La Matematica nella Società e nella Cultura

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Paola Toto

Overlap algebre a più valori

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **3** (2010), n.1 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 87–90.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2010_1_3_1_87_0>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2010.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. III, Aprile 2010, 87-90

Overlap algebre a più valori

PAOLA TOTO

1. – Introduzione

Giovanni Sambin, nel suo libro [1] di prossima uscita, introduce una nuova teoria topologica, detta "The Basic Picture" in cui generalizza sia la nozione di spazio topologico sia la sua versione senza punti. Inoltre, egli introduce il concetto di overlap algebra, al fine di tradurre in forma algebrica le proprietà necessarie a definire queste nuove strutture topologiche. L'unica restrizione che si è messa rispetto a [1], è stata quella di considerare solo strutture che fossero basate su un insieme, visto che in questo contesto si ha solo un tipo di proposizione, cioè quello delle proposizioni piccole/proprie e non le proposizioni generiche chiuse per quantificazioni su collezioni (si veda [2]), come nel caso della fondazione predicativa della teoria degli insiemi usata da Sambin. L'obiettivo finale del lavoro di questa tesi è stato quello di generalizzare queste nozioni topologiche nel contesto degli insiemi a più valori. Nella teoria degli insiemi valutati, gli insiemi sono costruiti usando proposizioni valutate su una struttura algebrica fissata. Lavorando in ambito costruttivo, si è considerata come teoria degli insiemi a più valori, quella basata su un modello della logica intuizionista data da un'algebra di Heyting completa, dove le sorti sono insiemi predicativi con un'uguaglianza valutata, che siano chiusi per prodotti. Per raggiungere l'obiettivo prefissato, un passo fondamentale è stato quello di controllare quanto l'originaria algebrizzazione della nozione topologica di G. Sambin possa anche essere considerata come l'algebrizzazione della sua versione a più valori, cercando di fornire una versione valutata del teorema di rappresentazione costruttivo fornito da Sambin in [1], analogo a quello di Tarski sulle algebre di Boole complete atomiche. In questo lavoro si è provato che questo accade se e solo se si considera come sottostante struttura dei valori di verità un'overlap algebra.

2. – Nozioni preliminari

La struttura algebrica attorno cui ruota la definizione di questa nuova teoria topologica ideata da Giovanni Sambin, in [1], prende il nome di overlap algebra. Classicamente, la nozione di overlap algebra coincide con quella di algebra di Boole completa. Questa struttura permette quindi di rendere in forma algebrica tutte le proprietà della struttura algebrica della collezione potenza di un insieme X (1) necessarie per far topologia e topologia senza punti in modo costruttivo, e questo sicuramente in modo più espressivo di quanto possa fare un'algebra di Heyting completa.

DEFINIZIONE 1. – *Un'*overlap algebra *è una terna* $(\mathcal{P}, \leq, \between)$, *dove* $(\mathcal{P}, \leq)$ *è un reticolo completo e* $\between$ *è una relazione binaria in* $\mathcal{P}$ *che soddisfa le seguenti proprietà:*

- $p \between q \;\Rightarrow\; q \between p$ *(simmetria)*
- $p \between q \;\Rightarrow\; p \between (p \wedge q)$ *(chiusura per inf)*
- $p \between \bigvee_{i \in I} q_i \iff (\exists i \in I)(p \between q_i)$ *(spezza le unioni arbitrarie)*
- $(\forall r \in \mathcal{P})(r \between p \;\Rightarrow\; r \between q) \Longrightarrow p \leq q$ *(densità)*

(per ogni p *e* q *in* $\mathcal{P}$*).*

In altre parole la relazione di overlap tra due elementi di un reticolo completo traduce in modo positivo l'idea che il loro inf sia diverso dall'elemento minimo del reticolo. E questo lo si comprende meglio, se si considera come esempio principe di overlap algebra $(\mathcal{P}(X), \subseteq, \between)$ (2), dove la relazione di overlap tra due sottoinsiemi A, B di un dato insieme X è definita come $A \between B \overset{def}{\iff} (\exists x \in X)(x \in A \cap B)$.

DEFINIZIONE 2. – *Un morfismo da un'overlap algebra* $(\mathcal{P}, \leq, \between)$ *in un'overlap algebra* $(\mathcal{Q}, \leq, \between)$ *è un'applicazione* $f : \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ *per cui esistono* $f^-, f^* : \mathcal{Q} \to \mathcal{P}$ *e* $f^{-*} : \mathcal{P} \to \mathcal{Q}$ *che soddisfano le seguenti condizioni:*

1. $f(p) \leq q \iff p \leq f^*(q)$ $(f \dashv f^*)$
2. $f^-(q) \leq p \iff q \leq f^{-*}(p)$ $(f^- \dashv f^{-*})$
3. $f(p) \between q \iff p \between f^-(q)$ $(f \cdot\!|\!\cdot f^-)$

(per ogni $p \in \mathcal{P}$ *e* $q \in \mathcal{Q}$*).*

Le condizioni 1. e 2. esprimono il fatto che un morfismo di overlap algebre è associato ad una coppia di aggiunzioni tali che gli aggiunti sinistri siano legati dall'ulteriore condizione (3.), detta simmetria fondamentale. Si può così definire la categoria delle overlap algebre, **OA**.

In [1], viene fornito un teorema di rappresentazione costruttivo analogo a quello classico di Tarski sulle algebre di Boole complete: ogni overlap algebra atomistica (3) è isomorfa alla collezione potenza dell'insieme dei suoi atomi. Tale teorema di rap-

(1) Ricordiamo che si parla di collezione potenza e non di insieme potenza di un insieme X, indicato con $\mathcal{P}(X)$, perché nella fondazione set-teorica usata qui ([2]), $\mathcal{P}(X)$ è una collezione propria.

