La Matematica nella Società e nella Cultura

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Antonio Russo

Il problema stazionario di Navier-Stokes in domini bidimensionali

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **3** (2010), n.1 (Fascicolo Tesi di Dottorato), p. 75–78.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RIUMI_2010_1_3_1_75_0>

La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2010.

La Matematica nella Società e nella Cultura
Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. III, Aprile 2010, 75-78

Il problema stazionario di Navier-Stokes in domini bidimensionali

ANTONIO RUSSO

È ben nota l'importanza che riveste tanto nella Meccanica Razionale quanto nelle Scienze Applicate lo studio delle equazioni di Navier-Stokes [1]

$$\begin{aligned} \Delta \boldsymbol{u} - \mathcal{R}\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u} - \nabla p &= \boldsymbol{0} \\ \operatorname{div}\boldsymbol{u} &= 0 \end{aligned} \qquad \text{in } \Omega \tag{1}$$

nelle incognite $\boldsymbol{u} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ $(n = 2, 3)$ *atto di moto* e $p : \Omega \to \mathbb{R}$ *pressione idrodinamica*. Tale sistema governa il moto stazionario di un fluido viscoso incomprimibile, di *viscosità cinematica* ν, in una regione identificata con un dominio (aperto connesso) del piano o dello spazio Ω .Il parametro $\mathcal{R}$, noto come numero di Reynolds, è caratteristico del problema ed è definito dal rapporto $\mathcal{R} = lv/\nu$, con l e v lunghezza e velocità "di riferimento" [1]. La $(1)_1$ traduce in termini differenziali la prima equazione di Eulero o del bilancio della quantità di moto, e la $(1)_2$ la condizione di incomprimibilità del mezzo. Una caratteristica delle equazioni (1) è che la pressione p interviene solo col suo gradiente e risulta determinata dalla conoscenza di $\boldsymbol{u}$, coerentemente con la classica impostazione lagrangiana della Meccanica nella quale un vincolo, in questo caso l'incomprimibilità del fluido, dà luogo ad un'incognita reazione vincolare (pressione idrodinamica) che appare nell'equazione del *bilancio tra le forze* e che "scompare" in quella delle potenze calcolate per velocità compatibili con il vincolo. Al sistema (1) va associata una condizione sul contorno $\partial\Omega$ che corrisponde alla "fisica" del problema che si vuole analizzare. Una classica richiesta, ragionevole per viscosità "non piccole", assume che le particelle del fluido si incollino ai punti del bordo, ovvero che la velocità di una di esse aderente alla frontiera in un punto $\xi \in \partial\Omega$ assuma sempre la velocità di ξ. Tale condizione di "aderenza" si traduce formalmente nella seguente equazione da associare al sistema (1)

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{a} \qquad \text{su } \partial\Omega, \tag{2}$$

con $\boldsymbol{a}$ campo vettoriale assegnato su $\partial\Omega$, soddisfacente, a norma della $(1)_1$, la condizione

$$\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n} = 0, \tag{3}$$

se Ω è limitato. Se, poi, la regione di moto è illimitata, ad esempio esterna ad un compatto di $\mathbb{R}^n$ o tanto estesa che una condizione del tipo (2) non è più controllabile a grande distanza, allora l'infinito diviene una frontiera fittizia sulla quale è naturale richiedere che $\boldsymbol{u}$ sia costante, ovvero che esista un assegnato vettore costante $\boldsymbol{u}_0$ tale che

$$\lim_{r\to+\infty} \boldsymbol{u}(x) = \boldsymbol{u}_0. \tag{4}$$

Se $\mathcal{R}$ è sufficientemente piccolo è del tutto ragionevole, almeno in un primo stadio, trascurare il termine non lineare $\mathcal{R}\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u}$ pervenendo così al sistema di Stokes

$$\begin{aligned} \Delta\boldsymbol{u} - \nabla p &= \boldsymbol{0} \\ \operatorname{div}\boldsymbol{u} &= 0 \end{aligned} \quad \text{in } \Omega. \tag{5}$$

Naturalmente, alle equazioni (5) andranno associate le condizioni (2), (3) nei domini limitati e (2), (4) in quelli non limitati.

