La Matematica nella Società e nella Cultura

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Elena Anne Corie Marchisotto

Mario Pieri: l'Uomo, il Matematico, il Docente

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **3** (2010), n.3, p. 321–364.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2010_1_3_3_321_0>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2010.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. III, Dicembre 2010, 321-364

Mario Pieri: l'Uomo, il Matematico, il Docente [1]

ELENA ANNE CORIE MARCHISOTTO

1. – Introduzione

Mario Pieri giocò un ruolo significativo nello sviluppo della geometria algebrica e dei fondamenti delle matematiche negli anni a cavallo del ventesimo secolo.

Fig. 1. – Mario Pieri

Questo articolo intende gettare luce sulla personalità di questo illustre matematico e sulla profondità e ampiezza della sua opera scientifica. L'obiettivo è quello di trasmettere ai lettori il significato dell'eredità che Pieri lasciò in matematica, oltre ad offrire

[1] Questo articolo è basato su Marchisotto e Smith [2007] e al contempo ne amplia il contenuto. La traduzione dell'articolo è di Erika Luciano.

una valutazione, rapportata al contesto storico, dei suoi contributi alla logica, alla filosofia della scienza e all'insegnamento della matematica.

È grazie alla cortesia dei pronipoti di Mario Pieri, Marco e Vittorio Campetti, e delle loro famiglie, che sono state rese disponibili alcune informazioni private e numerose lettere, citate in questo articolo. I signori Campetti e le consorti, Pellegrina Campetti e Maria Grazia Ciampini, hanno accolto l'autrice nelle loro dimore e le hanno consentito l'accesso alla biblioteca privata di Sant'Andrea di Compito, alle porte di Lucca, dove è conservata la collezione personale di libri e manoscritti di Pieri.

Fig. 2. – Fotografia dell'autrice con Francesco, figlio di Marco e Pellegrina Campetti, nella biblioteca di Pieri.

2. – Pieri l'Uomo

Mario Pieri nacque il 22 Giugno 1860, all'indomani dell'unificazione d'Italia. Era il terzo di otto figli, tutti nati a Lucca da Erminia Luporini e Pellegrino Pieri. Pellegrino era uno stimato avvocato e uno studioso, appartenente ad un'antica famiglia originaria di Vellano, un paese a est di Lucca. Era membro della Reale Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Lucca di cui Mario, così come Silvio, suo fratello maggiore, sarebbe a sua volta divenuto socio.

Fin dagli esordi della sua carriera scolastica, Mario diede prova di una serietà di intenti e di un'etica del lavoro che destò l'ammirazione dei suoi insegnanti. Dopo aver frequentato la scuola elementare e quella tecnica a Lucca, all'età di sedici anni si iscrisse al Reale Istituto Tecnico di Bologna. Qui il suo profitto migliorò di anno in anno. Classificatosi ottavo su diciannove studenti al termine del primo anno, a partire da quello successivo fu primo su venti. Pieri colpì in particolare il suo insegnante di Fisica, Augusto Righi, che sarebbe poi diventato uno dei più illustri fisici italiani ([2]).

A vent'anni, Mario era pronto per l'Università. La famiglia desiderava che frequentasse la prestigiosa Scuola Normale Superiore di Pisa ([3]) ma le condizioni finanziarie non erano floride. Silvio aveva del resto bisogno di un ulteriore anno di perfezionamento in lingua e letteratura presso l'Università di Bologna, per cui si decise che Mario avrebbe alloggiato con suo fratello a Bologna, dove avrebbe frequentato l'Università e concorso per una borsa di studio, in modo da potersi trasferire l'anno seguente alla Scuola Normale di Pisa ([4]).

Durante il suo primo anno all'Università di Bologna Pieri frequentò sei corsi e ottenne ottime votazioni negli esami curricolari (Geometria

([2]) Sei disegni di astronomia di Mario, forse elaborati per i corsi di fisica di Righi, sono conservati nella Biblioteca Pieri a Sant'Andrea di Compito.

([3]) La Scuola Normale era estremamente selettiva. Durante gli anni 1879-1883 appena tredici studenti la frequentavano, metà dei quali in scienze e metà in discipline letterarie.

([4]) Francesco Campetti, pronipote di Pieri, ha messo a nostra disposizione una lettera che Pellegrino scrisse a suo fratello il 13 Febbraio 1881, illustrando le sue intenzioni. Il padre di Pieri affermava: ... *E poiché Silvio, sebbene compiuti gli studi universitari e addottorato fino dal mese di Giugno si tratteneva a Bologna anche questo anno, così ci mandai anche Mario, ed ora fa il primo anno nella facoltà di Scienze fisiche. Un altro anno, se Dio lo aiuterà, proseguirà all'Università di Pisa conseguendo un posto di studio alla Scuola Normale, perchè il suo ideale sarebbe addottorarsi e darsi quindi all'insegnamento anziché all'esercizio di una professione ....*

analitica e proiettiva, Fisica e Chimica inorganica, Algebra) conseguendo la lode in tutti, tranne che in Algebra. Due fra i docenti suoi esaminatori, Cesare Arzelà e Salvatore Pincherle, avrebbero rivestito un ulteriore ruolo nella sua carriera ([5]).

Come aveva programmato, Pieri sostenne l'esame di ammissione alla Scuola Normale nell'Ottobre del 1881, ottenendo il punteggio di 24/30, e iniziò gli studi il mese seguente. Come tutti gli allievi della Scuola, frequentò contemporaneamente i corsi presso l'Università di Pisa e, fra i docenti, ebbe Luigi Bianchi, che si era perfezionato con Felix Klein, Enrico Betti, cui si deve il merito di aver introdotto in Italia le idee di Bernhard Riemann e Riccardo De Paolis, che era stato allievo di Luigi Cremona.

Ottenuto il certificato di licenza per l'insegnamento nelle scuole medie nel 1883, Pieri presentò le tesi di laurea per l'Università di Pisa e per la Scuola Normale, entrambe svolte sotto la direzione di Bianchi, nel 1884 ([6]). All'età di ventiquattro anni conseguì dunque la laurea in Matematica con lode, entrando in un mondo in cui la domanda di professionisti con un'alta formazione culturale era esigua. La sua ricerca di una posizione universitaria andò incontro a complicazioni di vario genere: il nazionalismo, le condizioni economiche e politiche, le tradizioni accademiche, la rete di relazioni culturali e personali e talvolta persino alcune circostanze singolari, frutto dell'intensa competizione.

Nell'Ottobre del 1885 Pieri iniziò la sua carriera di insegnante a livello pre-universitario presso la Reale Scuola Tecnica di Pisa – un incarico per cui era stato raccomandato da Ulisse Dini, già suo docente a Pisa ([7]) – e, nello stesso periodo, tenne una serie di lezioni speciali sui poliedri alla Scuola Normale. Nel Novembre del 1886, a ventisei anni,

([5]) Cfr. Marchisotto e Smith [2007], §1.1.5, pp. 25-29.

([6]) La tesi di laurea 6144 per l'Università di Pisa (*Sulle singolarità della Jacobiana di quattro, di tre, di due superficie*) fu completata nel Giugno del 1884, e la tesi 6144A per la Scuola Normale (*Studi di geometria differenziale*) fu completata nel Settembre del 1884. Entrambe sono disponibili in microfilm presso la biblioteca dell'Università di Pisa. Sono state rintracciate grazie alla cortesia della Dr.ssa Alessandra Pesante e del Prof. Daniele Napolitani.

([7]) Cfr. p. 55 di Arrighi [1997], lettera 49.

fu nominato professore di Geometria proiettiva e descrittiva alla Reale Accademia Militare di Torino (8), una posizione (ottenuta tramite concorso) che avrebbe mantenuto fino al 1900. Come molti docenti suoi colleghi all'Accademia militare, Pieri avrebbe insegnato parallelamente all'Università di Torino, dove nel 1888 sarebbe divenuto assistente di Giuseppe Bruno sulla cattedra di Geometria proiettiva. Filiberto Castellano e Guido Castelnuovo erano anch'essi assistenti. Conseguita la libera docenza nel 1891, Pieri tenne corsi di Geometria proiettiva e di Complementi di Geometria ed ebbe fra i suoi studenti Beppo Levi, che sarebbe diventato suo collega a Torino e, molto tempo dopo, all'Università di Parma.

Nel 1893 Righi informò Pieri di aver ricevuto conferma, da parte della Facoltà di Bologna, della sua assunzione in ruolo come professore straordinario di Geometria descrittiva e proiettiva, sulla cattedra lasciata vacante da Domenico Montesano (9). Ciò nonostante, per una serie di motivi (impedimenti burocratici, ostacoli politici e intrighi accademici), il posto gli venne da ultimo rifiutato. La saga dell'"affare di Bologna" si protrasse per quattro lunghi anni (10), durante i quali egli continuò ad insegnare all'Accademia militare e all'Università di Torino.

Sfortunatamente per Pieri, molti di coloro che avevano agito a suo danno per la cattedra di Bologna si comportarono analogamente con l'intento di negargli l'opportunità di aspirare a una posizione presso l'Università di Torino: il 1 Novembre 1899 egli era infatti stato nominato professore *incaricato* di Geometria proiettiva e descrittiva in questo Ateneo. Tale incarico doveva perdurare finché non si fosse espletato il concorso per la cattedra lasciata vacante da Luigi Berzolari. Gino Fano intendeva chiedere l'apertura di tale concorso ma, il 16 Dicembre 1899, Federigo Enriques lo dissuadeva dal farlo. Quest'ultimo, tramite Castelnuovo, informava infatti Fano che tale ri-

(8) Questa Accademia derivava dalle Regie Scuole Teoriche e Pratiche di Artiglieria e Fortificazione, fondate da Carlo Emanuele III il 16 Aprile 1739, che svolsero un ruolo importante nella cultura scientifica piemontese.

(9) Telegramma 104 del 18 Novembre 1893, da Righi a Pieri in Arrighi [1997], p. 103.

(10) Cfr. anche la nota 12. Cfr. Marchisotto e Smith [2007], §1.1.5, pp. 25-32.

chiesta sarebbe stata *pericolosa finché Pieri era ancora a Torino* ([11]). Il concorso fu così rimandato e il 30 Gennaio 1900 Pieri accettò la cattedra di Geometria proiettiva e descrittiva presso l'Università di Catania, in Sicilia. Sei giorni più tardi, Enrico D'Ovidio mise la Facoltà di Torino al corrente della nuova sistemazione di Pieri e propose di assumere un assistente per coprire il posto rimasto provvisoriamente vacante, fino all'espletamento del concorso. In quell'occasione Giuseppe Peano propose per contro che la cattedra andasse a Pieri e fece presenti alla Facoltà i meriti scientifici e didattici di quest'ultimo, osservando come sarebbe stato *desiderabile* che egli potesse rimanere a Torino. Pur riconoscendo la cultura di Pieri e le sue doti di docente, D'Ovidio replicò che la sua nomina a Catania era ormai un *fait-accompli* e il voto della Facoltà, respingendo la proposta di Peano, sancì il futuro accademico di Pieri ([12]).

Egli avrebbe trascorso otto anni in Sicilia e là avrebbe vissuto momenti cruciali della sua vita professionale e personale. Il suo arrivo a Catania diede l'avvio ad un *decennio aureo* per la matematica locale ([13]). Egli iniziò ad insegnare nella primavera del 1900 e si inserì rapidamente nelle attività culturali dell'Università e della sua nuova città: nel 1901 divenne socio dell'*Accademia Gioenia* e avrebbe fatto parte del consiglio amministrativo del suo periodico. Sempre nel 1901, all'età di quarantun anni, Pieri sposò Angiolina Anastasio Janelli, cognata di sua sorella minore Virginia e nativa della città siciliana di Castroreale. Nel 1903 conseguì inoltre il titolo

([11]) Bottazzini, Conte e Gario [1996], lettera 471, pp. 436-437. Non è chiaro perchè non sia stato Pieri stesso a richiedere l'apertura del concorso. Forse la tensione causatagli dall'"affare di Bologna" lo aveva scoraggiato.

([12]) Verbali delle sedute della Facoltà di Scienze dell'Università di Torino, per cortesia della Professoressa Silvia Roero e delle Archiviste Paola Novaria e Giuliana Borghino Sinleber. Università degli Studi di Torino; Divisione: Attività Istituzionali; Servizio: Archivio Generale; Settore: Archivio Storico. Questa informazione è stata ottenuta dopo la pubblicazione di Marchisotto e Smith [2007]. Si veda anche Luciano e Roero [2010], p. 7.

([13]) Pieri e Giuseppe Lauricella erano considerati le 'punte di diamante'. Come Pieri, Lauricella era stato studente di Dini all'Università di Pisa. Guido Fubini prestò servizio nella Facoltà di Catania negli anni 1902-1905 e Carlo Severini vi giunse nel 1903. Tazzioli [1999], pp. 211-213.

di professore ordinario di Geometria proiettiva e descrittiva. Durante il periodo trascorso a Catania diresse sei studenti nelle tesi di laurea, su temi di geometria algebrica ([14]), e la sua produzione scientifica fu imponente, tanto da garantirgli riconoscimenti a livello nazionale ed internazionale per la sua instancabile operosità scientifica ([15]).

Ciò nonostante, Pieri continuò a cercare altrove una sistemazione accademica e, da ultimo, ebbe l'opportunità di un trasferimento a Parma. Nell'ottobre del 1908 prese servizio nella Facoltà di questa città come professore ordinario e direttore della Scuola di Geometria proiettiva e descrittiva con elementi di Disegno. Come già a Catania, il suo arrivo fu salutato come un'occasione per dare lustro alla piccola Università locale ([16]). Inizialmente Pieri e il suo assistente Attilio Vergerio, che aveva conseguito la laurea presso l'Università di Bologna, furono gli unici membri della Scuola di Geometria ma, a partire dal 1910, Pieri reclutò anche Beppo Levi. Insieme avrebbero lavorato per potenziare l'offerta universitaria nel settore matematico, creando le Scuole di Fondamenti di Algebra, di Disegno d'ornato e di Architettura e di Calcolo Infinitesimale. Nello stesso tempo Pieri portò avanti il suo ambizioso programma di ricerca in geometria algebrica e fondamenti e avviò una nuova linea di studi: quella in analisi vettoriale ([17]).

