La Matematica nella Società e nella Cultura

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Gaetano Siciliano

Alcuni problemi variazionali per equazioni di campo accoppiate con le equazioni di Maxwell

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **3** (2010), n.1 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 83–86.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2010_1_3_1_83_0>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2010.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. III, Aprile 2010, 83-86

Alcuni problemi variazionali per equazioni di campo accoppiate con le equazioni di Maxwell

GAETANO SICILIANO

Nella Tesi si è studiata l'esistenza di soluzioni per due classi di sistemi di equazioni differenziali ellittiche alle derivate parziali. Questi sistemi descrivono l'interazione di una funzione d'onda con il proprio campo elettromagnetico $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ determinato dai potenziali di gauge $\mathbf{A}$ e ϕ tramite le relazioni $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \partial_t\mathbf{A}$, $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. In particolare si sono studiate l'equazione di Schrödinger e l'equazione di Klein-Gordon.

L'interazione tra "materia" e campo elettromagnetico è ottenuta tramite la regola di accoppiamento minimale usato nelle Teorie di Gauge. Formalmente, si considera la Lagrangiana $\mathcal{L}_S$ dell'equazione di Schrödinger (o di Klein-Gordon, $\mathcal{L}_{KG}$) e si sostituiscono le derivate ordinarie con le derivate covarianti $(\partial_t + iq\phi, \nabla - iq\mathbf{A})$, dove q denota la costante (non nulla) d'accoppiamento. Infine, tenendo conto che il campo $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ è anch'esso un'incognita del problema, si giunge alla lagrangiana totale del sistema, che nel caso dell'equazione di Schrödinger ha l'espressione

$$\mathcal{L}_{SM} = \frac{1}{2}\left[i\frac{\partial\psi}{\partial t}\bar{\psi} - q\phi|\psi|^2 - |(\nabla - iq\mathbf{A})\psi|^2\right] + \frac{1}{8\pi}\left(|\nabla\phi + \partial_t\mathbf{A}|^2 - |\nabla \times \mathbf{A}|^2\right).$$

Analogamente si procede nel caso di Klein-Gordon. Le equazioni di Eulero-Lagrange di dette Lagrangiane danno origine ai sistemi che si sono studiati (si vedano i sistemi (2) e (4)).

Questi sistemi sono per natura nonlineari a causa dell'accoppiamento. Eventualmente si può anche aggiungere una nonlinearità alla Lagrangiana, $W(|\psi|)$ con opportune condizioni di crescita rispetto a $|\psi|$. Fisicamente ciò viene interpretato come autointerazione nel campo. In questa nota consideriamo la nonlinearità modello $W(|\psi|) = |\psi|^p, p > 0$.

Per affrontare questi problemi, ci si restringe a particolari classi di soluzioni, in modo che il sistema risulti semplificato. Principalmente si sono considerate "onde stazionarie", cioè soluzioni del tipo

$$(1) \qquad \psi(x,t) = u(x)e^{-i\omega t}, \quad \omega \in \mathbf{R}$$

in equilibrio con un campo puramente elettrostatico: $\mathbf{E} = -\nabla\phi(x), \mathbf{B} = \mathbf{0}$ in un dominio limitato e regolare $\Omega \subset \mathbf{R}^3$, con opportune condizioni al bordo. Pertanto le incognite dei problemi sono il campo u ed il potenziale scalare ϕ. Chiaramente siamo interessati all'esistenza di soluzioni non banali, precisamente coppie (u, ϕ) con $u \neq 0$.

Seguendo l'approccio introdotto da Benci e Fortunato ([2, 3]), le soluzioni vengono trovate come punti critici di un funzionale di classe C^1 definito su spazi di Sobolev o opportune varietà. I funzionali coinvolti sono fortemente indefiniti e, per ottenerne i punti critici, si adotta una procedura di riduzione che fa scomparire la forte indefinitezza.

I primi risultati riguardano il sistema

$$\begin{cases} -\Delta u - (q\phi - \omega)u = |u|^{p-2}u\,, \\ \Delta\phi = qu^2\,, \end{cases} \tag{2}$$

con le seguenti condizioni al bordo: $u = 0$ e $\phi = h$.

Questo problema è stato studiato in [2] nel caso $W = 0$ e $u = \phi = 0$ sul bordo, sotto il vincolo $\int_\Omega u^2 dx = 1$. Gli autori provano l'esistenza di infinite soluzioni (u_k, ϕ_k, ω_k), dove ω_k appaiono in modo naturale come moltiplicatori di Lagrange rispetto al suddetto vincolo. Tuttavia è facile vedere che lo stesso risultato vale anche in presenza di una nonlinearità con crescita bassa: $p \in (2, 10/3)$.

In realtà è possibile anche studiare il problema senza la condizione di normalizzazione $\int_\Omega u^2 dx = 1$; in questo caso ω viene visto come un parametro. I valori di p condizionano fortemente il comportamento del funzionale ed infatti otteniamo vari risultati riguardo l'esistenza di soluzioni:

1. Se $p \in (2, 3]$, otteniamo soluzioni non banali per ω più piccolo di un determinato valore.
2. Se $p \in (3, 4)$, allora risulta che l'esistenza di soluzioni dipende dal valore del parametro q.
3. Se $p \in (4, 6)$, allora si prova l'esistenza di infinite soluzioni per ogni valore del parametro ω e ogni valore di q.