L'esistenza ed unicità di una soluzione dei suddetti problemi ai limiti sono stati oggetto di una serie impressionante di ricerche a partire dalla scoperta delle equazioni avvenuta nel 1822 ad opera di C.L.M.H. Navier, innanzitutto per il sistema lineare (5). I primi risultati risentono dei mezzi analitici del tempo e sono confinati a regioni di forma particolare. Ad esempio, nell'esterno della sfera ed in assenza di forze di volume, nel 1851 G.G. Stokes determinò la soluzione esplicita delle equazioni (5) costante al bordo ed infinitesima all'infinito (cfr. [1], p. 245). Passando, poi, all'equivalente problema in due dimensioni, notò che, a differenza del precedente, esso non poteva ammettere alcuna soluzione. Questa osservazione, divenuta celebre nel seguito come *Paradosso di Stokes*, inaugurò un affascinante problema: in un dominio esterno del piano Ω caratterizzare i dati al bordo $\boldsymbol{a}$ per i quali il sistema (5)-(2) ammette una soluzione che converge ad un assegnato vettore costante $\boldsymbol{u}_0$ all'infinito. Tale questione è stata compiutamente affrontata e risolta, almeno da un punto di vista teorico, in ambito variazionale e per domini di classe C^2 da G.P. Galdi e C.G. Simader (1990) (cf. [1]). La condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema (6) ammetta una soluzione puó essere espressa dalla seguente relazione $\int_{\partial\Omega}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{u}_0)\cdot\psi = 0$, per tutte le densità ψ dei potenziali idrodinamici di semplice strato costanti su $\complement\Omega$. Si osservi che tale relazione ha valenza prevalentemete teorica, riuscendo applicabile soltanto quando siano note le densità ψ. A quanto ci risulta, ciò è possibile solo nel caso in cui $\partial\Omega$ sia un'ellisse. Per il primi risultati di una certa completezza bisogna attendere la pubblicazione di un lavoro di F.K.G. Odqvist (1930). Utilizzando la teoria delle equazioni integrali di Fredholm e richiedendo che i dati siano sufficientemente regolari, Odqvist dimostra che il problema di Stokes interno ammette un'unica soluzione espressa da un potenziale di doppio strato e quello esterno tridimensionale una soluzione somma di un potenziale di doppio strato e di uno di semplice strato per ogni assegnazione del dato al bordo. Passando poi al problema non lineare interno (1)-(2), un'applicazione dei precedenti risultati consente ad Odqvist di dimostrare l'esistenza di una soluzione a patto che i dati abbiano una "norma hölderiana" sufficientemente piccola. Come osservato in [1] p. 2, tali risultati erano del tutto coerenti sia dal punto di vista teorico che da quello applicativo, tenendo presente il carattere fortemente non lineare delle equazioni $(1)_1$ e il fatto che l'accordo della teoria di Navier-Stokes con gli esperimenti aveva luogo solo per piccoli numeri di Reynolds. Di conseguenza, notevole impressione suscitò tra gli esperti della disciplina la lettura del celeberrimo lavoro di J. Leray (1933). In esso, infatti, Leray dimostrò l'esistenza di una soluzione del problema di Navier-Stokes interno *per ogni numero di Reynolds* nella sola ipotesi di regolarità dei dati e di flusso nullo su ogni componente connessa $\partial\Omega_i$ di $\partial\Omega$:

$$\int_{\partial\Omega_i} \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n} = 0. \tag{6}$$

Osserviamo che per la $(1)_2$ la (6) è automaticamente soddisfatta se $\partial\Omega$ è connessa. Per quanto riguarda il problema esterno, Leray costruì con un metodo detto *dei domini invadenti*, sempre nell'ipotesi (6), una soluzione delle equazioni (1), (2) e (4) ad *integrale di Dirichlet finito* $\int_\Omega |\nabla \boldsymbol{u}|^2 < +\infty$. In tre dimensioni, Leray dimostrò che tale condizione garantisce che $\boldsymbol{u}$ tende "in un certo modo" al vettore costante assegnato $\boldsymbol{u}_0$. In due dimensioni, invece essa non assicura alcun tipo di convergenza, potendo essere soddisfatta da funzioni divergenti all'infinito, come, ad esempio, $\log^a r$, $a \in (0, 1/2)$.

Limitandoci ai problemi lasciati aperti da Leray in dimensione due, quelli di maggiore spessore, a nostro avviso, sono i seguenti: (i) l'accertamento che la soluzione in domini esterni costruita da Leray soddisfi la condizione all'infinito (4) o almeno ammetta limite all'infinito; (ii) la rimozione o, almeno, l'indebolimento, dell'ipotesi (6). Per quanto riguarda il problema (i) un fondamentale contributo fu portato nel 1974 da D. Gilbarg e H.F. Weinberger. Essi dimostrarono che la soluzione di Leray (con tale locuzione intenderemo la soluzione costruita da Leray con il metodo dei domini invadenti) converge all'infinito ad un vettore costante $\boldsymbol{\kappa}$ nel senso della convergenza in media di ordine due: $\lim_{R\to+\infty} \int_0^{2\pi} |\boldsymbol{u} - \boldsymbol{\kappa}|^2(R, \theta) = 0$. Successivamente è stato dimostrato da G.P. Galdi (2004) che tale convergenza è uniforme. Se $\boldsymbol{\kappa}$ coincida o meno con $\boldsymbol{u}_0$ e se $\boldsymbol{u}$ sia unica in qualche classe funzionale sono problemi completamente aperti.

Un primo contributo al problema (ii) in domini limitati si deve a W. Borchers e K. Pileckas (1994), G.P. Galdi (1992) e L.I. Sazonov (1993), i quali, riprendendo un'idea originaria di R. Finn (1961) dimostrarono che i risultati di Leray continuano a valere nell'ipotesi che i flussi $\Phi_i = \int_{\partial\Omega_i} \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n}$ siano sufficientemente piccoli. Per quanto riguarda i domini esterni, recentemente abbiamo dimostrato [1] l'esistenza di una soluzione variazionale, a patto che $(a\mathcal{R}/2\pi) \sum_{i=1}^{k} |\Phi_i| < 1$, con $a = \sup_{\|\boldsymbol{w}\|_{D^{1,2}_\sigma(\mathbb{R}^2)}=1} \left| \int_{\mathbb{R}^2} (\log r) \operatorname{div} (\boldsymbol{w} \cdot \nabla \boldsymbol{w}) \right|$.