([14]) Giuseppe Marletta, Grazia Caldarera, Francesco D'Amico, Niccolò Giampaglia, Rosario Scaccianoce e Andrea Saluta furono gli unici studenti che discussero la tesi di laurea sotto la direzione di Pieri. Durante la sua permanenza all'Università di Parma (1908-1912) furono conferiti solo diplomi di licenza del primo biennio (diplomi in scienze fisiche e matematiche).

([15]) Durante il periodo trascorso a Catania, Pieri pubblicò due lavori di geometria algebrica, due recensioni, quattro articoli di logica e fondamenti dell'aritmetica e sette di fondamenti della geometria. In considerazione dei suoi contributi alla logica e alla filosofia della scienza, fu invitato come relatore al Congresso Internazionale di Filosofia di Parigi, nell'Agosto del 1900. Per i suoi risultati e per il servizio reso alla patria, Pieri fu nominato Cavaliere della Corona d'Italia nel 1908.

([16]) Tartufari [1913], p. vii. Luigi Tartufari era Rettore dell'Università di Parma. Le informazioni su Parma sono dovute alla cortesia di Angelo Fabbi, Direttore dei Servizi dell'Archivio Storico dell'Università di Parma.

([17]) Cfr. Marchisotto e Smith [2007], §1.1.7, pp. 44-47.

Mentre era nel pieno fervore della sua attività didattica e scientifica, gli fu diagnosticato un cancro alla gola, che forse già una seria malattia, che lo aveva colpito cinque anni prima a Catania, poteva lasciar presagire. Il 1 Marzo 1913 Pieri morì a casa di sua sorella Gemma, a Sant'Andrea di Compito.

Fig. 3. – Una delle ultime fotografie di Pieri a Compito.

I quattro necrologi che furono pubblicati sui periodici specialistici riflettono l'immediato impatto che egli ebbe sul mondo matematico italiano ([18]). Quelli a firma di Beppo Levi e di Giovanni Giambelli apparvero su importanti riviste rivolte alla comunità matematica universitaria. Giambelli sottolineava in particolare l'importanza di numerosi risultati di Pieri di geometria proiettiva e algebrica, mentre Levi tracciava un affresco dei suoi contributi scientifici. Il necrologio di Peano appariva invece nel bollettino dell'Academia pro Interlingua che

([18]) Levi [1913] e [1914], Giambelli [1913], Peano [1913] e Castelnuovo [1913]. Il necrologio di Levi è ripubblicato in Pieri [1980]. Un quinto necrologio fu redatto da Scipione Rindi, amico d'infanzia di Pieri ([1913] 1919). Successivamente, articoli di carattere biografico o commemorativo di Pieri sono stati redatti da Ugo Cassina [1961], Narcisco Fava [1922], Hubert Kennedy [1970-1974], Poggendorff [1904-1926], Fulvia Skof [1960], e Christian Thiel [1995].

egli dirigeva, dedita alla promozione della lingua artificiale denominata *latino sine-flexione*, e rifletteva lo stretto legame professionale di Pieri con Peano, durato quasi trent'anni. Castelnuovo curava infine il necrologio per il *Bollettino della "Mathesis", Società Italiana di Matematica* ([19]) e, in questo caso, la pubblicazione rispecchiava l'interesse di Pieri per l'insegnamento della matematica, cui aveva spesso fatto cenno nei suoi lavori sui fondamenti ([20]).

Pieri non lasciò eredi, ma non vi è dubbio che la sua vita famigliare fosse stata ricca e coinvolgente. Egli fu un figlio e un fratello devoto, oltre che uno zio affettuoso, e durante tutta la sua vita si preoccupò costantemente di garantire entrate sufficienti per la sua numerosa famiglia ([21]).

I tratti distintivi di **Pieri l'uomo**, che trasparirono fin dalla sua giovinezza, sono il suo amore del sapere, la sua generosità d'animo e la sua straordinaria umiltà. Mario fu uno studente scrupoloso, che non si vantava del proprio talento né dei suoi successi. Anzi, Francesco Campetti soleva dire: *Mia nonna Beatrice raccontava*

([19]) La *Mathesis* è la più antica società italiana di insegnanti di matematica e fu fondata nel 1895. Attualmente reca il nome di *Mathesis, Società Italiana di Scienze Matematiche e Fisiche* e prosegue la pubblicazione di una sua propria rivista.

([20]) Pieri pubblicò anche tre articoli ([1897b], [1906f], [1914]) sul *Periodico di matematica per l'insegnamento secondario* (una rivista di taglio didattico fondata in Italia nel 1886). Uno di questi apparve postumo. Anche due recensioni di Pieri ([1903c], [1905d]) furono edite su questa rivista, che oggi si chiama *Periodico di matematiche.*

([21]) Pieri fu ad esempio costretto a declinare l'invito di Oswald Veblen (lettera del 2 Luglio 1905, di Pieri a Veblen. Veblen Papers, sezione P, faldone 10. Divisione Manoscritti, Library of Congress, Washington) a divenire socio dell'American Mathematical Society, a causa del costo di abbonamento al periodico *Transactions*, che esulava dal suo budget. Nonostante il suo amore per l'insegnamento della matematica, egli avrebbe inoltre di fatto dissuaso suo nipote Gaetano dall'intraprendere la carriera di insegnante e, anzi, lo avrebbe incoraggiato a scegliere un percorso professionale tramite cui potesse aspirare a *un più alto tenore di vita* (lettera del 2 Maggio 1911, di Pieri a Gaetano Campetti. Per cortesia delle famiglie Campetti). Dopo la morte del padre nel 1882, Pieri si prese inoltre cura a Torino della sorella minore Virginia e di sua madre. Durante tutta la vita, sostenne finanziariamente i figli di sua sorella Gemma (Pellegrino, Gaetano e Ottorino Campetti). Ottorino è padre di Marco e Vittorio Campetti e fu insegnante di fisica di scuola superiore di Gino Arrighi, professore a Pisa e studioso di Storia delle matematiche, che pubblicò numerose lettere di Pieri in [1997].

sempre che Pieri passava di solito quasi tutto il suo tempo a studiare, ma non voleva essere considerato un genio ... Era davvero modesto ([22]).

Questi tratti improntarono anche la vita professionale di Pieri, che fu un docente coscienzioso, un collega disponibile e uno studioso illustre ma umile. Nell'orazione tenuta nell'Aprile del 1922, quando le sue spoglie furono traslate nel famedio del Cimitero Monumentale di Sant'Anna a Lucca, il sacerdote Don Narcisco Fava ([23]) osservò che: ... *il Pieri salì a sì alto grado in questa scienza, da meritargli la stima di quanti uomini dotti ebbero il piacere di poter conoscere l'opera sua. Un complesso così meraviglioso di doti, tanta bontà di cuore, una scienza così profonda e sicura, congiunta ad attrattive così potenti, a parola così umile, ma sempre viva e forte, é facile capire qual prodigiosa forza dessero all'insegnamento del Pieri, a che alta eccellenza facessero salire le opere di lui.*

Come dimostra, nei successivi paragrafi, l'esame dell'eredità da lui lasciata nel campo della matematica e della filosofia, Pieri cercò costantemente di 'reinventarsi' in una moltitudine di settori, pur mantenendo sempre uno stile pacato, non supponente e rispettoso nei confronti dei suoi predecessori. Si può dire che, in parte a causa di questa sua singolare modestia, **Pieri il matematico** sia rimasto 'all'ombra dei giganti' ([24]).

3. – Pieri il Matematico

L'attività di ricerca di Pieri può essere ripartita in tre grandi aree tematiche: la geometria differenziale, algebrica e l'analisi vettoriale; i fondamenti della matematica; la logica e la filosofia della scienza. I suoi lavori concernenti questi due ultimi settori sono stati ripubblicati nel 1980 a cura dell'*Unione Matematica Italiana* ([25]). I suoi scritti di

([22]) Traduzione di uno stralcio di lettera di F. Campetti all'autrice.

([23]) Fava [1922], pp. 5-6. Fava era il curato della chiesa parrocchiale di Sant'Andrea di Compito.

([24]) Cfr. Marchisotto [1995].

([25]) Le citazioni tratte da questi lavori recano l'indicazione dei numeri di pagina dell'*Opera* [1980].

geometria differenziale ed algebrica e quelli di analisi vettoriale, invece, non sono finora stati raccolti in volume ([26]).

Geometria Differenziale

La tesi di laurea di Pieri, che verteva su temi di geometria differenziale, non apparve mai su rivista. Agli esordi della sua carriera egli pubblicò però tre articoli dedicati ad un esame delle superfici e delle ipersuperfici condotto con i metodi della geometria differenziale ([27]). Il primo, nel quale estendeva un noto teorema di Betti e Julius Weingarten, fu giudicato *particolarmente a lodarsi* da parte della commissione di concorso ([28]) dell'Università di Bologna. Poco prima della morte, Pieri sarebbe tornato ad occuparsi di geometria differenziale, stabilendo un legame fra questi studi e quelli di analisi vettoriale. Egli contribuì infatti con un'appendice ([29]) al volume di Cesare Burali-Forti e Roberto Marcolongo che sviluppava il calcolo geometrico di Peano ([30]) in un sistema di analisi vettoriale ed era convinto che tale sistema avrebbe potuto essere efficace e utile nel semplificare gran parte della geometria differenziale. Burali-Forti – che era stato compagno di studi di Pieri all'Università di Pisa oltre che suo collega all'Accademia militare di Torino – ritenne per questo motivo che l'amico fosse uno dei pochi studiosi non fisici ad essersi interessato al suo approccio all'analisi vettoriale e sperò che egli avrebbe coinvolto altri geometri, dando un contributo maggiormente organico ai lavori successivi ([31]). La morte impedì a Pieri di portare a compimento questo progetto, tuttavia egli riuscì ancora a pubblicare, prima della scomparsa, due articoli che po-

([26]) Questi contributi saranno analizzati in Marchisotto e Smith [in corso di stampa].

([27]) Pieri [1886a], [1887a], e ([1893] 1914). Quest'ultimo fu pubblicato dapprima in forma di opuscolo, e successivamente ristampato postumo.

([28]) La commissione di concorso incaricata di valutare Pieri era composta da Bertini, Ferdinando Aschieri, Giuseppe Veronese, Montesano e Corrado Segre. Cfr. *Bollettino Ufficiale del Ministero della Pubblica Istruzione.* Anno XXIV, vol. I, numero 11, Roma, 18 Marzo 1897, p. 533.

([29]) Pieri [1912b].

([30]) Cfr. Freguglia [2006] per quanto concerne la storia e le applicazioni del calcolo geometrico.

([31]) Lettera 28 del 19 Gennaio 1912, Burali Forti a Pieri. Cfr. p. 33 di Arrighi [1997].

nevano in relazione la geometria differenziale delle congruenze di raggi e dei sistemi di superfici con quella dei campi vettoriali ([32]).

Geometria Algebrica

La seconda tesi di Pieri verteva su questioni di geometria algebrica ed anch'essa non fu data alle stampe. Ciò nonostante, la sua attività di ricerca in questo settore fiorì nell'alveo della Scuola di Geometria algebrica fondata da Corrado Segre e da D'Ovidio all'Università di Torino. Questo Ateneo divenne un centro di riferimento per gli studiosi di geometria sia italiani che europei, grazie soprattutto all'impatto di Segre *significativo, sia per la mole di idee e di spunti per ulteriori ricerche, sia per la quantità e la qualità dei suoi allievi e dei matematici che influenzò*. Ritenuto *notevole* fra questi ultimi ([33]), Pieri pubblicò trentun lavori di geometria algebrica fra il 1884 e il 1902 ([34]).

Il suo interesse principale nel campo della geometria algebrica (la geometria dei luoghi degli zeri comuni ad insiemi di polinomi) fu rivolto all'ambito della geometria birazionale ed enumerativa. La geometria birazionale può essere caratterizzata come lo studio delle proprietà geometriche che dipendono solo dai campi di funzioni del luogo (che constano di funzioni razionali, ossia rapporti di polinomi nelle funzioni coordinate). La geometria enumerativa riguarda l'enumerazione dei luoghi di un certo tipo, soggetti a determinati vincoli geometrici, che rendono finito il numero delle soluzioni.

Le ricerche di Pieri di geometria birazionale si focalizzarono sulle proprietà e sugli effetti di trasformazioni birazionali (corrispondenze con inverse esprimibili algebricamente come funzioni razionali delle loro coordinate). In particolare egli si propose di classificare tutte le trasformazioni birazionali di una varietà algebrica e di usare la geometria proiettiva per esplorare le proprietà delle varietà invarianti per tra-

([32]) Pieri [1912d] e [1912e].

([33]) Giacardi [2001], p. 139, e Boffi [1986], p. 109.

([34]) Cfr. Marchisotto e Smith [2007], §6.2, pp. 374-378, e §1.2.1, pp. 50-53. Pieri morì prima di vedere pubblicata la panoramica complessiva sui metodi enumerativi di Zeuthen (Pieri [1915] 1991), che egli aveva tradotto e rivisto.

sformazioni birazionali ([35]). Pieri si valse anche delle trasformazioni birazionali per studiare i punti singolari (cioè gli zeri di molteplicità maggiore di uno) di curve e di superfici algebriche ([36]), e così pure per classificare le superfici rigate (cioè generate dal moto di una retta) e per dimostrare le relazioni che intercorrono fra queste e gli spazi proiettivi di dimensione superiore ([37]).