Questi risultati sono ottenuti utilizzando il Teorema del Passo Montano [1], o opportune varianti che permettono di stabilire risultati di molteplicità di soluzioni.

Nel caso $W = 0$ una questione interessante è l'influenza dei dati al bordo sull'esistenza di soluzioni. Di fatto in questo caso l'insieme degli ω per cui il sistema ha soluzioni è limitato inferiormente da una quantità che dipende dal parametro q e dalla norma del dato al bordo h.

È altresì possibile studiare il problema (2) con le seguenti condizioni al bordo

$$\begin{cases} u = 0\,, \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial\mathbf{n}} = h\,, \end{cases}$$

dove $\mathbf{n}$ è la normale uscente dal bordo $\partial\Omega$. In questo caso, poiché $q \neq 0$, con un opportuno cambio di variabile, è possibile rendere il problema indipendente dalla frequenza ω, per cui cercare soluzioni stazionarie (1) è equivalente a cercare soluzioni statiche, i.e. $\psi(x,t) = u(x)$. Inoltre, se si considera il sistema ottenuto dalla seconda equazione in (2) e dalla condizione di Neumann sul potenziale ϕ,

$$\begin{cases} \Delta\phi = qu^2 & \text{in } \Omega\,, \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial\mathbf{n}} = h & \text{in } \partial\Omega\,, \end{cases} \tag{3}$$

è ben nota la condizione necessaria per l'esistenza di soluzioni:

$$\int_{\partial\Omega} h\,d\sigma = q\int_{\Omega} u^2 dx.$$

Per cui appare naturale imporre il vincolo $\int_{\Omega} u^2 dx = 1$. In questo caso la condizione di compatibilità per il sistema (3) diviene

$$\int_{\partial\Omega} h\,d\sigma = q$$

la quale non è altro che la legge di Gauss $\int_{\partial\Omega} \mathbf{E}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = -q$. Per questo problema riusciamo a provare l'esistenza di infinite soluzioni, sia nel caso $W = 0$ che nel caso $p \in (2, 10/3)$.

La ricerca di soluzioni stazionarie per il problema di Klein-Gordon-Maxwell conduce, invece, al seguente sistema

$$\begin{cases} -\Delta u - (q\phi - \omega)^2 u + m^2 u = |u|^{p-2}u\,, \\ \Delta\phi = q(q\phi - \omega)u^2 \end{cases} \tag{4}$$

che si è studiato con varie condizioni al bordo:

$$\begin{cases} u = h \\ \phi = \eta \end{cases} \qquad \text{oppure} \qquad \begin{cases} u = h \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial\mathbf{n}} = \theta\,. \end{cases}$$

Anche questo problema è più interessante quando $W = 0$. Nella tesi stabiliamo alcuni risultati di esistenza di soluzioni per piccoli valori del parametro q.

Una particolarità del problema di Klein-Gordon-Maxwell è che c'è un comportamento differente delle soluzioni nel caso limite $q = 0$ a seconda delle condizioni al bordo. Infatti con condizioni di Dirichelet l'esistenza di soluzioni non banali è continua rispetto a $q \to 0$; la continuità è invece persa con condizioni al bordo di Neumann. Inoltre si segnala che, in questo secondo caso, il funzionale associato è singolare in $u = 0$.

In presenza della nonlinearità W, con $2 < p < 6$ ed $h = 0$, è garantita l'esistenza di infinite soluzioni.

Nell'ultimo capitolo della Tesi, prendendo spunto da lavoro [4], si è studiata per il sistema Klein-Gordon-Maxwell, l'esistenza in $\mathbf{R}^2$ di soluzioni di tipo vortice, i.e.

$\psi(x,t) = u(x)e^{i(k\theta(x)-\omega t)}$, nel caso puramente magnetostatico ($\mathbf{E} = \mathbf{0}, \mathbf{A} = \mathbf{A}(x)$). Il sistema a cui si giunge è

$$\begin{cases} -\Delta u + |k\nabla\theta - q\mathbf{A}|^2 u = |u|^{p-2}u\,, \\ \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = q(k\nabla\theta - q\mathbf{A})u^2, \end{cases} \tag{5}$$

dove $\theta(x) = \operatorname{Im}\ln(x_1 + ix_2)$ e $k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$ è la vorticità. In questo caso, prima perturbiamo il problema introducendo un parametro $\varepsilon > 0$ e troviamo delle soluzioni u_ε. In secondo luogo proviamo che le soluzioni u_ε convergono ad una soluzione radiale e con divergenza nulla del problema (5).

BIBLIOGRAFIA

[1] A. Ambrosetti e P. Rabinowitz, *Dual variational methods in critical point theory and applications*, J. Funct. Anal, **14** (1973), 349-381.

[2] V. Benci e D. Fortunato, *An eigenvalue problem for the Schrödinger-Maxwell equations*, Topol. Methods Nonlinear Anal., **11** (1998), 283-293.

[3] V. Benci e D. Fortunato, *Solitary waves of the nonlinear Klein-Gordon field equation coupled with the Maxwell equations*, Rev. Math. Phys., **14** (2002), 409-420.

[4] V. Benci e D. Fortunato, *Three dimensional vortices in Abelian Gauge Theories*, Nonlinear Anal., **70** (2009), 4402-4421.

Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Bari
e-mail: siciliano@dm.uniba.it
Dottorato in Matematica con sede presso l'Università di Bari – Ciclo XXI
Direttore di Ricerca: Prof. L. Pisani, Università degli Studi di Bari