Nel 1997 H. Fujita e H. Morimoto portarono il seguente interessante contributo al problema (i) in domini limitati: se $\boldsymbol{a} = \mathcal{F}\boldsymbol{h} + \gamma$, con $\mathcal{F} \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{h}$ gradiente di una funzione armonica e $\gamma \in W^{1/2,2}(\partial\Omega)$ soddisfacente la condizione $\int_{\partial\Omega} \gamma \cdot \boldsymbol{n} = 0$, allora, a meno di un insieme numerabile $\mathcal{G}$ di valori di $\mathcal{F}$, esiste una costante positiva

c_0 dipendente da $\mathcal{F}$, $\boldsymbol{h}$ ed Ω tale che, per $\|\gamma\|_{W^{1/2,2}(\partial\Omega)} < c_0$, il sistema (1), (2) ammette una soluzione.

Osserviamo che in tutti i risultati su esposti, la formulazione dei problemi avviene in ambito variazionale e, quindi, i dati al bordo sono richiesti appartenere almeno ad opportuni spazi di traccia. I risultati di H. Fujita e H. Morimoto (1997) sono stati estesi in un recente lavoro [3] a dati al bordo negli spazi di Lebesgue.

Lo scopo di questa tesi è quello di presentare, in forma ragionevolmente autosufficiente, quanto abbiamo appreso nel ciclo di dottorato sui problemi esposti ai punti (i), (ii) e il piccolo contributo fornito in questi anni alla loro comprensione. Precisamente, nel capitolo secondo svilupperemo la teoria dell'esistenza ed unicità di soluzioni dei problemi interno ed esterno di Stokes in domini di classe C^2, essenzialmente nell'ipotesi che i dati al bordo appartengano a qualche spazio $L^q(\partial\Omega)$ $(q > 1)$, utilizzando la classica teoria delle equazioni integrali di Fredholm. Tale studio, che terminerà con la dimostrazione del paradosso di Stokes, oltre ad essere propedeutico a quello del problema (non lineare) di Navier-Stokes, è di un certo interesse anche in virtù del fatto che le applicazioni più numerose della teoria riguardano i cosiddetti "moti lenti di un fluido viscoso" retti dal sistema di Stokes. Nel terzo capitolo esporremo la teoria esistenziale delle soluzioni del problema interno di Navier-Stokes nelle stesse ipotesi sui dati richieste nel problema lineare, con $q \geq 2$, dimostrando in conclusione i risultati del lavoro [3]. Nel quarto ed ultimo capitolo, tratteremo il ben più complesso problema esterno di Navier-Stokes, estendendo il risultato dimostrato in [2]. Precisamente, dimostremo che, se $\boldsymbol{a} \in L^2(\Omega)$ e $(\mathcal{R}/2\pi)\sum\limits_{i=1}^{k}|\Phi_i| < 1$, allora il sistema (1) ammette una soluzione $(\boldsymbol{u}, p) \in [D^{1,2}(\complement S_{R_0}) \cap W^{2,1}_{\text{loc}}(\Omega)] \times W^{1,1}_{\text{loc}}(\Omega)]$ che assume il dato al bordo $\boldsymbol{a}$ in un senso opportuno, che coincide con quello della convergenza non tangenziale e con quello classico, rispettivamente per $\boldsymbol{a} \in L^q(\partial\Omega)$ $(q > 2)$ e $\boldsymbol{a} \in C(\partial\Omega)$. Inoltre, se $\boldsymbol{a} \in C(\partial\Omega)$ allora $(\boldsymbol{u}, p)$ è soluzione classica del sistema (1), (2). Esistono infine un vettore $\boldsymbol{\kappa}$ ed uno scalare p_0 tali che $\lim\limits_{r\to+\infty} \boldsymbol{u}(x) = \boldsymbol{\kappa}$, $\lim\limits_{r\to+\infty} p(x) = p_0$ uniformemente.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. P. Galdi, *An introduction to the mathematical theory of the Navier-Stokes equations*, vol I, II , Springer (1998).

[2] A. Russo, *A note on the two-dimensional steady-state Navier-Stokes problem*, J. Math. Fluid Mech (on line 2007), **11** (2009), 407-414.

[3] A. Russo e G. Starita, *On the existence of steady-state solutions to the Navier-Stokes system for large fluxes*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci., **7** (5) (2008), 171-180.

Dipartimento di Matematica, Seconda Università di Napoli
e-mail: a.russo@unina2.it
Dottorato in Scienze Matematiche
con sede presso l'Università "Federico II" di Napoli – Ciclo XX
Direttore di Ricerca: Prof. Giulio Starita, Seconda Università di Napoli