La geometria proiettiva multidimensionale costituì, per così dire, il *trait d'union* fra gli studi di Pieri di geometria birazionale e lo sviluppo e l'applicazione di metodi atti a risolvere problemi enumerativi. Il materiale di base per i metodi enumerativi si trova nella teoria dell'intersezione, che studia cosa avviene quando certe varietà algebriche si intersecano dentro uno spazio ambiente. Un esempio è costituito dal problema di determinare il numero di punti di intersezione di due curve piane di gradi m ed n che non presentino un componente comune. Lo spazio ambiente è ottenuto introducendo dei punti all'infinito, in modo da estendere il piano affine ordinario a quello proiettivo. Il problema enumerativo comporta il fatto di contare ogni punto di intersezione con la sua molteplicità appropriata e, per il cosiddetto teorema di Étienne Bézout, il numero dei punti di intersezione contati con la loro molteplicità appropriata è mn. Pieri fornì la prima dimostrazione sintetica della generalizzazione di questo teorema al caso multidimensionale ([38]).

([35]) Per esempio, date alcune assunzioni riguardanti la razionalità di un complesso di rette tangenti a una superficie algebrica, Pieri dedusse un metodo che forniva tutte le trasformazioni birazionali di un certo tipo (trasformazioni Cremoniane non involutorie), per cui i raggi congiungenti punti omologhi producono speciali complessi di rette, evidenziando la condizione sufficiente per generare tali trasformazioni. Cfr. Pieri [1895c].

([36]) Per esempio, Pieri dimostrò sinteticamente che ogni curva algebrica piana (senza un'infinità di punti multipli) è razionalmente trasformabile in una sghemba senza punti singolari. Cfr. Pieri [1894d]. La scoperta di questo risultato è generalmente attribuita a Leopold Kronecker (1862). Una storia della sua dimostrazione è fornita in Bliss [1923].

([37]) Per esempio, Pieri dimostrò che lo studio dei complessi cubici di rette di uno spazio tridimensionale contenente tre piani fissati poteva essere condotto come uno studio di varietà cubiche con tre rette fissate in uno spazio a 4 dimensioni. Cfr. Pieri [1890b].

([38]) Pieri [1888]. Il teorema di Bézout è un risultato centrale in geometria algebrica ed esso ha importanti conseguenze (per esempio il teorema dell'esagono di Pascal) e applicazioni nella matematica moderna (per esempio la teoria dei codici).

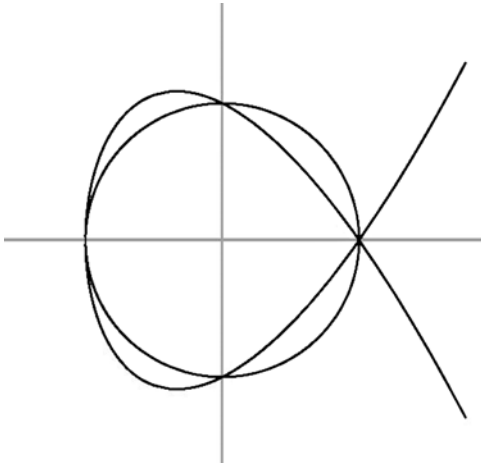

Fig. 4. – Intersezione del cerchio unitario $x^2 + y^2 = 1$ con la curva ellittica $y^2 = x^3 - x^2 - x + 1$. Nel piano affine, ci sono due punti di intersezione (0, 1) e (0, −1) che hanno molteplicità uno, e due punti (− 1, 0) e (1, 0) che hanno molteplicità due. Per cortesia di Franz Lemmermeyer.

Il teorema di Bézout costituì il fulcro delle ricerche sulla teoria algebrica dell'intersezione per oltre un secolo, finché, nel 1879, Hermann Schubert rivoluzionò tale settore con l'obiettivo di affrontare problemi enumerativi ([39]). Pieri 'si issò sulle spalle di' Schubert nell'applicazione e nell'estensione dei suoi metodi.

Teoricamente è sempre possibile risolvere un problema enumerativo. Si tratta di determinare il numero di figure geometriche che soddisfano alcune condizioni geometriche prestabilite, di stabilire le equazioni che le definiscono, di eliminare i parametri indesiderati fino a ricondursi a una variabile, valutando il grado dell'equazione, e di scartare tutte le radici indesiderate. Ciò nonostante, questo metodo è raramente applicabile, persino al giorno d'oggi, pur avendo a disposizione i moderni strumenti computazionali! Schubert ebbe l'idea originale di usare dei simboli algebrici per rappresentare delle condizioni geometriche. Egli concepì un calcolo simbolico che poneva i geometri nelle condizioni di risolvere direttamente i problemi enumerativi, al

([39]) Cfr. Kleiman [1985], pp. 137-138.

venir meno dei metodi elementari, senza bisogno di costruire figure o di risolvere le equazioni che li definivano ([40]).

Nel suo libro del 1879, Schubert utilizzò i simboli p e g per rappresentare le condizioni su famiglie ad 1 parametro di punti e rette in uno spazio tridimensionale, attraverso le loro mutue condizioni di incidenza. Più specificamente, data una famiglia di punti, p valuta il numero (finito) di punti situati in un dato piano (in posizione generica), e data una famiglia di rette, g valuta il numero (finito) di rette che intersecano una retta data (in posizione generica). Analogamente pg, p_g, e g_e rappresentano condizioni su famiglie a 2 parametri di coppie punto-retta incidenti e g^2, g_p e nuovamente g_e rappresentano condizioni su famiglie di rette a 2 parametri. In particolare, data una famiglia di coppie punto-retta, pg valuta il numero di coppie per cui, simultaneamente, il punto appartiene a un piano dato e la retta interseca una retta data, p_g valuta il numero di coppie per cui il punto appartiene ad una retta data e g_e valuta il numero di coppie per cui la retta giace su un piano dato. Inoltre, data una famiglia di rette, g^2 valuta il numero di rette che intersecano due rette date, g_p valuta il numero di rette che passano per un punto dato e g_e valuta il numero di rette che appartengono a un piano dato.

Nel calcolo di Schubert le condizioni pg, p_g, e g_e sono poste in relazione dall'equazione $pg = p_g + g_e$, poiché il numero di coppie punto-retta che soddisfano simultaneamente p e g è uguale alla somma del numero di quelle che soddisfano p_g e del numero di quelle che soddisfano g_e ([41]). Analogamente, g^2, g_p e g_e sono legati dall'equazione $g^2 = g_p + g_e$, poiché il numero di rette che intersecano due rette date è uguale alla somma del numero di quelle che passano per un punto dato e del numero di quelle che giacciono su un piano

([40]) Il calcolo enumerativo di Schubert scaturì dal lavoro di Michel Chasles sulla teoria enumerativa delle coniche, e fu elaborato sul modello del calcolo logico di Ernst Schröder.

([41]) Questa formula può essere applicata a un punto arbitrario di una curva e alla tangente ad essa in questo punto: i numeri p e g sono allora rispettivamente il grado della curva e quello della sua superficie sviluppabile (numero delle sue tangenti che intersecano una tale retta). g_e esprime la condizione di contatto di una curva con un piano dato e p_g esprime la condizione di intersezione con una retta data. Pieri ([1915] 1991), p. 309.

dato. Schubert usò quest'ultima formula, tra l'altro, per determinare il numero di rette che intersecano quattro rette date ([42]).

Pieri applicò efficacemente il calcolo di Schubert e ampliò i suoi ambiti di azione. Per esempio, nel 1886 Schubert aveva generalizzato la sua equazione $g^2 = g_p + g_e$ a una formula moltiplicativa che contasse il numero di sottospazi di dimensione s di uno spazio proiettivo complesso di dimensione n, soddisfacenti le condizioni di incidenza più generali imposte da successioni incapsulate di sottospazi lineari, nel primo caso, quello più importante, e cioè quello della classe speciale di Schubert di co-dimensione 1. Nel 1893, Pieri estese tale risultato al caso generale, quello di una classe speciale di Schubert di co-dimensione arbitraria ([43]).

Pieri estese e generalizzò anche le formule di corrispondenza di Schubert nel caso in cui due figure variabili in modo indipendente dovessero coincidere, ottenendo delle formule che determinano il numero di punti fissi di corrispondenze algebriche su spazi proiettivi di di-

([42]) Schubert [1879], pp. 13, 23. Vi sono due modi equivalenti per impostare questo problema: o cercare le rette nello spazio proiettivo tridimensionale che intersecano quattro rette (sottospazi lineari che hanno una posizione speciale rispetto a sottospazi lineari fissati), o cercare sottospazi lineari bidimensionali di uno spazio proiettivo complesso di dimensione 4, che hanno un'intersezione non banale con quattro sottospazi lineari generali bidimensionali. Schubert aveva affrontato il problema in uno spazio proiettivo di dimensione 3, facendo ricorso a quello che chiamava il principio di *conservazione del numero*. Questo principio, basato sul principio di continuità di Poncelet, afferma che il numero di soluzioni di un problema enumerativo rimane invariato quando i parametri delle condizioni sono particolarizzati, a patto che il numero rimanga finito e sia pesato rispetto alle molteplicità di occorrenza nella soluzione. Schubert specificò le quattro rette date in modo da far sì che la prima intersecasse la seconda e la terza intersecasse la quarta. In questo caso speciale, vi sono due rette che intersecano la quarta, perciò vi devono essere anche nel caso generale due soluzioni (o un numero infinito). Cfr. Kleiman [1976], p. 9.

([43]) Pieri [1893d], p. 258. In termini moderni, la formula di Pieri fornisce una regola per moltiplicare una classe speciale di Schubert per una classe arbitraria di Schubert nell'anello di coomologia di una varietà grassmanniana. Sviluppandola, Pieri fece un passo in avanti sostanziale verso la soluzione del problema generale. Infine Giambelli ([1902], p. 172) dimostrò una formula che esprime ogni classe di Schubert come un determinante di una classe di Schubert speciale, riducendo il problema generale al risultato di Pieri. I risultati delle ricerche iniziate da Schubert e proseguite da Pieri e da Giambelli sono stati ritenuti *particolarmente significativi e suggestivi* (Kleiman [1985], p. 140).

mensione superiore. Egli applicò una delle formule trovate per contare il numero virtuale di punti fissi di una corrispondenza su uno spazio proiettivo n-dimensionale quando il luogo dei punti fissi è infinito (44).

Pieri pubblicò diciassette lavori di geometria enumerativa fra il 1886 e il 1902. All'atto di valutare i quindici apparsi a partire a partire dal 1897, la sopracitata commissione di concorso all'Università di Bologna si espresse in questi termini: [questi lavori] *per la sostanza e il metodo si riferiscono alla geometria enumerativa specialmente degli iperspazi e ne risolvono problemi interessanti e non semplici (estensione del principio di corrispondenza, determinazione del numero degli spazi che soddisfano a certe condizioni di incidenza con spazi dati, ecc.) con ingegnosi procedimenti che dimostrano avere il candidato perfetta conoscenza dei metodi di ricerca dello Schubert* (45). La formula di Pieri gioca un ruolo centrale negli studi enumerativi moderni e una valutazione complessiva delle sue ricerche in geometria algebrica gli è valsa la qualifica di *brillante studioso di questo campo* (46).

Fondamenti

Pieri raggiunse l'eccellenza anche in un altro settore, nuovamente ispirato dal ricco ambiente di ricerca dell'Università di Torino. Egli fu infatti un esponente di spicco della Scuola di Peano, dedita allo studio della logica e dei fondamenti (47) e, fra il 1895 e il 1912, pubblicò diciotto lavori sui fondamenti della geometria e tre sui fondamenti dell'aritmetica, promuovendo le idee della Scuola di Peano. L'apparte-

(44) Pieri [1891d], p. 265. Il teorema di Pieri per le corrispondenze è stato indicato come un *precedente della moderna teoria dell'eccesso di intersezioni* (Fulton [1984], p. 318). L'idea dell'"eccesso di intersezioni" rende ragione di cosa avviene quando delle varietà algebriche si intersecano con una dimensione maggiore rispetto a quella attesa. Per esempio, una retta e un piano in uno spazio si intersecano tipicamente in un punto, di dimensione attesa 0. Tuttavia, quando la retta giace sul piano, l'intersezione coincide con la retta, la cui dimensione è 1.

(45) Cfr. *Bollettino Ufficiale del Ministero della Pubblica Istruzione.* Anno XXIV, Vol. I, numero 11, Roma, 18 Marzo 1897, p. 534.

(46) Brigaglia e Cilberto [1995], p. 18. In inglese nel testo.

(47) Infatti, Pieri è stato definito *un vero ponte* fra la Scuola di Peano e quella di Segre (Brigaglia e Masotto [1982], p. 137).

nenza di Pieri a questa Scuola non fu tuttavia priva di alcuni *distinguo*, soprattutto in relazione alle istanze metamatematiche.

Nelle sue esposizioni delle teorie matematiche in forma assiomatica, Pieri utilizzò implicitamente o esplicitamente il linguaggio simbolico di Peano, tuttavia il suo ricorso al calcolo logico coincise solo in parte con gli intendimenti del matematico cuneese. Come Peano, egli riconobbe infatti l'utilità di adottare il simbolismo per raggiungere il rigore, la chiarezza espositiva e la facilità di analisi. A differenza di quest'ultimo, però, egli vide anche in esso una base per la costruzione di teorie matematiche sotto forma di sistemi *ipotetico-deduttivi*, in cui i teoremi fossero derivati dai postulati applicando le leggi della logica e indipendentemente da qualsiasi appello all'intuizione ([48]). Pieri non legò i suoi postulati a nessuna interpretazione specifica e a nessuna applicazione al mondo fisico e, in questo, precorse il formalismo di David Hilbert.

Sia Pieri sia Peano precedettero Hilbert anche nel fornire dimostrazioni formali dell'indipendenza dei sistemi di assiomi ([49]). A differenza di Peano, Pieri avrebbe però concordato con Hilbert anche nel riconoscere la necessità di discutere la consistenza dei suoi postulati ([50]). Ad esempio, Pieri sostenne l'opportunità di usare un metodo diretto per provare la consistenza dell'aritmetica ma, anziché cercare una dimostrazione all'interno dell'aritmetica stessa (come Hilbert aveva chiesto), costruì ciò che attualmente si definisce una dimostrazione di consistenza per l'aritmetica dei numeri naturali relativa a un sistema di teoria degli insiemi ([51]).