(2) L'ordine è dato dal contenuto.

(3) La nozione di atomo è data in maniera positiva usando la relazione di overlap.

prensentazione, si può dare in forma categoriale, ricorrendo al seguente diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Rel} \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathbf{OA} \\
& \mathbf{a\text{-}OA} \arrow[ur, hook] &
\end{tikzcd}$$

che esprime il fatto che il funtore potenza $\mathcal{P}:\mathbf{Rel}\to\mathbf{OA}$, che associa ad ogni insieme X l'overlap algebra $(\mathcal{P}(X),\subseteq,\between)$, è fedele e pieno sulla categoria delle overlap algebre **OA** e denso sulla sua sottocategoria **a-OA** delle overlap algebre atomiche. In questa tesi, studiando il collegamento tra i morfismi tra overlap algebre e alcune relazioni tra insiemi (quelle che in [1] vengono chiamate relazioni continue), si è contribuito a semplificare la nozione di morfismo tra overlap algebre che siano basate su un insieme.

3. – Dalla teoria degli insiemi a quella degli insiemi valutati

Nel valutare il diagramma precedente, si è ricorso ad una definizione di un modello a più valori che permettesse di valutare tutta la logica intuizionista a più sorti usata per sviluppare tutte le nozioni della Basic Picture. Per fare questo lavoro di traduzione delle nozioni algebriche usate in [1] nella teoria degli insiemi a più valori, si è usata l'interpretazione di Troelstra ([3]). Inoltre, siccome le nozioni principali sui reticoli valutati date da [4] sono impredicative, in questo lavoro se ne è data una definizione predicativa. L'idea principale che permette di passare dalla teoria degli insiemi a quella degli insiemi valutati su un'algebra di Heyting completa $\mathcal{H}$ è quella di valutare le proposizioni su $\mathcal{H}$. Pertanto un insieme valutato sarà una coppia costituita dall'insieme stesso e da una relazione di uguaglianza valutata su $\mathcal{H}$. In modo naturale, un sottoinsieme di un dato insieme $\mathcal{H}$-valutato sarà una proposizione valutata su $\mathcal{H}$, cioè un sottoinsieme di un insieme $\mathcal{H}$-valutato X, è definito come funzione caratteristica valutata $X\to\mathcal{H}$ che rispetta l'uguaglianza valutata.

Grazie a tale traduzione si è potuto valutare il precedente diagramma commutativo e quindi sia fornire l'analogo valutato del teorema costruttivo di rappresentazione di Sambin sia concludere che l'algebrizzazione da lui data in [1] è indipendente dall'interpretazione della sottostante logica intuizionista.

TEOREMA 1 [Teorema Principale]. – *Il funtore potenza valutato su un'algebra di Heyting completa $\mathcal{H}$ è fedele e pieno sulla categoria delle overlap algebre $\mathcal{H}$-valutate* $\mathbf{OA}(\mathcal{H})$ *e denso sulla sua sottocategoria delle overlap algebre atomiche $\mathcal{H}$-valutate.*

Da questo teorema si ricava che, come nella teoria degli insiemi la collezione potenza di un insieme X, $\mathcal{P}(X)$, è un esempio di overlap algebra, allo stesso modo la collezione potenza degli insiemi $\mathcal{H}$-valutati, indicata con $\mathcal{P}_{\mathcal{H}}(X)$, è un esempio di overlap algebra $\mathcal{H}$-valutata. Nella tesi è stato notato che $\mathcal{P}_{\mathcal{H}}(X)$ è contemporaneamente sia un esempio di overlap algebra $\mathcal{H}$-valutata e sia di overlap algebra se e solo se l'algebra dei valori di verità $\mathcal{H}$ è già essa stessa in partenza una overlap algebra. E questo risultato non è sorprendente: perché essendo $\mathcal{P}(X)$ classicamente un'algebra di Boole completa ed essendo $\mathcal{H}$ isomorfa a $\mathcal{P}_{\mathcal{H}}(\mathbb{1})$, si ha che, in particolare, $\mathcal{P}_{\mathcal{H}}(\mathbb{1})$ è un'algebra di Boole completa se e solo lo è $\mathcal{H}$.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. Sambin, *The Basic Picture: Structures for Constructive Topology*, Oxford University Press (to appear).
[2] M. E. Maietti, *A minimalist two-level foundation for constructive mathematics*, Annals of Pure and Applied Logic, **160** (3) (2009), 319-354.
[3] A. S. Troelstra, e D. Van Dalen, *Constructivism in Mathematics. An introduction*, Studies in logic and the foundations of mathematics, North Holland, 1988.
[4] H. Zhao, e D. Zhang, *Many valued lattices and their representations*, Fuzzy Sets and Systems **159** (1) (2008), 81-94.

Dipartimento di Matematica "Ennio De Giorgi", Università del Salento
e-mail: paola.toto@unile.it
Dottorato di ricerca in Matematica,
con sede presso l'Università del Salento – Ciclo XX
Direttore di ricerca: Prof. Giorgio Metafune, Relatore: Prof. Cosimo Guido,
Dipartimento di Matematica "Ennio De Giorgi" - Università del Salento
Co-relatori: Prof. Giovanni Sambin e Dott.sa Maria Emilia Maietti
Dipartimento di Matematica pura ed applicata - Università di Padova