
La Matematica nella Società e nella Cultura

RIVISTA DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

PIERGIACOMO SABINO

Metodi Monte Carlo e Quasi-Monte Carlo per il pricing e l'hedging di opzioni

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. 3 (2010), n.1 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 79–82.

Unione Matematica Italiana

[<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2010_1_3_1_79_0>](http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2010_1_3_1_79_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Metodi Monte Carlo e Quasi-Monte Carlo per il pricing e l'hedging di opzioni

PIERGIACOMO SABINO

L'obiettivo principale di questa tesi di dottorato è lo studio del metodo Monte Carlo (MC) ed in particolare, dei metodi Quasi-Monte Carlo (QMC) e Randomized Quasi-Monte Carlo (RQMC) e la loro applicazione al *pricing* e l'*hedging* di opzioni esotiche *path-dependent* ad elevata dimensione (la tesi è disponibile all'indirizzo www.dm.uniba.it/dottorato/dottorato/tesi). La ricerca ha affrontato sia gli aspetti teorici sia gli aspetti numerici.

L'organizzazione della tesi di dottorato è la seguente. Nei primi due capitoli sono introdotte le nozioni preliminari e fondamentali della moderna Finanza Matematica, quali il rischio di mercato, il non-arbitraggio. Tali concetti sono inquadrati dal punto di vista matematico nell'ambito dell'Arbitrage Pricing Theory. In particolare, sono discussi i modelli markoviani-browniani di mercati completi di cui il modello multi-dimensionale di Black-Scholes (BS) è un caso particolare. La stima del *fair value* e delle *sensitivities* di contratti derivati, quali le opzioni asiatiche scritte su un paniere di sottostanti, è un problema complesso sia dal punto di vista computazionale sia dal punto di vista teorico perché non esistono formule chiuse per la loro valutazione. Si considerino $\{t_1, \dots, t_N\}$, $N \in \mathbb{N}$ una griglia di tempi e $S_j(t_i)$, $i = 1, \dots, N$, il prezzo all'istante t_i dell'azione $j = 1, \dots, M$. Il prezzo al tempo $t = 0$ di una opzione *call* asiatica su un paniere di sottostanti con prezzo di esercizio K fisso e la greca Δ_k , $k = 1, \dots, M$, sono rispettivamente:

$$a(0) = e^{r(T-t)} \mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M w_{ij} S_j(t_i) - K \right)^+ \right], \quad \Delta_k = \frac{\partial a(0)}{\partial S_k(0)},$$

dove il valore di attesa è calcolato rispetto alla misura di martingala equivalente, r rappresenta il tasso *risk-free*, T è la scadenza del contratto e $S_k(0)$ è il prezzo iniziale del k -esimo sottostante. Inoltre, è ben noto che l'utilizzo del calcolo di Malliavin e della formula di integrale per parti stocastica generalizzata permettono di ricondurre la valutazione delle greche ad una stima di valori di attesa dove i metodi MC trovano una naturale applicazione. L'interesse nella stima delle lettere greche multi-dimensionali fornisce lo spunto per il primo risultato originale della tesi: l'estensione al caso multi-dimensionale delle formule di Montero e Kohatsu-Higa [2] per opzioni asiatiche nel modello BS. L'approccio basato sul calcolo di Malliavin produce una classe di funzioni con lo stesso valore di attesa (la greca) ma con diversa varianza.

Abbiamo quindi introdotto una versione conveniente della funzione di localizzazione con lo scopo di ridurre sia il peso computazionale sia la varianza dello stimatore di tipo MC.

La seconda parte della tesi è dedicata allo studio dei metodi MC e QMC per poter stimare i prezzi e le greche delle opzioni *path-dependent* discusse precedentemente.