Pieri non si discostò mai dall'obiettivo tipico della Scuola di Peano, cioè quello di rendere minimo il numero di enti primitivi dei sistemi di assiomi. Per esempio, nel 1907 diede un'assiomatizzazione dell'aritmetica che, insieme con una di Alessandro Padoa, fu ritenuta da

([48]) Cfr. Marchisotto [2011].

([49]) Cfr., per esempio, Peano ([1891]) e Pieri [1898c].

([50]) Peano non vedeva la necessità di discutere la consistenza (Borga e Palladino [1982], p. 38). Pieri esaminò per la prima volta il problema della consistenza relativa di una teoria matematica nel suo lavoro [1898c], a proposito dell'assiomatizzazione della geometria proiettiva.

([51]) Cfr. Pieri [1906g]. Nonostante l'interpretazione di Pieri non valga in molte teorie degli insiemi attuali, quella di Zermelo-Frankel può fornire una sua modifica accettabile.

Peano stesso un perfezionamento dei suoi celebri postulati ([52]). Tale valutazione è dovuta alla riduzione operata da Pieri del numero di enti primitivi a due soltanto (numero e successore) e alla sostituzione del postulato di Peano sull'induzione con la richiesta che ogni insieme di numeri naturali non vuoto S abbia un elemento che non è il successore di alcun numero di S.

Pieri produsse numerose assiomatizzazioni, che dimostrano l'approccio sintetico da lui adottato nello sviluppo di differenti geometrie sotto forma di sistemi *ipotetico-deduttivi*. Egli pubblicò tredici lavori di geometria proiettiva reale e complessa, tre su quella elementare e due su quella delle inversioni. Considerando la geometria come un sistema astratto e formale, più che come lo studio dello spazio fisico, Pieri usò il calcolo di Peano per presentarla nella veste di 'studio di determinate relazioni logiche'. Egli tentò di dimostrare l'indipendenza e la consistenza relativa dei suoi postulati. Si propose di ridurre il numero di enti primitivi necessari per lo sviluppo di ogni specifica geometria, aprendo così spesso nuovi indirizzi, in virtù delle sue scelte innovative per i termini indefiniti.

Le ricerche di illustri matematici, oltre che quelle di Peano, sono distintamente richiamate nelle trattazioni di Pieri. Sotto l'ispirazione di Pasch e di Peano, egli elaborò sistemi di assiomi atti a stabilire varie geometrie come scienze autonome, svincolate da qualsiasi idea ad esse estrinseca. Accostò alla filosofia del Programma di Erlangen di Klein i metodi della geometria sintetica, attribuendo un ruolo centrale ai concetti di superficie, di gruppo di trasformazioni e di invarianti associati a un gruppo. Questi temi sono evidenti sin dai suoi primi lavori sui fondamenti, relativi all'ambito della geometria proiettiva.

([52]) Pieri [1907a], Padoa [1902], Peano [1889a]. Peano, in [1916] (2002), scrisse: *L'enunciazione delle proposizioni primitive dell'aritmetica fu giudicata degna di menzione nell'Encyclopädie ... Però questa teoria fu, collo strumento della logica matematica, sorpassata dal prof. Padoa, e dal compianto prof. Pieri; sicché le mie ricerche hanno ora solo un valore storico.* Cfr. Marchisotto e Smith [2007] §4, pp. 289-326 per una traduzione inglese ed un'analisi di Pieri [1907a].

i. Geometria Proiettiva

La geometria proiettiva può essere caratterizzata come la geometria della riga, così come quella euclidea è la geometria della riga e del compasso. Dal punto di vista delle trasformazioni, la geometria proiettiva è lo studio delle proprietà delle figure invarianti per corrispondenze biunivoche del piano proiettivo, che mandano punti collineari in punti collineari e rette incidenti in rette incidenti, mentre la geometria euclidea è lo studio delle proprietà delle figure invarianti per omotetia, traslazione o rotazione assiale e riflessione attraverso piani.

Le idee della geometria proiettiva risalgono all'antichità tuttavia, fin dall'inizio, i suoi concetti e i suoi teoremi fecero ricorso alle nozioni euclidee. Le ricerche di Pieri in questo campo furono invece rivolte a sciogliere questi legami. Nel sostenere tale approccio egli 'si issò sulle spalle' di G. K. C. von Staudt di cui, in tutti i suoi scritti di geometria proiettiva, rivisitò continuamente le idee ([53]). Il contributo più importante di Pieri a questo proposito fu la realizzazione del progetto Staudtiano di liberare la geometria proiettiva dalle considerazioni metriche. Pieri non solo stabilì questa geometria come una scienza autonoma, ma portò anche contributi significativi alle ricerche sintetiche sugli spazi di dimensione superiore ([54]). Egli costruì la geometria proiettiva reale n-dimensionale sulla base di due enti primitivi (punto e retta) e di venti postulati (diciannove dei quali stabiliscono lo spazio proiettivo tridimensionale). L'importanza dei suoi articoli fu rilevata da Peano secondo cui: *I risultati cui pervenne il Pieri costituiscono un'epoca nello studio dei principii della Geometria. B. Russell, del-*

([53]) Per invito di Corrado Segre, Pieri aveva tradotto in italiano l'opera di Staudt [1847] [Pieri 1889a]. Da quel momento, tutte le sue assiomatizzazioni rivisitarono e approfondirono le idee di Staudt. Cfr. Marchisotto [2006].

([54]) Pieri [1898c]. A Veronese [1891] e Fano [1902] sono dovute le principali assiomatizzazioni (precedenti quella di Pieri) della geometria proiettiva n-dimensionale. Quella di Pieri spiccò tuttavia su quelle per il suo rigore e per la sua riduzione degli enti primitivi a due soltanto. Per una disamina dettagliata dei contributi di Pieri alla geometria proiettiva, per una traduzione inglese e per un'analisi di Pieri [1898c], cfr. Marchisotto, Rodríguez-Consuegra, e Smith [in corso di stampa]. Per una panoramica sui contributi di Pieri alla geometria proiettiva nel contesto della ricerca italiana cfr. Avellone, Brigaglia e Zappula [2002].

l'Università di Cambridge, nel suo libro The Principles of Mathematics, 1903, dice del lavoro del Pieri "This is the best work on the present subject." E tutti coloro che in seguito trattarono dei principii della Geometria, si servirono ampiamente del lavoro del Pieri, e diedero dei giudizii equivalenti a quello riportato dal Russell ([55]).

Pieri avrebbe sviluppato ulteriormente le idee Staudtiane fornendo una trattazione della geometria proiettiva complessa ([56]). Staudt infatti aveva per primo elaborato una soddisfacente *definizione puramente geometrica* degli elementi immaginari ([57]), secondo la quale un punto immaginario è un'involuzione ellittica su di una retta reale associata al verso della retta ([58]). Corrado Segre, fra gli altri, aveva semplificato la teoria di Staudt ([59]), e Pieri fece fare a questi risultati un ulteriore passo innanzi. Mentre i suoi predecessori avevano definito i punti immaginari per mezzo di quelli reali nel piano, egli concepì infatti un procedimento differente.

Sulla base di tre enti primitivi (punto proiettivo complesso, retta complessa, catena ([60]) di tre punti distinti complessi collineari) e di trentuno postulati, Pieri sviluppò la geometria proiettiva complessa come una scienza autonoma, senza fare ricorso ad idee ad essa estrinseche. Invece di definire i punti immaginari coniugati come

([55]) Peano [1915], p. 171.

([56]) Pieri [1905c].

([57]) Coolidge [1900], p. 182.

([58]) Staudt [1856-60]. In genere, prima di questo lavoro, tali elementi o venivano postulati o venivano definiti implicitamente in termini di relazioni formali cui essi soddisfacevano. Per una discussione delle diverse categorie di elementi immaginari introdotti da Staudt, cfr. §7 di Nabonnand [2008]. Per un affresco sulla storia degli immaginari, dall'antichità fino alle ultime decadi del diciannovesimo secolo, cfr. Ramorino [1897].

([59]) Cfr. Segre [1886] e [1889-90].

([60]) La nozione di catena lineare su una retta complessa fu introdotta da Staudt, a partire dalla geometria proiettiva reale. Egli la definì come un insieme di punti su una retta complessa che è proiettivamente equivalente a un sottoinsieme di punti reali sulla retta. Dal punto di vista fondazionale, la geometria proiettiva di catene su una retta complessa è isomorfa alla geometria metrica di cerchi in un piano. Mediante i suoi postulati, e senza ricorrere alla geometria proiettiva reale, Pieri sviluppò le proprietà di catene corrispondenti a quelle che si incontrerebbero nello sviluppo della geometria su una sfera reale (immagine della retta complessa).

aveva fatto Staudt, per mezzo di involuzioni ellittiche di punti reali su rette reali ([61]), Pieri li introdusse per mezzo della separazione per catene. Nel far ciò egli non fece ricorso all'idea non proiettiva di direzione.

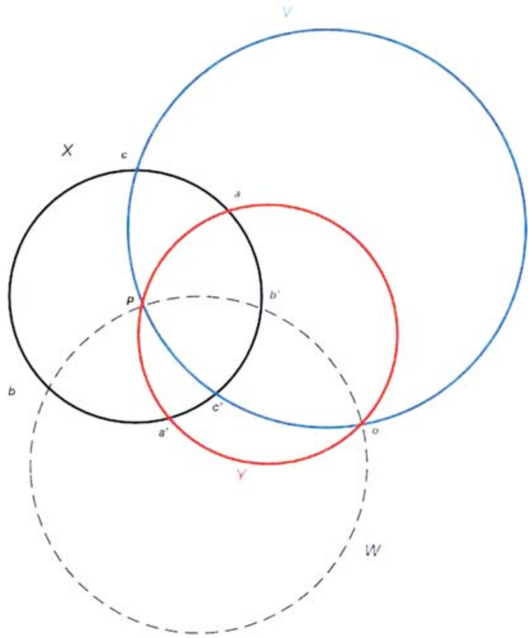

Fig. 5. – Se p e o sono separati da una catena X, allora ogni catena V che li contiene intersecherà sempre X in 2 punti separati da p e o. Questi punti possono essere usati per generare un'involuzione ellittica su X nel modo seguente. Siano a e a' i punti nei quali X interseca la catena Y ortogonale a X e passante per p ed o; e siano b e b' i punti su X armonici su una catena W rispetto a p ed o. Entrambe le coppie separano p ed o. Ogni anti-involuzione (composizione di un'involuzione e di un'inversione) determinata da queste coppie di punti è ellittica e fissa X, Y e W. Pertanto p ed o, comuni a Y e W, sono sempre coniugati per mezzo della stessa anti-involuzione e ogni catena V che li contiene intersecherà X nei punti c e c', coniugati secondo la stessa anti-involuzione ellittica.

([61]) Dire che un punto immaginario giace su una retta reale equivale ad affermare che l'involuzione ellittica rappresentata dal punto immaginario dato giace sulla retta data. Pertanto, dato un punto immaginario come un'involuzione ellittica associata a una direzione della retta reale, la stessa involuzione, associata alla direzione opposta, darebbe il coniugato. Per esempio, se a, a' e b', b' sono coppie di punti reali, l'involuzione il cui senso è specificato da $aba'b'$ e l'involuzione il cui senso è specificato da $a'bab'$ corrispondono a punti immaginari coniugati.

ii. Geometria Elementare

Pieri elaborò due assiomatizzazioni della geometria elementare – una per quella neutrale ed una per quella euclidea. La geometria neutrale è quella parte, comune alla geometria euclidea e a quella iperbolica, che talvolta prende il nome di *geometria assoluta*. In un saggio completato nel 1899 (62), Pieri adottò le idee di Peano sulle trasformazioni di punti e le applicò in nuovi contesti, costruendo la geometria neutrale a partire dai soli due enti indefiniti (punto e moto), e sviluppando le proprietà del moto come elemento di un gruppo di trasformazioni. La sua scelta delle nozioni primitive era innovativa, dal momento che la maggior parte dei suoi contemporanei includeva fra queste la retta. Pieri invece definì la retta in termini di moto, senza fare appello all'ordine dei punti. Per stabilire l'incidenza di una coppia di punti *a*, *b* su una retta, egli introdusse parecchi postulati, uno dei quali garantiva l'esistenza di almeno un moto, diverso dall'identità, che mantenesse fissi entrambi. Tuttavia non tutti i moti di questo tipo avrebbero garantito che <u>tutti</u> i punti collineari con *a* e *b* e <u>solo quelli</u> fossero fissi (vedi fig. 5). Per escludere tali moti, Pieri fece la seguente assunzione: se per ogni terna di punti distinti *a*, *b*, e *c* esiste un moto diverso dall'identità che fissa *a* e *b*, allora <u>ogni</u> moto che fissa *a* e *b*, deve fissare anche *c*. Pertanto la proprietà di essere fissi rispetto a un moto diverso dall'identità è sufficiente come definizione nominale della collinearità.

(62) Pieri [1900a]. Con questo lavoro, Pieri stabilì per primo la geometria assoluta sulla base di due soli enti primitivi. Pieri citò Peano [1889] e [1894], osservando che gli enti primitivi e i postulati di Peano potevano essere derivati dai suoi. In Marchisotto, Rodríguez-Consuegra, e Smith, [in corso di stampa], è fornita una traduzione inglese ed un'analisi di Pieri [1900a].

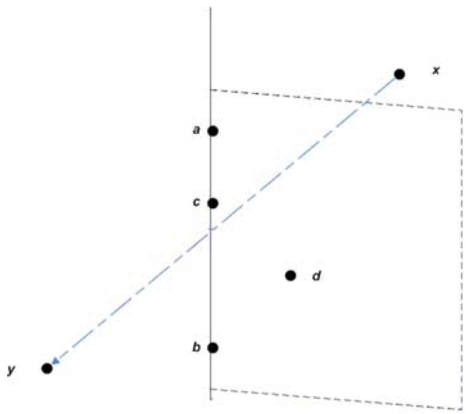

Fig. 6. – Il punto d non è collineare con a e b. Per esempio, una riflessione dello spazio attraverso il piano abd è un moto (diverso dall'identità) che fissa a, b, e d e porta x su y.

