. (1981), *L'infinito*, Editori Riuniti, Roma.
[40] LORIA G. (1950), *Storia delle Matematiche*, Hoepli, Milano.
[41] LUCREZIO (1994), *La natura delle cose*, Rizzoli, Milano.
[42] MAOR E. (1998), *Trigonometric Delights*, Princeton University Press.
[43] MARCHESE A. (1983), *L'officina del racconto*, Mondadori, Milano.
[44] MAROSCIA P. (2004), *La prima lezione sulla matematica del Novecento*, in: Ancona R.L. – Faggiano E. – Montone A. – Pupillo R. (a cura di), *Insegnare la matematica nella scuola di tutti e di ciascuno*, Ghisetti e Corvi Editori, Milano, pp. 215-217.
[45] MAROSCIA P. (2004), *La bellezza della matematica: l'apollineo e il dionisiaco*, in: G. Bruno, A. Trotta (a cura di), Atti Congresso Nazionale Mathesis 2004, Sogin, pp. 204-211.
[46] MAROSCIA P. (2008), *Matematica e Poesia*, in: M. Emmer (a cura di), Matematica e Cultura 2008, Springer, Milano, pp. 227-241.
[47] MAZUR B. (2005), *Immaginare la matematica (e farsela amica)*, Orme Editori, Milano.
[48] MORIN E. (2000), *La testa ben fatta*, Cortina, Milano.
[49] MUSIL R. (1987), *I turbamenti del giovane Törless*, Mondadori, Milano.
[50] MUSIL R. (1995), *L'uomo senza qualità*, Einaudi, Torino.
[51] PELLEGRINO C. – ZUCCHERI L. (2007), *Tre in Uno. Piccola Enciclopedia della Matematica "Intrigante"*, Università di Modena e Reggio Emilia.
[52] PIATTELLI PALMARINI M. (1987), ***S** come cultura*, Mondadori, Milano.
[53] PIVA A. (2004), *"Recondita armonia di bellezze diverse": il latino e la matematica*, in: G. Bruno, A. Trotta (a cura di), Atti Congresso Nazionale Mathesis 2004, Sogin, pp. 194-203.
[54] QUINTILIANO (2001), *Institutio Oratoria*, Einaudi, Torino.
[55] SABATINI F. – COLETTI V. (2007), *Dizionario essenziale della lingua italiana*, Sansoni, Firenze.
[56] SEVERINI G. (1997), *Dal Cubismo al Classicismo*, SE, Milano.
[57] SINISGALLI L. (1992), *Furor mathematicus*, Ponte alle Grazie, Firenze.
[58] STEINER G. (2001), *Linguaggio e silenzio*, Garzanti, Milano.

[59] STEINER G. (2004), *La lezione dei maestri*, Garzanti, Milano.
[60] TAHAN M. (1996), *L'uomo che sapeva contare*, Salani, Firenze.
[61] WEYL H. (1975), *La simmetria*, Feltrinelli, Milano.
[62] ZAVATTINI C. (1977), *Parliamo tanto di me*, Bompiani, Milano.
[63] ZELLINI P. (1980), *Breve storia dell'infinito*, Adelphi, Milano.
[64] ZELLINI P. (1985), *La ribellione del numero*, Adelphi, Milano.
[65] ZELLINI P. (2010), *Numero e logos*, Adelphi, Milano.

Paolo Maroscia,
Sapienza – Università di Roma
Dipartimento di Scienze di Base e Applicate per l'Ingegneria
Via Antonio Scarpa 14-16, 00161 Roma
e-mail: paolo.maroscia@uniroma1.it