Sia $\mathbf{U}_1, \dots, \mathbf{U}_N$ un vettore di variabili aleatorie indipendenti ed identicamente distribuite con legge uniforme nell'ipercubo $[0, 1]^d$, $d \in \mathbb{N}^*$, ($\mathbf{U}_i \sim \mathcal{U}([0, 1]^d)$, $i = 1, \dots, N$), lo stimatore di tipo standard MC di $I = \int_{[0, 1]^d} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ è definito come:

$$\bar{I}_f = \bar{I}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(\mathbf{U}_i).$$

La legge dei grandi numeri ed il teorema del limite centrale garantiscono che lo stimatore non è distorto e che la velocità di convergenza è $O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$, indipendentemente dalla dimensione d . Inoltre, il metodo MC permette la stima di intervalli di confidenza e dell'errore (varianza campionaria) dello stimatore. L'accuratezza del metodo MC può essere incrementata tramite tecniche di riduzione della varianza, come ad esempio il Latin Hypercube Sampling (LHS). LHS è una tecnica di riduzione della varianza basata sulla stratificazione opportuna degli ipercubi ed è particolarmente efficace per funzioni additive. Tuttavia, la velocità di convergenza resta invariata.

Al contrario, il metodo QMC è basato su un approccio completamente deterministico, dove i punti aleatori sono rimpiazzati da sequenze puramente deterministiche, dette sequenze a bassa discrepanza, che stratificano opportunamente l'ipercubo $[0, 1]^d$ (è fondamentale escludere l'estremo superiore).

Una sequenza di punti $P = \{\mathbf{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset [0, 1]^d$ è detta sequenza a bassa discrepanza se la star-discrepancy $D_N^*(P)$ dei primi N elementi di P è dell'ordine $O\left(\frac{\log^d N}{N}\right)$. La disuguaglianza di Hlawka e Koksma prevede che per tutte le funzioni con variazione di Hardy-Krause, $V(f)$, limitata l'errore della stima QMC sia:

$$\left| \frac{\sum_{n=1}^N f(\mathbf{x}_n)}{N} - \int_{[0, 1]^d} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right| \leq V(f) D_N^*(P).$$

Nel caso fosse possibile calcolare la variazione di Hardy-Krause, il metodo QMC produrrebbe un *bound* analitico e una velocità di convergenza dell'ordine $O\left(\frac{\log^d N}{N}\right)$ superiore di quella del MC standard. Sfortunatamente, la stima della variazione di Hardy-Krause è potenzialmente più complessa della stima di I ed inoltre, spesso la disuguaglianza di Hlawka e Koksma fornisce un *worst-case error* troppo ampio.

Con lo scopo di superare questi problemi, abbiamo studiato recenti tecniche volte a fornire una versione aleatoria del QMC, detta appunto RQMC, che permette di generare delle sequenze a bassa discrepanza aleatorie tramite procedure dette di *scrambling*. Nel terzo capitolo abbiamo discusso ed implementato diverse sequenze a bassa discrepanza, in particolare *digital nets*, per esempio Halton, Faure e Sobol', e le loro versioni aleatorie con *scramblings* di tipo *Random Shift* e *Affine Transformation*.

Nonostante le tecniche di *scrambling* permettano di superare alcuni problemi del QMC standard, alcuni studi hanno mostrato che il metodo (R)QMC fornirebbe una migliore accuratezza rispetto al MC soltanto per dimensioni $d < 30$. La stima di opzioni asiatiche su un paniere di sottostanti ha una dimensione intrinseca di gran lunga superiore a 30 (nel nostro studio anche 2500) per cui il metodo RQMC sarebbe superfluo. Tuttavia, recenti ricerche hanno mostrato che la superiorità del RQMC può essere estesa a problemi ad elevata dimensione tramite il concetto di dimensione effettiva e l'ANOVA. Nel terzo capitolo abbiamo elaborato una notazione completamente probabilistica della dimensione effettiva che permette di svolgere dimostrazioni e calcoli in una maniera più efficiente e rapida.