L'assiomatizzazione di Pieri è una *bella trattazione* della geometria neutrale *molto moderna nello stile* (63) e tuttavia, purtroppo, essa fu completamente eclissata da quella di Hilbert (64), tanto che al giorno d'oggi solo pochi studiosi la conoscono.

Per contro, l'assiomatizzazione di Pieri per la geometria euclidea (65), che ebbe poca risonanza al momento della pubblicazione, ha oggi ottenuto un maggior riconoscimento rispetto a quella della geometria neutrale. Si tratta di un altro esempio di pregevole trattazione sintetica, scritta nello spirito del *Programma di Erlangen* di Klein. Pieri espresse tutti i concetti e i postulati a partire da due soli enti primitivi: il punto e la sfera (una singola relazione ternaria di equidistanza). Per esempio, egli definì la collinearità usando una definizione attribuita a Leibniz secondo cui un punto è collineare con due punti dati a e b quando è l'unico punto comune alle sfere passanti per esso e di centri a, b.

(63) Martin [1975], p. 139.
(64) Hilbert [1899].
(65) Pieri [1908a]. Per la discussione di questo lavoro, cfr. Gruszczynski e Pietruszczak [2007] e Freguglia e Graziani [2008]. Cfr. anche Marchisotto e Smith [2007], §3, pp. 157-287, per una traduzione inglese ed un'analisi di Pieri [1908a].

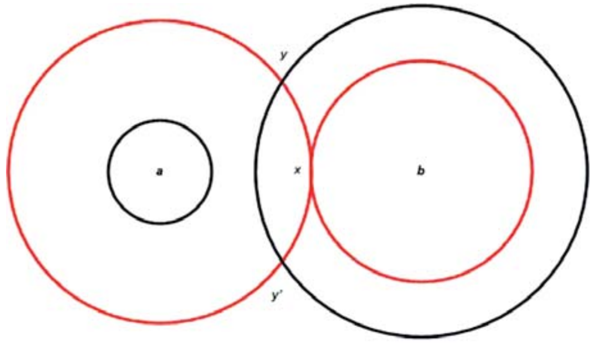

Fig. 7. – x è collineare con a e b poiché le sfere per x di centri a e b non hanno altri punti in comune ad eccezione di x. Il punto y non è collineare con a e b, dal momento che le sfere per y di centri a e b si intersecano anche in y'.

Pieri adottò una definizione analoga per la complanarità. Egli sviluppò il concetto di isometria a partire da quelli di sfera, di collinearità, di riflessione rispetto a un punto, di congruenza di sfere e di congruenza di coppie di punti. Al posto dell'assioma euclideo delle parallele, assunse un principio nuovo, dovuto a Janos Bolyai, secondo cui ogni terna di punti non collineari giace almeno su una sfera ([66]). L'assiomatizzazione di Pieri, tradotta in polacco nel 1915, è stata ritenuta *uno dei contributi più significativi della Scuola di Peano ai fondamenti della geometria* ([67]). Essa fu ripresa da Alfred Tarski come base per la sua costruzione della geometria euclidea ed è stata di stimolo per le ricerche moderne miranti a fondare la geometria su una singola relazione indefinita ([68]).

iii. Geometria delle inversioni

Altri lavori di Pieri, e per esempio le sue assiomatizzazioni della geometria delle inversioni ([69]), furono recepiti solo molti decenni dopo

([66]) Usando questo postulato, si può facilmente derivare la versione di Playfair del postulato euclideo delle parallele. Cfr. Marchisotto e Smith [2007], §2.5, p. 155.
([67]) Borga e Palladino [1992], p. 32.
([68]) Tarski ([1948] 1957). Cfr. Pambuccian [2005] e [2009], e Smith [2010].
([69]) Pieri [1911d] e [1912c].

la loro elaborazione. Mentre la geometria euclidea tratta principalmente di punti e di rette, e le sue trasformazioni sono esprimibili in termini di riflessioni, la geometria delle inversioni si occupa principalmente di punti e di cerchi, e le sue trasformazioni sono esprimibili in termini di inversioni. *Questo tipo di geometria è meritevole di attenzione non solo per la sua bellezza intrinseca, ma anche perché è la geometria dei numeri complessi* ([70]).

In un piano inversivo, che può essere rappresentato come un piano di Argand con un singolo punto all'infinito ([71]), le inversioni mandano cerchi in cerchi. Esse lasciano fissi tutti i punti su un dato cerchio di inversione, mentre scambiano i punti interni con quelli esterni. Il concetto di punti corrispondenti rispetto ad inversioni è di solito definito in termini di distanza euclidea ([72]); Pieri rifiutò tuttavia l'uso di nozioni euclidee nella sua costruzione della geometria delle inversioni e definì le inversioni unicamente in termini di relazioni di incidenza. Un'inversione rispetto a un cerchio C è allora una trasformazione involutoria biettiva che mantiene gli *insiemi armonici.* I punti corrispondenti in un'inversione rispetto a C sono semplicemente i *coniugati armonici* rispetto a C ([73]).

([70]) Coxeter [1971], p. 310.

([71]) L'idea di estendere il piano euclideo fu ritenuta di pertinenza unica della geometria proiettiva per più di due secoli, finché Maxime Bôcher riconobbe che lo stesso procedimento per ottenere un piano inversivo era *del tutto analogo a quanto aveva fatto Desargues, e altrettanto utile* (Coxeter [1971], p. 310). Il fatto di postulare un singolo punto all'infinito ci pone nelle condizioni di pensare ogni linea retta come un cerchio passante per questo punto speciale. I cerchi del piano inversivo sono i cerchi e le rette del piano di Argand completato. Si può visualizzare questo piano mappandolo su una sfera, per mezzo della proiezione stereografica e, per questo motivo, esso è spesso indicato con il nome di sfera complessa o di sfera di Riemann.

([72]) Due punti si dicono inversi l'uno dell'altro rispetto a un cerchio di inversione C e al suo centro o se giacciono su una retta contenente un raggio di C, e il prodotto delle loro distanze da o è uguale al quadrato della lunghezza del raggio di C.

([73]) Se un inversione manda un punto d in x, suo *armonico coniugato* rispetto a e ed f, allora e ed f sono i poli dell'inversione e sono da essa fissati. Pertanto due punti distinti d e x sono coniugati armonici rispetto a un cerchio C quando sono fissati da un'inversione che ha e ed f come poli. In tre dimensioni, punti che sono armonici rispetto a una sfera sono definiti in modo analogo, per mezzo di un'*inversione* rispetto a una sfera.

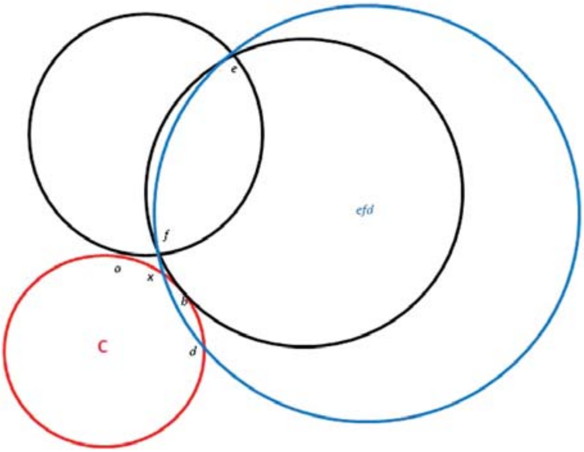

Fig. 8. – Se a, b, d sono punti distinti di un cerchio C, l'*armonico coniugato* di d rispetto ad a e b è x se e solo se esistono due punti distinti e, f, esterni a C, tali che i cerchi efa e efb siano tangenti a C rispettivamente in a e in b, e x sia comune ai due cerchi, C (abd) e efd ma diverso da d.

Pieri chiamò *affinità circolari* le trasformazioni fondamentali della geometria delle inversioni e dimostrò che ogni trasformazione di questo tipo può essere espressa come un'inversione o come prodotto di al più quattro inversioni. Egli costruì la geometria delle inversioni sulla base di nozioni e di premesse invarianti per affinità circolari, ma non per trasformazioni di un gruppo più ampio. La sua assiomatizzazione, basata su due enti primitivi (punto e cerchio) e su venti postulati, sviluppò la geometria delle inversioni piana e solida come un sistema logico completamente indipendente da ogni altra geometria e da ogni supporto analitico.

La trattazione della geometria delle inversioni data da Pieri all'inizio del ventesimo secolo veniva così a colmare una necessità a più riprese segnalata dalla comunità matematica. Nel 1893, Klein aveva infatti osservato che le ricerche sulle trasformazioni inversive *non erano ancora state unificate in una speciale geometria, come invece era avvenuto per la geometria proiettiva*. Nel 1905, Edward Kasner aveva chiesto che fossero stabiliti i fondamenti della geometria delle inversioni ma, ancora nel 1908, in un intervento all'American Mathematical Society, J. W. Young sosteneva che si trattava di problema aperto, la cui soluzione era *fortemente* *desiderabile* ([74]). Anche se Pieri risolse il problema meno di tre anni dopo, costruendo la geometria delle inversioni sinteticamente e dal punto di vista delle trasformazioni, come una scienza autonoma ([75]), il suo lavoro restò praticamente ignorato. Ancora nel 1951, citando solo le assiomatizzazioni di Pieri e quelle di oltre vent'anni successive dovute a Petkantschin e Van der Waerden e Smid, A. J. Hoffmann osservava che *è abbastanza sorprendente che la letteratura comprenda così pochi studi sui fondamenti della geometria delle inversioni, considerata come un settore autonomo* ([76]).

Le costruzioni geometriche di Pieri erano rivolte non solo a sfruttare il potere del metodo assiomatico per fornire delle esposizioni rigorose della matematica, ma anche a 'lasciar vedere all'interno' della natura e della struttura delle teorie matematiche oggetto di studio. In tali lavori, egli palesava pure le strategie che reputava migliori per l'insegnamento della geometria. Per esempio, egli introduceva i postulati solo al momento necessario, aiutando così gli studenti a vedere perché e come la geometria 'cresceva', a mano a mano che veniva aggiunta un'assunzione. Pieri sosteneva peraltro il programma didattico peaniano volto a enfatizzare il rigore nell'insegnamento ([77]). Fornendo delle esposizioni simultanee della geometria piana e solida, egli aderiva al fusionismo, un metodo già sostenuto da De Paolis per la sua efficacia didattica. È emerso, comunque, che le idee di Pieri sui metodi ideali per l'insegnamento della geometria non trovarono mai completa at-

([74]) Cfr. Klein [1893], Kasner [1905] e Young [1909].

([75]) Nel diciannovesimo secolo, le ricerche di geometria delle inversioni si erano generalmente sviluppate in due direzioni: 1) entro il contesto della geometria euclidea (in particolare, usando le coordinate Cartesiane), studiando le proprietà della geometria delle inversioni invarianti rispetto a trasformazioni per raggi vettore reciproci (cfr. per esempio Möbius [1855]), e 2) considerando la geometria delle inversioni come la geometria proiettiva reale di un iperspazio, dove i punti sono rappresentati da cinque coordinate omogenee (cfr. per esempio Klein [1872]). Coxeter ([1971], p. 311) riconobbe che il sistema di Pieri forniva *il primo soddisfacente insieme di assiomi* per la geometria delle inversioni.

([76]) Hoffmann [1951], p. 218.

([77]) Giacardi [2006], pp. 10-11, 190.

tuazione nelle sue personali esperienze didattiche. Nondimeno è chiaro che le ricerche di **Pieri il matematico** ebbero un influsso sulla metodologia di **Pieri il docente**.

4. – Pieri il Docente

Pieri considerava un autentico merito il fatto di insegnare la geometria come una scienza formale fondata sulla logica, a sua volta considerata lo strumento dell'astrazione. Egli sottolineava l'efficacia e gli aspetti intellettuali della logica, volti a promuovere i metodi e i contenuti della geometria, riconoscendo la loro facoltà suggestiva, che spesso conduceva a osservazioni e ricerche altrimenti inesplorate ([78]). Pieri riteneva che l'esposizione della geometria come un sistema di relazioni logiche favorisse negli studenti ciò che definiva l'*intuizione razionale, vale a dire una percezione di rapporti logici tra principî e conseguenze* ([79]). Tuttavia, egli non negava che l'intuizione del mondo fisico avesse un ruolo nella costruzione della geometria e nel suo insegnamento, ma semplicemente escludeva che essa fosse uno strumento atto a giustificare un procedimento deduttivo. Pieri osservava tuttavia che, presto o tardi, i principi deduttivi avrebbero dovuto identificarsi con le idee confermate dall'esperienza ([80]). In altre parole,

([78]) In [1908a], Appendice, *Opere* p. 557, Pieri scrisse: ... *la Geometria, come scienza formale, potrebbe anche reggersi ed essere intesa, pur senza mai fare appello al contenuto intuitivo o fisico de' suoi concetti primitivi ... perchè una mente educata alle idee generali e sorretta da una discreta facoltà di astrazione, divien capace di percepire, oltre il senso logico astratto, anche il nesso delle varie proposizioni e le loro veci deduttive, la concatenazione delle parti e i loro rapporti col tutto, ecc. ... Quel che importa sovra ogni cosa è la pratica del ragionare con esattezza; vale a dire la cognizione sicura dei rapporti logici di principio e conseguenza: insomma l'arte o la facoltà di rettamente argomentare e concludere: facoltà che la Geometria contribuisce, del resto, a sviluppare e promuovere.*

([79]) Pieri [1906d], *Opere*, p. 444.

([80]) Nella sua recensione [1894b] al volume di Johannes Thomae sulle sezioni coniche Pieri (nota a piè di pagina, p. 39) scrisse: *Chè se poi vogliasi trattarla non come scienza astratta, ma più tosto come un ramo della fisica-matematica* (*del che non conviene dissimulare i molti vantaggi, specialmente didattici*) ... *parendomi in vece che a questi si debba presto o tardi far luogo, se i principî e le deduzioni speculative si vorranno* era favorevole all'uso didattico delle rappresentazioni visive o sensibili di oggetti fisici, ma solo prima o dopo la loro trattazione puramente deduttiva.

In Italia, forse più che in ogni altra nazione, l'indirizzo di insegnamento della geometria come sistema puramente logico diede adito a un proliferare di libri di testo ([81]).

È tuttavia un dato di fatto che sussistano alcune difficoltà di tipo metodologico nella gestione della dualità fra la natura astratta degli oggetti matematici – di solito ritenuti privi di esistenza percettiva – e le loro rappresentazioni tangibili, sulle quali si può sviluppare in modo concreto l'attività dei discenti ([82]). Pieri fu perfettamente consapevole di queste difficoltà. In un'occasione, egli suggerì che il fatto di adottare un approccio basato sulle trasformazioni, nello spirito di Klein, avrebbe potuto però *compensarle* ([83]). Anche se nella sua pratica di insegnamento egli non mise mai completamente a frutto la metodologia didattica che riteneva migliore, Pieri incluse nelle sue lezioni molti elementi dei sistemi ipotetico-deduttivi e dell'approccio basato sulle trasformazioni, suggeritigli dal suo lavoro nel settore dei fondamenti.

L'esame delle dispense di Pieri mostra quale evoluzione subirono le sue esposizioni della geometria proiettiva. Le sue lezioni per l'Accademia militare di Torino ([84]) furono elaborate prima della sua assiomatizzazione della geometria proiettiva, ma dopo la sua traduzione del

riscontrare coi fatti, e identificare con le idee che l'esperienza ci apprende intorno ai medesimi.

([81]) Per esempio, i manuali di Aureliano Faifofer e dell'ex-allievo di Pieri Sebastiano Catania. Pieri recensì favorevolmente quello di Catania [1904] (cfr. Pieri [1904d]), e citò quello di Faifofer [1886] in (Pieri [1900a], *Opera* p. 210). Per ulteriori commenti cfr. Villa, [1971], p. 114; e Luciano [2006], p. 286.

([82]) Cfr. Arzarello, Bosch, Gascón & Sabena. [2008].

([83]) In ([1898b], *Opere* p. 165), Pieri scrisse: *Se il nuovo sistema è scarsamente intuitivo ne' suoi principi – da che non par facile procacciarsi ab initio un'interpretazione concreta del "moto projettivo" – questo difetto potrà rimaner compensato, pur nei riguardi estrinseci dell'insegnamento, dalle semplificazioni veramente notevoli che si riscontran qui d'ogni parte: tanto che ne sarebber tolte di mezzo le maggiori prolissità e scabrosità che si oppongono per solito alla sposizione della Geometria projettiva in forma rigorosamente ipotetica.*

([84]) Pieri pubblicò in volume le sue lezioni per l'Accademia militare in [1891c].

fondamentale trattato di Staudt. Esse riflettevano l'approccio tradizionale, adottato da Peano e da altri colleghi, e basato sull'idea di considerare la geometria proiettiva come un'estensione di quella euclidea. Le lezioni di Pieri comprendevano teoremi sia metrici che proiettivi (illustrati con molte figure), costruzioni, problemi ed applicazioni. Esse apparivano suddivise in sedici capitoli con i seguenti titoli ([85]): 1. *Nozioni Preliminari* (figure geometriche, elementi all'infinito, proiezione e sezione, problemi e costruzioni lineari) 2. *Principio dei Segni* (senso e direzione, teoremi di Menelao e di Ceva) 3. *Birapporto, Gruppi armonici* (un approccio metrico, comprendente alcune applicazioni) 4. e 5. *Omografia* (trattata sinteticamente e quindi metricamente) 6. *Involuzioni* (proprietà e problemi) 7. *Problemi di secondo grado* (incluso uno attribuito ad Apollonio) 8. *Leggi di Dualità* (da un punto di vista metrico e grafico) ([86]) 9. e 10. *Omologia* (proprietà e problemi) 11. e 12. *Sezioni coniche* (esempi, teoremi, fra cui il teorema dell'esagono di Pascal, e problemi) 13. *Inviluppi conici* (costruzioni, teoremi, fra cui quello di Brianchon, e applicazioni) 14. *Teoremi di Desargues e di Sturm* 15. *Poli e Polari rispetto a una Conica* 16. *Centro, Diametri e Assi di una Conica* (equazioni cartesiane, costruzioni e problemi).

Queste lezioni presentano una trattazione della geometria proiettiva piuttosto diversa dall'approccio ipotetico-deduttivo basato sulle trasformazioni, tipico dei suoi lavori di ricerca. Le sue lezioni universitarie, invece, 'raccontano una storia diversa'. Pieri insegnò Geometria proiettiva a Torino, Catania e Parma. Le sue dispense per i corsi tenuti a Torino non sono finora state ritrovate. I registri delle lezioni, recentemente acquisiti dall'Università di Catania, forniscono invece le indicazioni degli argomenti delle lezioni di Pieri, svolti du-

([85]) Le parentesi forniscono indicazioni di alcuni dei contenuti di ogni capitolo.

([86]) Pieri ([1891c], pp. 178-9) spiegava che le proprietà grafiche (cioè le proprietà di posizione, che sono indipendenti dal concetto di misura e dalla proprietà del parallelismo, nel senso che non fanno distinzione fra punti propri ed impropri), sono più generali rispetto a quelle metriche. Egli osservava che i teoremi di Menelao e di Ceva sono proposizioni metriche, mentre il teorema sui triangoli di Desargues esprime una proposizione di posizione.

rante la sua docenza presso questo ateneo. Essi non danno dettagli sostanziali sulla metodologia impiegata, anche se lasciano intendere che egli avesse sperimentato strategie differenti a seconda degli anni ([87]).

Quello che i Registri di Catania mostrano è un insieme di modifiche rispetto ai corsi tenuti all'Accademia militare di Torino, sia nei contenuti, sia nell'ordine con cui gli argomenti venivano introdotti. La modifiche ricalcano le assiomatizzazioni di Pieri. Questo si può riscontrare, ad esempio, nella trattazione del teorema sul triangolo di Desargues. Nei corsi all'Accademia militare Pieri lo introduceva molto tardi, e solo dopo aver discusso il teorema dell'esagono di Pascal. Dal momento che si tratta di un risultato che serve come base per molti teoremi proiettivi, Pieri lo dimostrava invece sempre nelle parti iniziali delle sue assiomatizzazioni. Nei corsi tenuti a Catania, la trattazione del teorema di Desargues compare dunque nelle primissime lezioni.

Le litografie ([88]) delle lezioni di Pieri all'Università di Parma forniscono ulteriori dettagli. Quelle per l'anno accademico 1909-1910 riflettono chiaramente l'influsso delle sue ricerche sul suo insegnamento. Pieri iniziava il corso sottolineando le differenze fra la geometria elementare e quella proiettiva, soprattutto in relazione al gruppo fondamentale di trasformazioni. Egli caratterizzava la distinzione fra le proprietà geometriche delle figure, descrivendo quelle della geometria elementare come identificate dal tatto, rispetto a quelle della geometria proiettiva, percepibili tramite la vista. Egli osservava inoltre che, mentre la geometria proiettiva è più astratta di quella elementare, è però anche deduttivamente più semplice. Citava geometri illustri come Jean-Victor Poncelet, Michel Chasles, August Ferdinand Möbius e Jacob Steiner, che avevano considerato la geometria proiettiva come un'estensione di quella euclidea e che avevano assunto *la massima parte, o almeno una parte fondamentale della*

([87]) Per i registri si ringraziano la Professoressa Rossana Tazzioli e l'Archivista Salvatore Consoli, Archivio d'Ateneo, Università degli Studi di Catania.

([88]) Per le litografie di Pieri [1910] e [1911c] si ringraziano il Professor Francesco Speranza e l'Archivista Gianfranco Bolzoni, Archivio Storico, Università degli Studi di Parma.

geometria euclidea nelle loro trattazioni di quella proiettiva. Egli parlava quindi del nuovo indirizzo avviato da Staudt, volto a stabilire la geometria proiettiva sinteticamente come un settore autonomo, svincolato dalle relazioni metriche, e illustrava in termini generali il progresso compiuto in quella direzione. Secondo la sua peculiare umiltà, egli non menzionava mai il suo ruolo in questi sviluppi.

Pieri spiegava che, anche se sarebbe stato *molto desiderabile* il fatto di sviluppare la geometria proiettiva nella tradizione di Staudt, egli seguiva *una via intermedia, supponendo note solo poche nozioni della geometria elementare* (89). La *via intermedia* si apriva con un'introduzione alle figure proiettive nell'ambito dello spazio euclideo, includendo una definizione metrica degli insiemi armonici in termini di birapporti. Tuttavia, a differenza delle lezioni per l'Accademia militare di Torino, essa comprendeva poi un'esposizione dettagliata della definizione sintetica di Staudt degli insiemi armonici e delle trasformazioni proiettive definite tramite essi. Pieri integrava molti risultati di Staudt (come ad esempio il teorema fondamentale) nelle sue lezioni a Parma. Come quelle catanesi, anche queste riflettono una differenza marcata rispetto ai corsi tenuti all'Accademia militare di Torino (90) e ciò spiega perché è così sorprendente il fatto che le litografie per il corso svolto a Parma nel 1910-1911 siano invece una replica delle lezioni di Pieri all'Accademia militare. Una possibile spiegazione è che egli si sia rifatto alle sue vecchie lezioni a causa della malattia.

In nessuna versione delle sue dispense, fra quelle finora ritrovate, Pieri riuscì a sviluppare completamente la metodologia didattica che riteneva ideale. Ciò nonostante, **Pieri il docente** si guadagnò l'ammirazione e il rispetto dei colleghi e degli studenti. Anzi, in una relazione per la sua promozione a professore ordinario alla cattedra di

(89) Pieri ([1910], p. 5) bilanciava questo parere con una discussione sull'utilità della geometria proiettiva. Egli scriveva: *L'utilità della Geometria proiettiva appare dalle sue applicazioni alla Geometria descrittiva, alla Statica grafica, alla cristallografia geometrica, all'Ottica geometrica, ecc. senza parlare della sua grande importanza speculativa di fronte a molte parti della matematica pura.*

(90) Un'analisi comparata dettagliata delle lezioni di geometria proiettiva di Pieri è fornita in Marchisotto, Rodríguez-Consuegra e Smith [in corso di stampa].

Geometria proiettiva e descrittiva presso l'Università di Catania nel 1902, G. Pittarelli scrisse: ...*il Comando dell'Accademia Militare e le Facoltà di Torino e di Catania sono concordi nel lodare, senza restrizioni, lo zelo e l'attitudine didattica del Prof. Pieri.* E ancora nel 1910, Giorgio Aprile, che era stato studente di Pieri a Catania, espresse il suo apprezzamento per lui affermando: *Ella ha incominciato a farmi amare la scienza. Il lavoro che Ella mi propose mi ha fatto gustare le delizie del vero studio.*

5. – Conclusione

Nel suo necrologio di Pieri del 1913, pronunciato alla Reale Accademia delle Scienze di Lucca, Rindi osservava che: [Egli] *lascia preziosa eredità, alla Scienza i frutti del suo studio infaticato e sincero; alla città e alla famiglia l'onore del suo nome; a tutti il ricordo e l'esempio di una vita nobilmente spesa nella ricerca del vero.* A distanza di quasi cinquant'anni Cassina confermava tale giudizio: ... *il matematico lucchese Mario Pieri fu, senza dubbio, uno scienziato di grande valore, la cui opera scientifica di profondo indagatore dei principî della geometria nei suoi vari rami, onora la sua città natale, l'Italia e umanità. ... Sono passati ormai più di 47 anni dalla morte del Pieri, per modo che possiamo valutare meglio - nella prospettiva del tempo - la sua opera complessiva e riconoscere quella di maggior importanza, quella che ha contribuito a far sì che il nome di Mario Pieri sia da inserire nella ristretta cerchia dei matematici italiani più noti in Italia ed all'estero, della fine del secolo scorso e del principio di questo secolo* ([91]).

La valutazione dell'eredità di Pieri è stata di fatto oscillante. In certi ambiti, i suoi contributi sono applicati senza riconoscere propriamente la loro origine e talvolta è dato ad altri studiosi il merito di risultati basilari da lui ottenuti. Anche le trattazioni storiche inerenti i settori in cui egli lavorò spesso li ignorano. Per esempio, nel campo della geometria algebrica le formule di Pieri sono ampiamente uti-

([91]) Cassina [1961], p. 191.

lizzate e sono di stimolo per nuovi sviluppi ([92]), tuttavia i lavori in cui quelle formule apparvero non vengono generalmente citati, né è riconosciuta la loro origine geometrica. I lavori fondazionali di Pieri sulla geometria ebbero risonanza solo relativamente ad alcune delle sue assiomatizzazioni, ma in generale sono stati ampiamente eclissati da quelli di Hilbert e dei suoi allievi. Ciò è particolarmente ironico, dal momento che Pieri precorse alcuni aspetti del loro approccio. La sua assiomatizzazione dell'aritmetica è stata ritenuta degna di riconoscimento ([93]) ma resta praticamente sconosciuta agli studiosi moderni. Le intuizioni di Pieri sulle questioni metamatematiche sono largamente ignorate dalle moderne storie della filosofia della scienza, nonostante il fatto che esse siano state spesso innovative, se rapportate al loro contesto storico, e benché siano ancor oggi meritevoli di studio ([94]).

Negli ultimi decenni, tuttavia, come provano le numerose citazioni in questo articolo, Pieri sta guadagnando una sempre maggiore notorietà. È giusto che questi sforzi proseguano, in modo che gli studiosi possano apprezzare al meglio le doti di questo uomo modesto, e i suoi contributi alla matematica, alla filosofia e all'insegnamento.