Nell'ultimo capitolo, abbiamo stimato i prezzi e le greche di opzioni asiatiche ad alta dimensione in mercati i BS a volatilità costante e deterministica tramite metodi RQMC. Abbiamo generato le traiettorie delle dinamiche dei prezzi tramite procedure computazionalmente efficienti ed innovative il cui scopo è ridurre la dimensione effettiva del problema (nel senso di troncamento) per sfruttare la migliore precisione del metodo RQMC. Abbiamo utilizzato la decomposizione di Cholesky, la principal component analysis (PCA) e la Linear Transformation (LT) proposta da Imai e Tan [1] ed inoltre abbiamo introdotto una nuova tecnica di generazione detta Kronecker Product Approximation (KPA). Nell'articolo originale di Imai e Tan [1] è mostrato che la stima RQMC dei prezzi di opzioni asiatiche su un paniere di sottostanti produce la migliore accuratezza se combinata con la decomposizione LT nel caso di dinamiche multi-dimensionali tipo BS a volatilità costanti. Tuttavia, dal punto di vista computazionale, la tecnica LT non sarebbe più vantaggiosa della PCA. Al contrario, abbiamo dimostrato un algoritmo basato sulla decomposizione QR iterativa con basso peso computazionale che rende la tecnica LT ancora più conveniente. Inoltre, dato che la matrice di covarianza del moto browniano multi-dimensionale può essere scritta come prodotto di Kronecker di due matrici più piccole nel caso di volatilità costanti, abbiamo mostrato come implementare efficientemente tutte le tecniche di generazione di traiettorie basandoci sulle proprietà del prodotto di Kronecker e su algoritmi per matrici sparse. Tuttavia, tale semplificazione non è possibile se le volatilità sono deterministiche. In questo caso, per poter ridurre il peso computazionale, abbiamo introdotto una nuova tecnica di generazione di traiettorie basata sull'approssimazione di prodotto di Kronecker combinata con un nuovo algoritmo di decomposizione di Cholesky per matrici a blocchi.

Infine abbiamo realizzato simulazioni numeriche per poter stimare i prezzi e le delta di opzioni asiatiche ad alta dimensione tramite RQMC, standard MC e LHS.

Abbiamo testato tutte le tecniche di generazione discusse poc'anzi sia al caso di un singolo asset sia nel caso di $M = 10$ sottostanti con $N = 250$, quindi con $d = 250$ o $d = 2500$. Per quanto riguarda la generazione delle sequenze a bassa discrepanza, abbiamo implementato la sequenza di Sobol' di dimensione 50 (con l'ulteriore proprietà di distribuzione Sobol' A) per le prime 50 componenti aleatorie, mentre le restanti sono state recuperate con la tecnica di *padding* tramite LHS. Questo tipo di implementazione, sebbene più oneroso della tecnica di *padding* con standard MC, permette di cogliere meglio le componenti con maggior varianza ed effettuare confronti più efficienti. L'utilizzo del metodo RQMC con LHS-*padding* combinato con la decomposizione LT fornisce i fattori di riduzione della varianza più elevati con tempi di calcolo comparabili alle altre tecniche di generazione. Tali fattori di riduzione della varianza sono riscontrati sia per la stima dei prezzi sia nella stima delle greche mostrando l'efficienza della funzione di localizzazione concepita con il calcolo di Malliavin. Inoltre, la tecnica KPA presenta un peso computazionale basso con riduzione della varianza comparabile a quella ottenuta con LT soltanto nel caso di asset correlati.

In conclusione, il lavoro di tesi ha prodotto due pubblicazioni in riviste referate (Sabino [3] e [4]) ed una pubblicazione in opere collettive (Sabino [5]).

BIBLIOGRAFIA

- [1] J. IMAI e K.S. TAN, *A General Dimension Reduction Technique for Derivative Pricing*, Journal of Computational Finance, **10** (2007), 129-155.
- [2] M. MONTERO e A. KOHATSU-HIGA, *Malliavin Calculus Applied to Finance*, Physica A, **320** (2003), 548-570.
- [3] P. SABINO, *Efficient Quasi-Monte Simulations for Pricing High-dimensional Path-dependent Options*, Decision in Economics and Finance, **32** (2009), 48-65.
- [4] P. SABINO, *Implementing Quasi-Monte Carlo Simulations with Linear Transformations*, Computational Management Science, 2009, In corso di stampa.
- [5] P. SABINO, *Quasi-Monte Carlo: An Asian Bet*, Chapter 16 in Implementing Models in Quantitative Finance: Methods and Cases by G. Fusai and A. Roncoroni Springer, 2008, 395-409.

Dipartimento di Matematica, LPMA, Université Paris-Diderot Paris 7

e-mail: sabino@math.jussieu.fr

Dottorato in Matematica con sede presso l'Università di Bari – Ciclo XXI

Direttore di ricerca: Prof. Nicola Cufaro Petroni, Università di Bari

Codirettore di ricerca: Prof. Bernard Lapeyre, CERMICS, Ecole Nationale des

Ponts et Chaussées, Marne la Vallée, Francia