([92]) Per esempio Frank Sottile, Birkett Huber e Bernd Sturmfels hanno utilizzato delle deformazioni intrinseche per dedurre una formula ottenuta da Pieri nell'articolo [1893d] e hanno creato il cosiddetto *algoritmo di omotopia di Pieri*, un algoritmo efficiente, che coinvolge "numerical path-following", e che trova una soluzione numerica proprio allo stesso problema geometrico studiato da Pieri, e la cui formula può essere usata per contare il numero di soluzioni. Questo algoritmo di omotopia di Pieri presenta delle applicazioni non solo nel campo della geometria reale enumerativa (che si interroga sulle soluzioni reali di problemi enumerativi quando sono reali le condizioni geometriche del problema), ma anche in quello della teoria dei sistemi. Huber, Sottile & Sturmfels [1998]. Huber e Jan Verschelde migliorarono successivamente l'algoritmo, rendendolo più adatto per le implementazioni su computer [2000].

([93]) Per esempio, in ([1960], p. 67), Fulvia Skof scrisse: *Nel ..."Sopra gli assiomi aritmetici"... viene stabilito un sistema di postulati, che dal punto di vista logico semplifica la teoria del Peano: infatti, non solo risultano ridotti il numero dei concetti primitivi e dei postulati, ma viene sostituito al principio di induzione, che figura fra i postulati del Peano, un postulato esistenziale più semplice e di uso più facile.*

([94]) Cfr. Pieri [1906d], *Opere*, p. 432. Marchisotto, Rodríquez-Consuegra e Smith [in corso di stampa] illustrerà l'impatto di Pieri sull'evoluzione della metamatematica.

Ringraziamenti: Questo progetto di ricerca è stato finanziato dall'"Office of Research and Sponsored Projects" della California State University, Northrige, e il finanziamento è stato successivamente rinnovato. Esprimo la mia gratitudine a Francesco Campetti, Salvatore Coen, Livia Giacardi, Mack Johnson, Steven L. Kleiman, Clara Silvia Roero, e James T. Smith per il loro supporto. Ringrazio Erika Luciano per la traduzione di questo articolo in italiano e anche Michael Cole e Yen Duong per la realizzazione delle figure. Sono riconoscente a Claudio Citrini e agli anonimi recensori per i loro commenti e per i loro suggerimenti. Come sempre, sono profondamente grata alle famiglie Campetti per avermi aperto le loro case e i loro cuori e per aver condiviso con me la loro storia famigliare.

BIBLIOGRAFIA [95]

G. ARRIGHI (a cura di). 1997. *Lettere a Mario Pieri* (*1884-1913*). Quaderni P.RI.ST.EM 6 per l'Archivio della corrispondenza dei matematici Italiani. Milano: ELEUSI, Sezione P.RI.ST.EM.

F. ARZARELLO, M. BOSCH, J. GASCÓN e C. SABENA. 2008. The ostensive dimension through the lenses of two didactic approaches. ZMD *40*(2), May: 179-188.

M. AVELLONE, A. BRIGAGLIA, C. ZAPPULLA. 2002. The Foundations of Projective Geometry in Italy from De Paolis to Pieri. *Archive for the history of exact sciences 56*: 363-425.

G.A. BLISS. 1923. The reduction of singularities of plane curves by birational transformation. *Bulletin of the American Mathematical Society 29*(4): 161-183.

G. BOFFI. 1986. On some trends in the Italian geometric school in the second half of the 19th century. *Rivista di Storia della Scienze 3*(1): 103-112.

M. BORGA e D. PALLADINO. 1992. Logic and foundations of mathematics in Peano's school. *Modern Logic 3*: 18-44.

U. BOTTAZZINI, A. CONTE e P. GARIO (a cura di). 1996. *Riposte Armonie: Lettere di Federigo Enriques a Guido Castelnuovo.* Torino: Bollati Boringhieri Editore.

A. BRIGAGLIA e C. CILBERTO. 1995. Italian Algebraic Geometry between the Two World Wars. *Queen's Papers in Pure and Applied Mathematics, 100*. Queen's University, Kingston, Ontario. Tradotto da J. Duflot.

(95) Per comodità del lettore si indicano, ove possibile, anche i siti internet dove si possono trovare alcune delle opere citate.

A. BRIGAGLIA e G. MASOTTO. 1982. *Il circolo matematico di Palermo*. Bari: Dedalo.

C. BURALI-FORTI e R. MARCOLONGO. 1912. *Elementi di calcolo vettoriale con numerose applicazioni alla geometria, alla meccanica e alla fisica-matematica*. Bologna: Nicola Zanichelli.

U. CASSINA. 1961. Nel centenario della nascita del matematico Lucchese Mario Pieri. *Atti dell'Accademia Lucchese di Scienze, Lettere ed Arti* (serie 2) *11*: 189-208.

G. CASTELNUOVO. 1913. Mario Pieri. *Bollettino della "Mathesis" Società Italiana di Matematica 5*: 40-41.

S. CATANIA. 1904. *Aritmetica razionale per le scuole secondarie superiori*. Catania: N. Giannelli Editore. Recensito in Pieri [1905d].

J.L. COOLIDGE. 1900. A purely geometric representation of all points in the projective plane. *Transactions of the American Mathematical Society 1*: 182-192.

H.S.M. COXETER. 1971. Inversive geometry. *Educational Studies in Mathematics 3*: 310-321.

A. FAIFOFER. 1886. *Elementi di Geometria.* Venezia: Tipografia Emiliana.

G. FANO. 1892. Sui postulati fondamentali della geometria proiettiva in uno spazio lineare a un numero qualunque di dimensioni. *Giornale di Matematiche 30*: 106-132.

N. FAVA. 1922. *Elogio funebre del Prof. Mario Pieri letto nella Chiesa di S. Andrea di Compito, il giorno 20 Aprile 1922.* Sant'Andrea di Compito, Toscana, Italia, pubblicazione privata.

N. FAVA. 2006. *Geometria e numeri. Storia, teoria elementare ed applicazioni del calcolo geometrico*. Torino: Bollati Boringhieri.

N. FAVA e P. GRAZIANI. 2008. La sfera come nozione basilare per la Geometria elementare. *Lettera matematica 68* P.RI.ST.EM, Luglio: 31-38.

W. FULTON. 1984. *Intersection theory*. New York: Springer-Verlag.

L. GIACARDI. 2001. Corrado Segre maestro a Torino. La nascita della scuola italiana di geometria algebrica. *Ann. Storia Univ. Italiane 5,* Maggio: 139-163.

L. GIACARDI (a cura di). 2006. *Da Casati a Gentile. Momenti di storia dell'insegnamento secondario della matematica in Italia.* Lugano: Agorà.

G. GIAMBELLI. 1902. Risoluzione del problema degli spazi secanti. *Mem. R. Accad. Sci. Torino 52*(2): 171-211.

G. GIAMBELLI. 1913. Mario Pieri. *Bollettino di matematica 12*: 291-293.

R. GRUSZCZYŃSKI e A. PIETRUSZCZAK [2007]. Pieri's Structures. *Fundamenta Informaticae 81*(1-3): 139-154.

D. HILBERT. 1899 (1971). *Foundations of Geometry* (*Grundlagen der Geometrie*). Seconda edizione. Tradotta da L. Unger a partire dalla decima edizione tedesca. Rivista e ampliata da P. Bernays. LaSalle, Illinois: Open Court.

A.J. HOFFMAN. 1951. On the foundations of inversion geometry. *Transactions of the American Mathematical Society 71*: 218-242.

B. HUBER, F. SOTTILE e B. STURMFELS. 1998. Numerical Schubert calculus. *Journal of Symbolic Computation 26*: 767-788.

B. HUBER e J. VERSCHELDE. 2000. Pieri homotopies for problems in enumerative geometry applied to pole placement in linear systems control. *SIAM Journal on Control and Optimization 38*: 1265-1287.

H. KENNEDY. 1970-1974. Cesare Burali-Forti, Alessandro Padoa, Mario Pieri. In *Dictionary of Scientific Biography* a cura di Charles C. Gillispie, volume *2*: 593-594; volume *10*: 274, 605-606. NewYork: Charles Scribner's Sons.

E. KASNER. 1905. The present problems of geometry. *Bulletin of the American Mathematical Society 11*: 283-315.

F. KLEIN. 1872. *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*. Erlangen: Andreas Deichert. Internet: Michigan. Ristampato con aggiunte e integrazioni in *Mathematische Annalen 43*(1893): 63-100.

F. KLEIN. 1893. A comparative review of recent researches in geometry (traduzione inglese a cura di M. W. Haskell dell'articolo di Klein [1872]). *Bulletin of the New York Mathematical Society 2*: 215-49.

S.L. KLEIMAN. 1976. Problem 15, Rigorous foundation of Schubert's enumerative calculus. *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics 28*: 445-482.

S.L. KLEIMAN. 1985. Recensioni (*Intersection theory,* by William Fulton, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 3. Folge Band 2, Springer-Verlag, 1984 e *Introduction to intersection theory in algebraic geometry,* by William Fulton, Regional Conference Series in Mathematics, volume *54*, American Mathematical Society, 1984) *Bulletin (new series) of the American Mathematical Society 12* (1), Gennaio: 137-143.

B. LEVI. 1913. Mario Pieri. *Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche 15*: 65-74.

B. LEVI. 1914. Mario Pieri. *Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche* (Errata) *16*: 32.

E. LUCIANO. 2006. Aritmetica e storia nei libri di testo della Scuola di Peano. In Giacardi [2006]: 269-303.

E. LUCIANO. 2010. *Mathematics Textbooks for Schools (1898-1939): The cultural proposal of the School of Giuseppe Peano*. Poster presentato alla 6th European Summer University on the history and epistemology in mathematics education, Vienna, 19-23.7.2010, on line all'indirizzo http://www.peano2008.unito.it e in corso di stampa nel volume di *Proceedings* del Congresso.

E. LUCIANO. 2011. *Mario Pieri e la Scuola di Giuseppe Peano*, Atti della giornata su *L'opera scientifica di Mario Pieri (1860-1913) a 150 anni dalla nascita*, 4 marzo 2010, Torino, Dipartimento di Matematica Giuseppe Peano, Centro di Studi per la Storia dell'Università di Torino, Studi e Fonti, Torino, Dep. Sub. Storia Patria, 2011, 15 pp., accettato per la pubblicazione.

E. LUCIANO e C.S. ROERO. 2010. *La Scuola di Peano*, in Roero [2010], profilo biografico di *Mario Pieri* alle pp. 6-16 e on line sul sito web http://www.peano2008.unito.it/scuola.php

E.A. MARCHISOTTO. 1992. Lines without order. *The American Mathematical Monthly 99*: 738-745. Internet: JSTOR.

E.A. MARCHISOTTO. 1995. In the shadow of giants: The work of Mario Pieri in the foundations of mathematics. *History and Philosophy of Logic 16*: 107-119. Internet: Informaworld.

E.A. MARCHISOTTO. 2006. The projective geometry of Mario Pieri: A legacy of Georg Karl Christian von Staudt. *Historia Mathematica 33*: 277-314. Internet: Science Direct.

E.A. MARCHISOTTO. 2011. Foundations of Geometry in the School of Peano. In Skof [2011]: 157-168.

E.A. MARCHISOTTO e J.T. SMITH. 2007. *The Legacy of Mario Pieri in Geometry and Arithmetic.* Boston: Birkhäuser.

E.A. MARCHISOTTO. In corso di stampa. *The Legacy of Mario Pieri in Differential and Algebraic Geometry*. Boston: Birkhäuser.

E.A. MARCHISOTTO, F. RODRÍQUEZ-CONSUEGRA e J.T. SMITH. In corso di stampa. *The Legacy of Mario Pieri on the Foundations and Philosophy of Mathematics*. Boston: Birkhäuser.

G. MARTIN. 1975. *The Foundations of Geometry and the non-Euclidean Plane*. New York: Springer-Verlag.

F. MEYER e H. MOHRMANN (a cura di). 1907-1934. *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen. 3*: *Geometrie*. Leipzig: B. G. Teubner. Internet: Göttingen.

J. MITTELSTRASS et al. (a cura di). 1980-1996. *Enzyklopädie Philosophie und Wissenschaftstheorie*. Quattro volumi. Mannheim, Stuttgart: Bibliographisches Institut, Verlag J. B. Metzler.

A.F. MÖBIUS. 1855. Theorie der Kreisverwandtschaft in rein geometrischer Darstellung. *Abhandlungen der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften Math.-Phys*. Kl. 2: 529-595. Internet: Google.

J. MOLK e F. MEYER (a cura di). 1904-1909 (1992). *Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées*. Tomo 1: *Arithmétique et algèbre,* volume *1*: *Arithmétique*. Paris: Éditions Jacques Gabay. Originariamente pubblicata da Gauthier-Villars.

P. NABONNAND. 2008. La théorie des Würfe de von Staudt - Une irruption de l'algèbre dans la géométrie pure. *Archive for History of Exact Sciences 62*: 201-242.

A. PADOA. 1902. Théorie des nombres entiers absolus (remarques et modifications au *Formulaire*). *Revue de mathématiques (Rivista di matematica) 8*: 45-54. Riprodotto in Roero [2003].

V. PAMBUCCIAN. 2005. Remarks, du côté de chez Tarski, on symmetric ternary relations. *Journal of Geometry 84* (1-2): 94-99.

V. PAMBUCCIAN. 2009. Universal-existential axiom systems for geometries expressed with Pieri's isosceles triangle as single primitive notion. *Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino 67* (3): 327-339.

G. PEANO. 1889. *I principii di geometria logicamente esposti*. Torino: Fratelli Bocca Editore. Internet: Michigan. Riedito in Peano [1957-1959], volume *2*: 56-91. Riprodotto in Peano [2002] come file 1889d.pdf

G. PEANO. 1889a. *Arithmetices Principia, Nova Methodo Exposita*, Turin: Fratres Bocca, Riedito in Peano [1957-1959], volume *2*: 20-55. Riprodotto in Peano [2002] come file 1889a.pdf

G. PEANO. 1891. Sul concetto di numero. *Rivista di matematica 1*: 87-102, 256-267. Riedito in Peano [1957-1959], volume *3*: 80-109. Riprodotto in Peano [2002] come file 1891i.pdf e 1891o.pdf, e in Roero [2003].

G. PEANO. 1894. Sui fondamenti della Geometria. *Rivista di matematica 4*: 51-90. Riprodotto in Peano [1957-1959], volume *3*, 115-157 e in Peano [2002] come file 1894c.pdf, e in Roero [2003].

G. PEANO. 1902. *Aritmetica generale e algebra elementare.* Turin: G. G. Paravia e C.

G. PEANO. 1913. Mario Pieri. *Academia pro Interlingua: Discussiones 4*: 31-34. Riprodotto in Peano [2002] come file 1913f.pdf, e in Roero [2003].

G. PEANO. 1915. Importanza dei simboli in matematica. *Scientia* (*Rivista di scienza*) *18*: 165-173. Ristampato in Peano [1957-1959], volume *3*, 389-396, e riprodotto in Peano [2002] come file 1915j.pdf

G. PEANO. 1916 (2002). Pubblicazioni di Giuseppe Peano. Nota inedita. Riprodotta in Peano 2002 come file 1916e.pdf

G. PEANO. 1957-1959. *Opere scelte*, volume *1*, *Analisi matematica-calcolo numerico*; volume *2*, *Logica matematica-Interlingua ed algebra della grammatica*; volume *3*, *Geometria e fondamenti-meccanica razionale-varie*. Roma: Edizioni Cremonese.

G. PEANO. 2002. *L'opera omnia di Giuseppe Peano*. A cura di Clara S. Roero. Torino: Dipartimento di Matematica, Università di Torino. CD-ROM.

B. PETKANTSCHIN. 1940. Axiomatischer Aufbau der zweidimensionalen Möbiusschen Geometrie, *Annuaire de Université Sofia I. Faculté Physico-Mathématique*, livre 1. volume *36*: 219-325.

M. PIERI ([96]). 1886a. Intorno ad un teorema dei sigg. Betti e Weingarten. *Giornale di matematiche 24:* 290-308.

M. PIERI. 1887a. Intorno alle superficie elicoidali. *Giornale della Società di Letture e Conversazioni Scientifiche di Genova*: 1-15.

M. PIERI. 1888. Sopra un teorema di geometria ad *n* dimensioni. *Giornale di matematiche 26*: 251-254.

M. PIERI. (curatela e traduzione). 1889a. *Geometria di posizione*, di G. K. C. von Staudt. Preceduta da uno studio sulla vita e le opere di Staudt a cura di C. Segre. Biblioteca matematica, *4*. Torino:Fratelli Bocca Editori.

([96]) La numerazione delle pubblicazioni di Pieri segue quella di Marchisotto e Smith [2007].

M. PIERI. 1890b. Sulla geometria projettiva delle forme di 4a specie. *Giornale di matematiche 28*: 209-218.

M. PIERI. 1891c. *Geometria proiettiva: Lezioni per gli allievi nella Reale Accademia Militare di Torino*. Torino: Tipografia Candeletti.

M. PIERI. 1893d. Sul problema degli spazi secanti. Nota 1. *Rendiconti del Reale Istituto Lombardo 26*(2): 534-546.

M. PIERI. 1893 (1914). Di due proprietà caratteristiche per superficie elicoidali. *Periodico di matematica per l'insegnamento secondario* (serie 3) *11*: 229-233.

M. PIERI. 1894b. Recensione di Thomae [1894]. *Rivista di matematica 4*: 36-39. Riprodotto in Roero [2003].

M. PIERI. 1894d. Trasformazione di ogni curva algebrica in altra priva di punti multipli. *Rivista di matematica 4*: 40-42. Riprodotto in Roero [2003].

M. PIERI. 1895c. Sulle trasformazioni razionali dello spazio che individuano complessi di tangenti. *Giornale di matematiche 33*: 167-178.

M. PIERI. 1897b. Intermezzo, *Periodico di matematica per l'insegnamento secondario* (serie 3) *12*: 151-153.

M. PIERI. 1897d. Sull'ordine della varietà generata di più sistemi lineari omografici. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo 11*: 58-63. Ristampato in Pieri [1980]: 91-100.

M. PIERI. 1898b. Nuovo modo di svolgere deduttivamente la geometria projettiva. *Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere: Rendiconti* (serie 2) *31*: 780-798. Ristampato in Pieri [1980]: 163-182.

M. PIERI. 1898c. I principii della geometria di posizione composti in sistema logico deduttivo. *Memorie della Reale Accademia delle Scienze di Torino* (serie 2) *48*: 1-62. Ristampato in Pieri [1980]: 101-162. Traduzione inglese ed analisi in Marchisotto e Smith [2007].

M. PIERI. 1900a. Della geometria elementare come sistema ipotetico deduttivo: Monografia del punto e del moto. *Memorie della Reale Accademia delle Scienze di Torino* (serie 2) *49*: 173- 222. Ristampato in Pieri [1980]: 183-234. Traduzione inglese ed analisi in Marchisotto, Rodríguez-Consuegra e Smith [in corso di stampa].

M. PIERI. 1903c. Recensione di G. Peano *Aritmetica generale e algebra elementare* [1902]. *Periodico di matematica per l'insegnamento secondario* (serie 2) *5*: 203-295.

M. PIERI. 1905c. Nuovi principii di geometria projettiva complessa. *Memorie della Reale Accademia delle Scienze di Torino* (serie 2) *55*: 189-235. Ristampato in Pieri [1980]: 309-356.

M. PIERI. 1905d. Recensione di S. Catania - Aritmetica razionale per le scuole secondarie superiori [1904]. *Periodico di matematica per l'insegnamento secondario* (serie 3) *2*: 47-48.

M. PIERI. 1906d. Uno sguardo al nuovo indirizzo logico-matematico delle scienze deduttive: Discorso per l'inaugurazione dell'anno accademico 1906-1907 nella

Reale Università di Catania. *Annuario della Reale Università di Catania* 1906-1907: 21-82. Ristampato in Pieri [1980]: 389-448.

M. PIERI. 1906f. Sulla definizione Staudtiana dell'omografia tra forme semplici reali. *Periodico di matematica per l'insegnamento secondario* (serie 3) *3*: 1-5.

M. PIERI. 1906g. Sur la compatibilité des axiomes de l'arithmétique. *Revue de métaphysique et de morale 13*: 196-207. Ristampato in Pieri [1980]: 377-388.

M. PIERI. 1907a. Sopra gli assiomi aritmetici. *Bollettino delle sedute della Accademia Gioenia di Scienze Naturali in Catania* (series 2) *1-2* (1907-1908): 26-30. Ristampato in Pieri [1980]: 449-454. Traduzione inglese ed analisi in Marchisotto e Smith [2007].

M. PIERI. 1908a. La Geometria Elementare istituita sulle nozioni di "punto" e "sfera." *Memorie di matematica e di fisica della Società Italiana delle Scienze* (serie 3) *15*: 345-450. Ristampato in Pieri [1980]: 455-560. Traduzione inglese ed analisi in Marchisotto e Smith [2007].

M. PIERI. 1910. *Lezioni di geometria proiettiva*. A cura di Mario Camivi. Parma: Litografo Anghinetti e Giaroli. Litografie manoscritte delle lezioni tenute all'Università di Parma nell'anno accademico 1909-1910.

M. PIERI. 1911c. *Lezioni di geometria proiettiva.* A cura di L. Ponzi e A. Soncini. Parma: Università di Parma. Litografie dei corsi per l'anno accademico 1910-1911.

M. PIERI. 1911d. Nuovi principii di geometria delle inversioni: Memoria I. *Giornale di matematiche 49*: 49-98. Ristampato in Pieri [1980]: 561-608.

M. PIERI. 1912b. Notes géométriques. In Burali-Forti e Marcolongo [1912]: 156-168.

M. PIERI. 1912c. Nuovi principii di geometria delle inversioni: Memoria II. *Giornale di matematiche* 50: 106-140. Ristampato in Pieri [1980]: 609-643.

M. PIERI. 1912d. Sui sistemi ∞^1 di superficie. *Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino 48* (1912-1913): 132-149.

M. PIERI. 1912e. Sulla rappresentazione vettoriale delle congruenze di raggi. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo 33*: 217-246.

M. PIERI. 1914. Di due proprietà caratteristiche per superficie elicoidali. *Periodico di matematica per l'insegnamento secondario* (serie 3)*11*: 229-233. Questo lavoro fu inizialmente pubblicato in forma di opuscolo nel 1893 (Lucca: Tipografia Giusta).

M. PIERI. (curatela e traduzione). 1915. (1991). Méthodes énumeratives, by H. G. Zeuthen. In Molk e Meyer [1911-1915] 1991 (fascicule 2): 260-331. Traduzione e revisione di Zeuthen [1905]. Internet: Gallica.

M. PIERI. 1980. *Opere di Mario Pieri sui fondamenti della matematica*. Edizioni Cremonese, Bologna. A cura dell'Unione Matematica Italiana con il contributo del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

Poggendorffs Biographisch-literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exacten Wissenschaften, J.C. 1904-1926. Pieri, Mario, volume *4*, a cura di Arthur von Oettingen, 1164-1165. Leipzig: Verlag von Johann Ambrosius Barth, 1904; volume *5*, a cura di Paul Weinmeister, 975-956, Leipzig: Verlag Chemies, 1926.

A. RAMORINO. 1897. Gli elementi immaginari nella geometria: monografia storica. Giornale di matematiche di Battaglini per il progresso degli studi nelle università Italiane *35*: 242-258, *36*: 317-345. Internet: Google.

S. RINDI. 1913 (1919). Notizie intorno al defunto socio corrispondente Prof. Mario Pieri. *Atti della Reale Accademia Lucchese di Scienze, Lettere ed Arti 35*: 435-459.

C.S. ROERO (a cura di). 2003. *Le riviste di Giuseppe Peano.* CD-ROM. N. 4. Torino, Dipartimento di Matematica. English Version, Torino, 2008.

C.S. ROERO (a cura di). 2010, *Peano e la sua Scuola fra matematica, logica e interlingua. Atti del Congresso internazionale di Studi* (Torino 6-7 ott. 2008), Centro di Studi per la Storia dell'Università di Torino, Studi e Fonti XVI, Torino, Dep. Sub. Storia Patria, 2010.

C.S. ROERO, N. NERVO e T. ARMANO (a cura di). 2002. *L'Archivio Giuseppe Peano*. CDROM N. 2. Torino, Dipartimento di Matematica. English Version, Torino, 2008.

B. RUSSELL. 1903. *The Principles of Mathematics.* Cambridge, Eng.: Cambridge University Press.

H. SCHUBERT. 1879. *Kalkül der abzählenden Geometrie.* Leipzig: Teubner. Internet: University of Michigan.

C. SEGRE, 1886. Le coppie di elementi immaginari nella geometria proiettiva sintetica, *Memorie Acc. Sci. Torino* (2) *38*: 3-24.

C. SEGRE. 1889-90. Un nuovo campo di ricerche geometriche (4 note). *Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino 25*: 208-9; 276-301, 592-612; *26*: 35-71.

F. SKOF. 1960. Sull'opera scientifica di Mario Pieri. *Bollettino della Unione Matematica Italiana* (serie 3) *15*: 63-68.

F. SKOF (a cura di). 2011. *Giuseppe Peano between mathematics and logic.* Milano: Springer-Verlag.

J.T. SMITH. 2010. Definitions and nondefinability in geometry. *American Mathematical Monthly 117*: 475-489.

G.K.C. VON STAUDT. 1847. *Geometrie der Lage*. Nürnberg: Verlag der Fr. Korn'schen Buchhandlung. Internet: Cornell. Pieri [1889a] è una traduzione annotata di questo lavoro.

G.K.C. VON STAUDT. 1856-1860. *Beiträge zur Geometrie der Lage*. Tre volumi, con paginazione consecutiva. Nürnberg: Verlag der Fr. Korn'schen Buchhandlung. Internet: Cornell.

L. TARTUFARI. 1913. Parole del Rettore nella solenne inaugurazione dell'anno accademico 1913-1914 (24 Novembre 1913). In *Annuario della Reale Università di Parma*. 1908-1914: vi-xvi.

A. TARSKI. [1948] 1957. *A Decision Method for Elementary Algebra and Geometry*. Report R-109. Predisposto per la pubblicazione da J. C. C. McKinsey. Seconda edizione. Santa Monica, California: RAND Corporation.

R. TAZZIOLI. 1999. La matematica all'Università di Catania dall'Unità alla riforma Gentile. *Annali di storia delle università italiane 3*: 207-224.

C. THIEL. 1995. Mario Pieri. In Mittelstrass et al. [1980-1996], volume *3*: 249.
J. THOMAE. 1894. *Die Kegelschnitte in rein projektiver Behandlung*. Halle: Verlag von Louis Nebert. Internet: Michigan. Recensito in Pieri [1894b].
B.L. VAN DER WAERDEN e L.J. SMID. 1935. Eine Axiomatik der Kreisgeometrie und der Laguerregeometrie. *Mathematische Annalen 110*: 753-776.
J.W. YOUNG. 1909. The geometry of chains on a complex line. *The Annals of Mathematics*, Seconda Serie, *11*(1): 33-48.
G. VERONESE. 1891. *Fondamenti di geometria a più dimensioni e più specie di unità rettilinee, esposti in forma elementare*. Edizioni per la Scuola di Magistero in matematica. Tipografia del Seminario, Padova. Internet: Cornell University.
M. VILLA. 1971. A Logical Approach to the Teaching of Geometry at the Secondary Level. *Educational Studies in Mathematics. 4*(1): 111-134. Internet: JSTOR.
H.G. ZEUTHEN. 1905. Abzählende Methoden. In Meyer e Mohrmann [1907-1934], volume 3, parte 2_1: 257-312.

Elena Anne Corie Marchisotto
Department of Mathematics, California State University, Northridge
e-mail: elena.marchisotto@csun.edu